ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
КОРАБЛЕСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики

Васильев В.П.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. МАГНИТОСТАТИКА

Методические указания
к практическим занятиям по физике

Ленинград
1989

Методические указания содержат основные соотношения и формулы по рассматриваемым темам, примеры решения задач и задачи, предлагаемые для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы студентов всех факультетов Ленинградского кораблестроительного института.

ВАСИЛЬЕВ
Борис Петрович

ПАСЫНКОВ
Роберт Ефимович

ФЕДОТОВ
Григорий Александрович

ЭЛЕКТРОСТАТИКА, МАГНИТОСТАТИКА

Методические указания
к практическим занятиям по физике

Ответственный редактор
канд.физ.-мат.наук, доц.Л.Л.Райгородский
Литературный редактор Т.А.Канн

Зак. Р-44. Тир.300. Уч.-изд.л.2,5. 29.03.1989.
Тип.ЛКИ, Лоцманская, 10. Бесплатно.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Составители настоящих методических указаний исходили из предположения, что основное время занятий используется, главным образом, преподавателем, который демонстрирует студентам методы и приемы решения задач по данному разделу курса физики. Непосредственное решение задач студентами осуществляется при выполнении ими самостоятельных заданий, в частности, приводимых в данных методических указаниях и подбираемых преподавателем индивидуально для каждого студента. Представленные решения этих задач вместе с контрольной работой определяют содержание зачета по данной тематике.

Рекомендуется такая последовательность решения задач.

I. Ознакомиться с вводной частью по данной теме занятия и основными физическими закономерностями.

2. Проанализировать условие задачи и ее специфику, сопроводив при необходимости иллюстрациями.

3. Решить задачу в общем виде (с использованием только буквенных обозначений) и получить рабочую формулу.

4. Проверить ответ по "правилу размерностей".

5. Подставить в рабочую формулу конкретные численные данные, обращая особое внимание на их корректность в рамках используемой системы единиц (главным образом СИ).

6. Обратить внимание на количественный результат и его разумность.

7. По ходу решения осуществлять численные оценки отдельных составляющих формул с целью упрощения рабочей формулы (см.п.3).

I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

I.I. Электрическое поле в вакууме. Теорема Гаусса

Основные соотношения и формулы

Напряженностью $\vec{E}$ электрического поля называется величина, определяемая соотношением

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}, \qquad (I.I)$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на положительный пробный заряд $q_{пр}$, помещенный в данную точку поля.

Зная напряженность $\vec{E}$ электрического поля в данной точке пространства, можно определить силу $\vec{F}$, действующую на точечный заряд q, помещенный в эту точку:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \qquad (I.2)$$

Согласно принципу суперпозиции, в каждой точке пространства напряженность $\vec{E}_{рез}$ результирующего электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых зарядами, образующими данную систему:

$$\vec{E}_{рез} = \int d\vec{E}. \qquad (I.3а)$$

Здесь $d\vec{E}$ - напряженность электрического поля, создаваемого в данной точке зарядом dq, а интегрирование проводится по области, в пределах которой распределен электрический заряд.

Распределение заряда характеризуется объемной, поверхностной и линейной плотностью:

$$\rho = \frac{dq}{dV}\ ; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}\ ; \quad \tau = \frac{dq}{dl},$$

где dq - заряд, приходящийся на единицу объема, поверхности и длины соответственно.

В частном случае, когда имеется n дискретных источников:

$$\vec{E}_{рез} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \qquad (I.3б)$$

где $\vec{E}_i$ - напряженность электрического поля, создаваемого i-м источником.

Напряженность электрического поля, создаваемого в некоторой произвольной точке 2 точечным зарядом q_1, находящимся в точке I, равна

$$\vec{E} = k\frac{q_1}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \qquad (I.4)$$

где $\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, проведенный из точки I в точку 2;

$$k = \begin{cases} 1 & \text{- в системе СГС,} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\dfrac{м}{Ф} \quad \left(\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}\right) & \text{- в единицах СИ.} \end{cases}$$

Потоком вектора напряженности электрического поля через поверхность S называется величина

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_S E_n\,dS = \int_S E\,dS\cos\alpha. \qquad (I.5)$$

Здесь α - угол между вектором $\vec{E}$ и направлением нормали к элементарной площадке dS ; E_n - проекция вектора на направление нормали.

Т е о р е м а Г а у с с а. Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению $4\pi k$ на алгебраическую сумму зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi k\int_V \rho\,dV, \qquad (I.6)$$

где ρ - объемная плотность заряда.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА I. Пять одинаковых точечных зарядов q = I5 нКл расположены вдоль полуокружности радиусом R = I см на одинаковом расстоянии друг от друга. Определить силу, действующую на точечный заряд q_0 = 5 нКл, расположенный в центре полуокружности (рис.I.I).

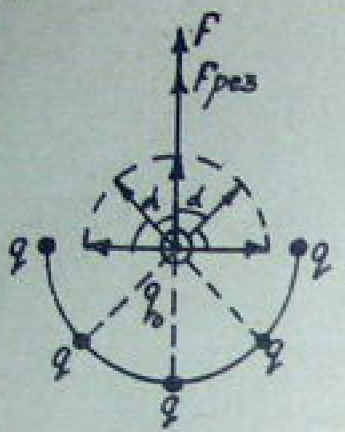

Рис. I.I

РЕШЕНИЕ. По принципу суперпозиции напряженность электрического поля в центре полуокружности равна

$$E_{рез} = k\frac{q}{R^2} + 2k\frac{q}{R^2}\cos\alpha = k\frac{q}{R^2}(1+\sqrt{2}),$$

а искомая сила

$$F = q_0 E_{рез} = k\frac{q_0 q}{R^2}(1+\sqrt{2}) = 9\cdot 10^9\ \frac{м}{Ф}\ \times$$

$$\times\ \frac{1{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^{-9}\ Кл^2}{(10^{-2}\ м)^2} \simeq 1{,}6\cdot 10^{-2}\ Н.$$

ЗАДАЧА 2. Отрезок прямой равномерно заряжен с линейной плотностью τ. Определить напряженность электрического поля в точке A, которая видна из концов отрезка под углами α_1 и α_2. Расстояние точки A от оси отрезка равно a (рис. I.2).

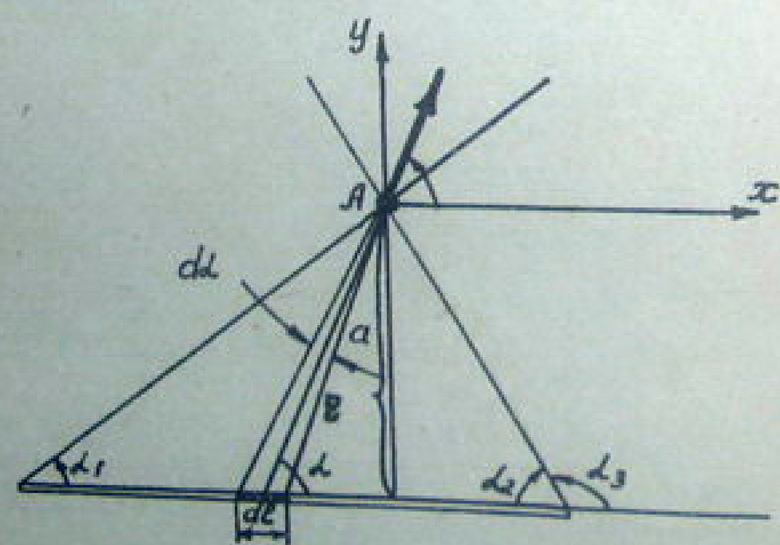

Рис. I.2

РЕШЕНИЕ. Выберем систему координат, как показано на рис. I.2. Напряженность электрического поля, создаваемого в точке A бесконечно малым участком отрезка dl, равна

$$dE = k\frac{\tau\, dl}{r^2},$$

а ее проекции на оси координат:

$$dE_x = dE\cos\alpha = k\tau\frac{dl\cos\alpha}{r^2};$$

$$dE_y = dE\sin\alpha = k\tau\frac{dl\sin\alpha}{r^2}.$$

Из геометрических соображений следует

$$dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha};\quad r = \frac{a}{\sin\alpha},$$

тогда

$$dl = \frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$dE_x = k\tau\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a};\quad E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dE_x = \frac{k\tau}{a}(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_1) = \frac{k\tau}{a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1);$$

$$dE_y = k\tau\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{a};\quad E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_3} dE_y = \frac{k\tau}{a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) = \frac{k\tau}{a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

Абсолютная величина напряженности E и угол β между вектором $\vec{E}$ и осью x определяются элементарно:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{k\tau}{a}\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{E_y}{E_x} = \mathrm{arctg}\frac{\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1}.$$

ЗАДАЧА 3. Определить напряженность электрического поля на оси тонкого равномерно заряженного кольца, внутренний и внешний диаметры которого равны R_1 и R_2, в точке A, отстоящей от плоскости кольца на величину H (рис. I.3). Поверхностная плотность заряда кольца равна σ.

РЕШЕНИЕ. В силу симметрии задачи относительно оси Z (см. рис. I.3) вектор напряженности электрического поля в точке A направлен вдоль оси z. Напряженность поля, создаваемая в точке A элементарным кольцом радиусом R и шириной dR, равна

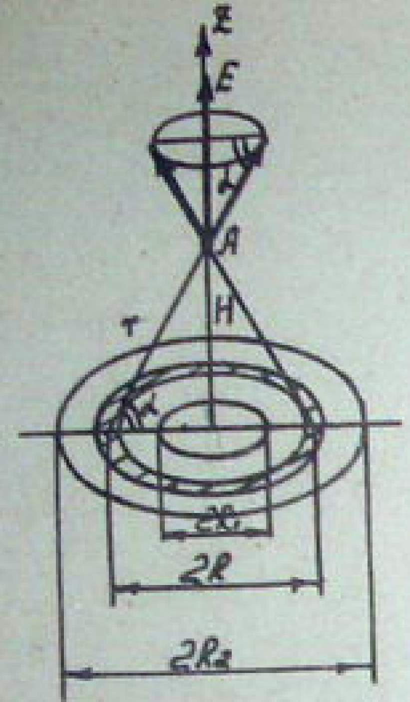

Рис.I.3

$$dE = k\frac{\sigma 2\pi R dR}{r^2}\sin\alpha ,$$

где $\sigma 2\pi R dR$ - заряд, сосредоточенный в пределах элементарного кольца.

Из рис.I.3 видно, что

$$\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}};\ r^2 = H^2+R^2,$$

тогда

$$E=\int dE = k2\pi\sigma H\int_{R_1}^{R_2}\frac{RdR}{(H^2+R^2)^{3/2}} = k2\pi\sigma H\left(\frac{1}{\sqrt{H^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{H^2+R_2^2}}\right).$$

ЗАДАЧА 4. Однородный шар радиусом R_2, равномерно заряженный с объемной плотностью заряда ρ, имеет внутри сферическую полость радиуса R_1. Центры полости и шара совпадают. Определить функцию $E(r)$ (где E - напряженность электрического поля, r - расстояние от центра шара) для трех областей пространства: а) $0\le r\le R_1$, б) $R_1\le r\le R_2$, в) $R_2\le r\le\infty$.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что задача обладает центральной симметрией. Поэтому в качестве замкнутых поверхностей в теореме Гаусса для всех трех областей пространства построим концентрические с внутренней полостью шара сферы. Тогда по теореме Гаусса будем иметь:

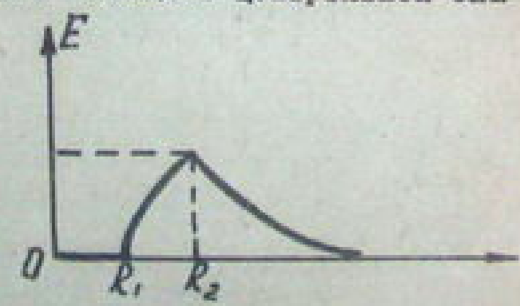

Рис.I.4

а) $E_1 4\pi r^2 = 4\pi k\cdot 0 \Rightarrow E_1 = 0;$

б) $E_2 4\pi r^2 = 4\pi k\rho\frac{4}{3}\pi\,(r^3-R_1^3) \Rightarrow E_2(r) = k\frac{4}{3}\pi\rho\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right);$

в) $E_3 4\pi r^2 = 4\pi k\rho\frac{4}{3}\pi(R_2^2-R_1^2) \Rightarrow E_3(r) = k\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R_2^3-R_1^3}{r^2}.$

Качественный вид функции $E(r)$ показан на рис.I.4.

Задачи для самостоятельного решения

I. С какой силой ядро атома водорода притягивает электрон, находящийся на первой боровской орбите?

Ответ: 84 нН.

2. Какой точечный заряд необходимо поместить в центр равностороннего треугольника, в вершинах которого расположены одинаковые точечные заряды I мкКл, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

Ответ: -0,58 мкКл.

3. Найти приходящуюся на единицу длины силу, с которой взаимодействуют две параллельных бесконечно длинных нити, равномерно заряженных с плотностью 0,2 $\frac{мкКл}{м}$. Расстояние между нитями I см.

Ответ: 7,2 Н/м.

4. Равномерно заряженный шаровой слой, внутренний и внешний диаметры которого равны 2 см и 4 см, притягивает точечный заряд 2 нКл, находящийся на расстоянии 5 см от его центра, с силой $2\cdot 10^{-5}$ Н. Определить объемную плотность заряда слоя.

Ответ: -96 $\frac{мкКл}{м^3}$.

5. Определить силу взаимодействия бесконечной плоскости и тонкого диска диаметром 6 см, если они заряжены с плотностью 3 нКл/см^2.

Ответ: 0,I4 Н.

6. На оси тонкого узкого кольца радиусом 3 см, заряженного равномерно с плотностью 0,I $\frac{мкКл}{м}$, на расстоянии 4 см от плоского кольца расположен точечный заряд. Определить величину точечного заряда, если со стороны кольца на него действует сила $3\cdot 10^{-5}$ Н.

Ответ: 5,3 нКл.

7. Определить линейную плотность заряда равномерно заряженного тонкого стержня длиной I0 см, если на продолжении

оси стержня на расстоянии I5 см от его середины напряженность электрического поля равна I кВ/м.

Ответ: 22 нКл/м.

8. Две бесконечные параллельные плоскости равномерно заряжены с плотностью I $\frac{мкКл}{м^2}$ и -2 $\frac{мкКл}{м^2}$. Найти напряженность электрического поля в пространстве между пластинами.

Ответ: I,7 кВ/см.

9. Бесконечно длинная труба, внутренний и внешний диаметры которой составляют 4 и 8 см, равномерно заряжена с плотностью I нКл/см^3. Определить напряженность электрического поля в точках, отстоящих от оси трубы на расстояния: а) I см, б) 3 см, в) I0 см.

Ответ: а) 0, б) 9,4 В/см, в) 6,8 В/см.

I0. В центре сферы радиусом 5 см, заряженной равномерно с плотностью 3 $\frac{мкКл}{м^2}$, находится точечный заряд 0,5 нКл. Определить силу, действующую на точечный заряд I,5 нКл, расположенный на расстояниях: а) 4 см, б) I0 см от центра сферы.

Ответ: а) 4,2 мкН, б) I30 мкН.

I.2. Работа сил электростатического поля и электрический потенциал

Основные соотношения и формулы

Работа сил электростатического поля произвольного точечного заряда q в вакууме (ε = I) или в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε при переносе точечного заряда q_0 из точки I в точку 2 (рис.I.5) определяется формулой

$$A_{12} = q_0 \int \vec{E} d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q\,q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\Delta W, \quad (I.7)$$

где ΔW - изменение потенциальной энергии заряда q_0 в поле $\vec{E}$. Знак "минус" указывает, что потенциальная энергия положительного пробного заряда q_0 в поле положительного заряда q расходуется, причем A_{12} зависит только от разности $\Delta W = W_2 - W_1$, т.е. положений зарядов r_1 и r_2, и не зависит от характера его траектории.

Работа сил любого электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру или, что то же самое, циркуляция вектора электростатического поля равна нулю (рис.I.6):

$$A = q_0 \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad (I.8а)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (I,8б)$$

Поля обладающие свойствами, определяемыми формулами (I.7) и (I.8), носят название потенциальных или консервативных.

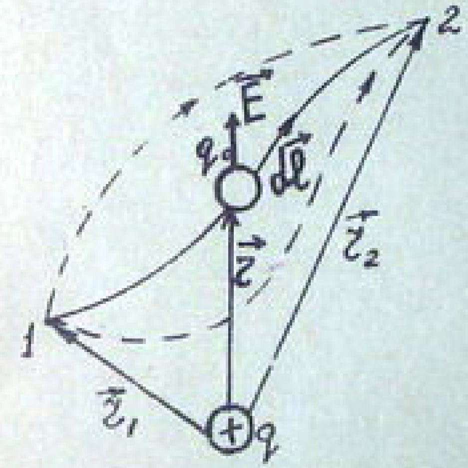

Рис.I.5

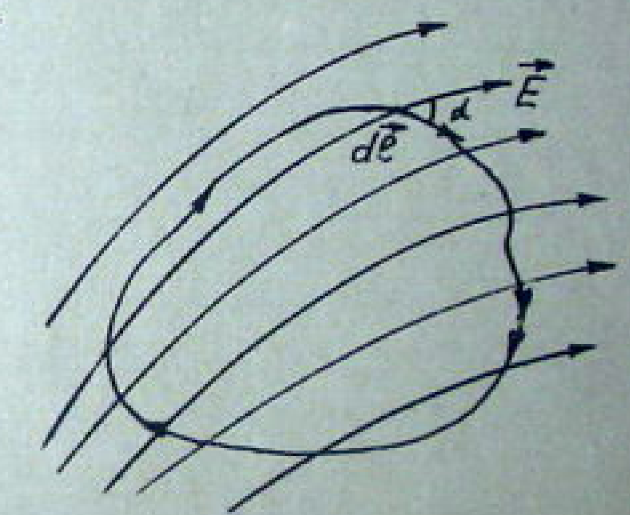

Рис.I.6

Электрическим потенциалом точечного заряда, создаваемого им в точке, определяемой радиусом-вектором $\vec{r}$, называется потенциальная энергия, которую приобретает положительный единичный точечный заряд при переносе его из бесконечности в данную точку поля:

$$\varphi_q(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \begin{cases} >0 & q>0, \\ <0 & q<0. \end{cases} \quad (I.9)$$

Размерность потенциала: $[\varphi] = \frac{I\ Дж}{I\ Кл}$ = I В (в единицах СИ).

На основании принципа суперпозиции потенциал в точке P системы дискретных точечных зарядов или системы непрерывных зарядов записывается соответственно:

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{q_i}(r_i); \quad (I.10)$$

$$\varphi(p) = \int_V \frac{\rho\, dr}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}, \qquad (I.II)$$

где ρ - объемная плотность зарядов;

$$\varphi(p) = \int_S \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}, \qquad (I.I2)$$

где σ - поверхностная плотность зарядов;

$$\varphi(p) = \int_L \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}, \qquad (I.I3)$$

где τ - линейная плотность зарядов.

Величина произведенной механической работы при бесконечно медленном изменении положения заряда q из точки I в точку 2 определяется соотношением

$$A_{12} = -\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (I.I4)$$

Если известен потенциал как функция координат $\varphi(x,y,z)$, то составляющие вектора электрического поля находятся из условий:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad (I.I5а)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad (I.I5б)$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad (I.I5в)$$

где величины, стоящие в левых частях уравнений (I.I5), являются частными производными потенциала по соответствующей координате. Для радиально-симметричного поля

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}. \qquad (I.I5г)$$

Эквипотенциальные поверхности (поверхности равного потенциала) определяются из условия

$$\varphi(x,y,z) = C, \qquad (I.I6)$$

где C - некоторая постоянная, определяющая данную поверхность, принадлежащую к семейству эквипотенциальных поверхностей. Силовые линии электрического поля всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА I. Найти работу по перемещению точечного положительного заряда q = I0 нКл из точки I в точку 2, движущегося под углом $\alpha = 60^\circ$ к пластине тонкого конденсатора, заряженного равномерно поверхностной плотностью заряда $\sigma = 0{,}4\ \frac{мкКл}{м^2}$. Путь, проходимый зарядом $l = 0{,}2$ м, расстояние между пластинами $d \ll L$ (L - максимальный размер пластины). Определить уравнение эквипотенциальных поверхностей (рис.I.7) внутри и вне конденсатора.

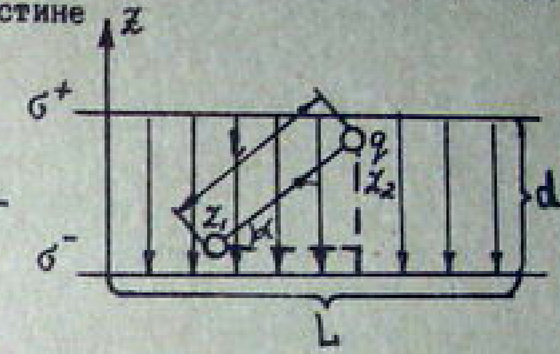

Рис.I.7

РЕШЕНИЕ. В соответствии с (I.I4) убыль потенциальной энергии заряда составляет

$$-\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = A_{12} = qE(z_1 - z_2). \qquad (I)$$

Величина поля внутри конденсатора $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. В данном случае полагаем конденсатор заполненным газом, т.е. $\varepsilon \approx 1$.

Величина работы A_{12} зависит только от разницы:

$$z_1 - z_2 = l \sin\alpha = \frac{0{,}2\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом:

$$A_{12} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} l \sin\alpha = \frac{10^{-8}\cdot 0{,}4\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}2\sqrt{3}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2} = 7{,}83\cdot 10^{-5}\ Дж = 4{,}9\cdot 10^{14}\ эВ.$$

Поскольку эквипотенциальные поверхности нормальны к силовым линиям поля и являются плоскостями, параллельными обкладкам конденсатора, их уравнения запишутся как $z = C$. Вне конденсатора $E_{z>d} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ потенциал в точке z будет

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-d)}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} = const,$$

т.е. потенциал не меняется при изменении расстояния от плас-

тин. При расстоянии x, много большем α: $\varphi(x)_{x\to\infty} \to 0$.
Следовательно: $E_x = 0$.

ЗАДАЧА 2. Электрон движется по инерции в направлении центра отрицательной заряженной сферы с кинетической энергией $K_0 = 100$ эВ на расстоянии $r_0 = 10$ м, отсчитанном от центра сферы. Заряд сферы $q = 10^{-8}$ Кл, радиус $R = 40$ см. Определить минимальное расстояние r_m, на которое приблизится электрон к поверхности сферы. Какая плотность заряда должна быть у сферы, чтобы электрон достиг ее поверхности?

РЕШЕНИЕ. Электрон достигнет расстояния r_e, когда его кинетическая энергия K_0 будет полностью израсходована на накопление его потенциальной энергии, или что то же самое, на работу против сил поля заряда q: $e\varphi_m = K_0$.

$$\varphi_m = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e}, \quad \text{т.е.} \quad r_e = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 K_0}.$$

Следовательно, минимальное расстояние, на которое приблизится электрон к поверхности сферы, равно

$$r_m = r_e - R_0 = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 K_0} - R_0 = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{Кл}\cdot10^{-8}\,\text{Кл}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}6\cdot10^{-17}\,\text{Дж}} -$$

$$-0{,}4\,\text{м} = 0{,}5\,\text{м}.$$

Чтобы заряд достиг поверхности сферы, необходимо выполнение условия:

$$\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R_0} - K_0 = 0; \quad q = 4\pi R_0^2\sigma;$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 K_0}{eR_0} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}6\cdot10^{-17}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}4} = \frac{8{,}85\cdot10^{-10}}{0{,}4} = 2{,}2\cdot10^{-9}\,\text{Кл/м}^2.$$

ЗАДАЧА 3. Две сферы радиусами R_1 и R_2, равномерно заряженные объемными плотностями зарядов, равными по величине, но противоположные по знаку $\pm\rho$, пересекают друг друга, причем центры сфер смещены на величину a. Найти: а) поле $\vec{E}$ в любой точке области пересечения сфер; б) потенциал на линии, соединяющей центры сфер.

РЕШЕНИЕ. а) Из теоремы Гаусса определяется поле внутри каждой сферы:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}; \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0}.$$

так как

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3} r_i^3,$$

таким образом, полное поле равно

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a},$$

где вектор $\vec{a}$ направлен от центра I-й сферы к центру 2-й сферы.

б) Используя принцип суперпозиции, имеем:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

В области $r < r_1$ вне пересечения

$$\varphi_1 = \frac{\rho r_1^2}{6\varepsilon_0}; \quad \varphi_2 = -\frac{R_2^3\rho}{3\varepsilon_0(a - r_1)}, \text{ т.е. } \varphi = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_1^2 - \frac{R_2^3}{a - r_1}\right).$$

В области, где сферы пересекаются:

$$\varphi = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_1^2 - (r_1 + a)^2\right) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} a(2r_1 + a).$$

Действительно:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\rho}{3\varepsilon} a$$

в соответствии с ранее полученным результатом.

ЗАДАЧА 4. Вычислить поле E в точке p, расположенной на оси тонкого равномерно положительно заряженного ($\sigma = 5$ мкКл/м^2) диска, на расстоянии $r = 2$ м от его центра. Радиус диска $R_0 = 50$ см.

Пользуясь принципом суперпозиции, определить величину поля в этой же точке p, если система представляет собой бесконечную отрицательно заряженную плоскость ($\sigma = -5$ мкКл/м^2), у которой имеется отверстие радиусом 50 см (рис.I.8).

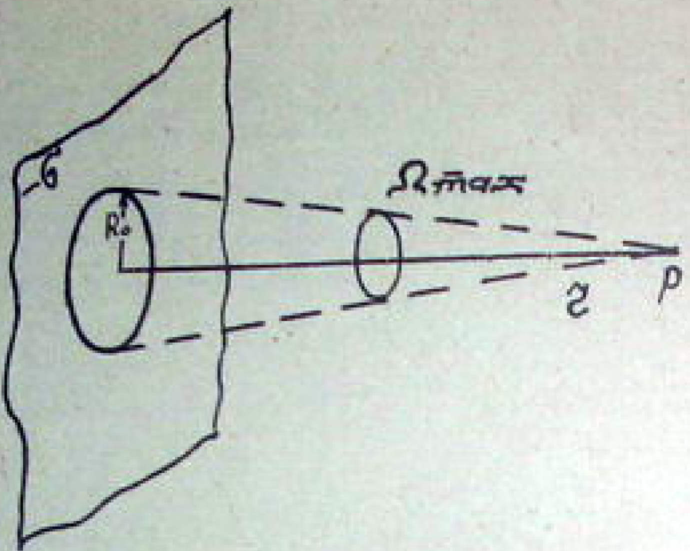

Рис.I.8

РЕШЕНИЕ. Разобьем диск на кольца шириной dR со средним радиусом R. Тогда на основании формулы (I.I2) ($\varepsilon = 1$) имеем:

$$\varphi(r) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{2\pi R\,dR}{\sqrt{R^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R_0^2+r^2}-r\right).$$

Отсюда получим напряженность поля:

$$E = -\frac{d\varphi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+R_0^2}}\right).$$

Эта же формула может быть получена в более компактном виде:

$$E_r = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{dS\cos\varphi}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_{max}}d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_{max},$$

где $d\Omega = \frac{dS}{r^2}\cos\varphi$ - телесный угол, под которым виден элемент поверхности dS из точки P.

Теперь легко получить выражение для поля бесконечно заряженной плоскости с отверстием, поскольку оно является суперпозицией положительно заряженного диска ($\sigma>0$) и отрицательно заряженной плоскости ($\sigma<0$):

$$E_r = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\Omega_{max} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\Omega_{max}}{2\pi}-1\right).$$

Легко видеть, что при $R_0\to\infty$ $\Omega\to 2\pi$ и $E_r\to 0$, а при $R\to 0$ $r\to\infty$, $E_r\to\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Задачи для самостоятельного решения

I. Шарик массой 40 мг, заряженный положительным зарядом 10^{-9} Кл, движется со скоростью I0 см/с. На какое расстояние может приблизиться шарик к положительному точечному заряду, равному 4CGSE?

Ответ: $6\cdot 10^{-2}$ м.

2. Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском, в предельном случае переходит в электрическое поле а) бесконечно протяженной плоскости, б) точечного заряда.

3. Определить потенциал точки поля, находящейся на расстоянии I0 см от центра заряженного шара радиусом I см. Задачу решить при следующих условиях: а) задана поверхностная плотность зарядов на шаре, $\sigma = 10^{-11}$ Кл/см^2; б) задан потенциал шара $\varphi_ш = 300$ В.

Ответ: а) II,3 В, б) 30 В.

4. Определить потенциал и поле точечного диполя, электрический момент которого $p = 2{,}0\cdot 10^{-14}$ Кл·м в точке, лежащей на оси диполя x, на расстоянии $x_1 = 10{,}0$ см от его центра (рис.I.9) со стороны положительного заряда.

Рис.I.9

Ответ: $\varphi = 1{,}8\cdot 10^{-2}$ В; $E_r = 0{,}8$ В/м; $E_\tau = 0$.

5. Прямой бесконечный цилиндр радиусом $R_0 = 10$ см равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-12}$ Кл/м^2. Цилиндр является источником электронов. Вектор скорости вылетающего электрона перпендикулярен поверхности цилиндра. Какова должна быть скорость электронов, чтобы они могли удалиться от оси на расстояние $r = 10^3$ м.

Ответ: $u_0 = 3{,}7\cdot 10^5$ м/с.

6. Найти: а) силу F, с которой обкладки плоского конденсатора, заполненного воздухом, с зарядом пластин $\pm q = 15$ мкКЛ и площадью $S = 10$ м^2 притягиваются друг к другу.

б) работу A, которую нужно затратить, чтобы раздвинуть эти обкладки еще на I7 см при условии, что $q = const$.

Ответ: а) F = I,27 Н; б) A = 0,2I6 Дж.

7. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого меняется по закону: а) $\varphi(x,y) = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi(x,y) = a \cdot x \cdot y$.

Ответ: а) $\vec{E} = -2(\vec{i}x - \vec{j}y)$, б) $\vec{E} = -(\vec{i}y + \vec{j}x)$.

8. Имеется бесконечно длинная прямая нить, заряженная равномерно линейной плотностью τ = 0,4 мкКл. Вычислить разность потенциалов точек I и 2, если точка 2 находится в η = 2,0 раза дальше от нити, чем точка I.

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = (\tau / 2\pi\varepsilon_0)\ln\eta = 5$ кВ.

9. Определить работу, совершаемую над точечным зарядом $q_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл при его переносе из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии I см от поверхности шара радиусом I см, заряженного равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-9}$ Кл/см^2?

Ответ: $1{,}13 \cdot 10^{-4}$ Дж.

I0. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $\varphi = a^2(x^2 + y^2) + b z^2$. Найти: а) модуль и направление вектора $\vec{E}$, б) определить форму эквипотенциальной поверхности при $a > 0$ и $b > 0$.

Ответ: б) Семейство эллипсоидов вращения с полуосями $\sqrt{\varphi / a}$ и $\sqrt{\varphi / b}$.

I.3. Электрическое поле в веществе. Энергия электрического поля

Основные соотношения и формулы

Электростатическое поле внутри проводника отсутствует: $\vec{E} = 0$. Соответственно потенциал $\varphi = const$.

Силовые линии внешнего по отношению к проводящему телу поля всегда нормальны к его поверхности $E_S = (E_n)_S$, причем

$$(E_n)_S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \qquad (I.17)$$

где σ - поверхностная плотность индуцированного внешним полем свободного заряда проводника; ε - диэлектрическая проницаемость среды, соприкасающейся с проводником.

Электрический момент единицы объема - вектор поляризации:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}, \qquad (I.18)$$

где $\varkappa = \alpha N$ - диэлектрическая восприимчивость, имеющая нулевую размерность; N - число атомов и молекул или диполей $\vec{p}$ в единице объема; α - атомная восприимчивость. Отсюда

$$\vec{P} = N\vec{p}; \qquad (I.19а)$$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}. \qquad (I.19б)$$

Вектор электрической индукции (смещения) определен следующим образом:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \qquad (I.20а)$$

$$\varepsilon = 1 + \varkappa, \qquad (I.20б)$$

где ε - диэлектрическая проницаемость.

Величина $\varepsilon \geqslant 1$ является мерой уменьшения поля E в диэлектрике по сравнению с вакуумом при постоянной величине и взаимном расположении электрических зарядов, создающих поле.

Объемная плотность связанных зарядов диэлектрика:

$$\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = -\nabla\vec{P}. \qquad (I.21)$$

Поверхностная плотность связанных зарядов диэлектрика

$$\sigma_p = P_n. \qquad (I.22)$$

Объемная ρ и поверхностная плотности свободных (сторонних) зарядов в диэлектрике

$$\rho = \operatorname{div}\vec{D} = \nabla\vec{D}; \qquad (I.23а)$$

$$\sigma = D_n. \qquad (I.23б)$$

Электрическая емкость

$$C = \frac{dq}{dU}, \qquad (I.24)$$

т.е. отношение приращения заряда к приращению разности потенциалов между телами.

Для уединенного тела, например сферы в среде с диэлектрической проницаемостью ε:

$$C = \frac{dq}{d\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (I.25)$$

Для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Размерность

$$[C] = \text{I фарада} = 9\cdot 10^{11}\ \text{см}. \qquad (I.26)$$

Энергия взаимодействия n неподвижных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i. \qquad (I.27)$$

Здесь φ_i – потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме q_i.

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \qquad (I.28)$$

где Q – заряд конденсатора; U – напряжение на конденсаторе; C – емкость конденсатора.

Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}D^2, \qquad (I.29)$$

где E – напряженность; D – индукция электрического поля; ε – диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Примеры решения задач

ЗАДАЧА I. Определить емкость плоского конденсатора, площадь пластин которого $S = 10^{-2}$ м^2, расстояние между пластинами $d = 10^{-4}$ м, находящегося под напряжением $U = 100$ В и заполненного диэлектриком ($\varepsilon = 20$).

Определить величину электрической индукции D, поля E и плотности связанных зарядов и давление, которое пластины конденсатора оказывают на твердый диэлектрик, находящийся между пластинами.

РЕШЕНИЕ. В соответствии с (I.26) емкость

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{20\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\ \text{Ф};$$

заряд пластин:

$$q = CU = 1{,}7\cdot 10^{-6}\ \text{Кл};$$

плотность сторонних зарядов на обкладках конденсатора (I.23а):

$$\sigma = \frac{q}{S} = D_n = D = \frac{1{,}7\cdot 10^{-6}}{10^{-2}} = 1{,}7\cdot 10^{-4}$$

(в данном случае $D = D_n$);

поле внутри конденсатора:

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1{,}7\cdot 10^{-6}}{20\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 10^{6}\ \text{В/м};$$

плотность связанных зарядов согласно (I.26а):

$$\sigma_p = P_n = P = D - \varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = 1{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2;$$

давление на диэлектрик:

$$\frac{F}{S} = \frac{qE_{пл}}{S} = \frac{\sigma\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{(1{,}7)^2\cdot 10^{-8}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 20\cdot 10^{-2}} = 2{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{Па}.$$

Примечание. При определении силы, действующей между пластинами, следует использовать формулу, определяющую поле, создаваемое бесконечной плоскостью $E_{пл} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, так как "сама на себя" вторая пластина не действует.

ЗАДАЧА 2. Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см равномерно заряжены электричеством с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 10$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -3$ нКл/м^2 (рис.I.10). Пространство между цилиндрами заполнено парафином $\varepsilon_2 = 2$. Определить напряженность поля E в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 2$ см, $r_2 = 6$ см и $r_3 = 15$ см от оси цилиндров.

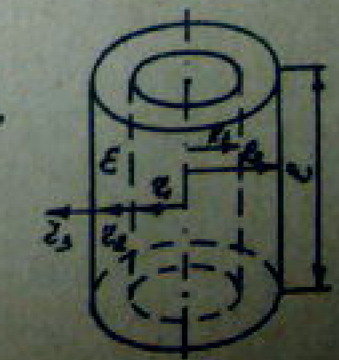

Рис.I.10

РЕШЕНИЕ. Для расчета полей воспользуемся теоремой Гаусса: $\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q$. Отсюда, с учетом цилиндрической симметрии, следует, что

$$D_1 2\pi r_1 l = 0 \quad ; \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 \, , \quad E_1 = 0 \, ;$$

$$D_2 2\pi r_2 l = 2\pi R_2 l \sigma_1 \quad , \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 \, ,$$

$$E_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{10^{-8}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-2}} = 4{,}7\cdot 10^2 \text{ В/м}.$$

Поле вне цилиндров определится по теореме Гаусса как результат суммы двух зарядов – внутреннего и наружного цилиндров, – т.е.

$$D_3 2\pi r_3 l = 2\pi R_1 l \sigma_1 + 2\pi R_2 l \sigma_2 \, ;$$

$$E_3(r_3) = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r_3} + \frac{R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r_3} \, .$$

ЗАДАЧА 3. Изолированному металлическому шару радиусом $R_1 = 20$ см сообщен заряд $q = 2$ мкКл. Поверхность шара равномерно покрыта слоем диэлектрика $\varepsilon = 120$ с внутренним радиусом $R_1 = 20$ см и внешним $R_2 = 30$ см. Вычислить заряды на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика и плотность наведенных зарядов. В силу симметрии задачи в диэлектрике существует только радиальная, т.е. нормальная составляющая вектора поляризации:

$$\sigma_p = P_n = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon-1)D}{\varepsilon} \, ,$$

но

$$D_n = D = \sigma = \frac{q_1}{4\pi R^2} \, .$$

Следовательно:

$$\sigma_{p_1} = \frac{q_1(\varepsilon - 1)}{4\pi R_1^2 \varepsilon} = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 119}{4\pi 0{,}2^2\cdot 120} = 3{,}9\cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2 \, ;$$

$$\sigma_{p_2} = \frac{q_1}{4\pi R_2^2} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} = 1{,}7\cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2 \, ;$$

$$q_{1p} = q_{2p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q_1 = \frac{119\cdot 2\cdot 10^{-6}}{120} = 1{,}98 \text{ Кл}.$$

Заметим, что при $\varepsilon \simeq 2$ $q'_{1p} \simeq 1\cdot 10^{-6}$ Кл, т.е. существенно меньше, чем $q_{1p} \simeq 2\cdot 10^{-6}$ Кл. При $\varepsilon \longrightarrow \infty$ $q_{1p} = q_{2p} = q_1$, поскольку проводник с формальной точки зрения имеет именно такое значение диэлектрической проницаемости.

ЗАДАЧА 4. Стеклянный $\varepsilon = 7$ толстостенный полый шар равномерно заряжен по объему с плотностью ρ. Внутренний радиус шара R_1, наружный – R_2. Найти распределение потенциала в стекле, а также потенциалы φ наружной, внутренней поверхностей и центра шара.

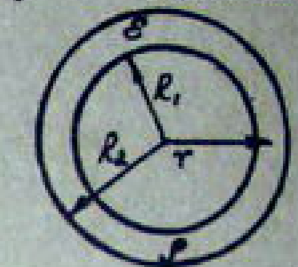

Рис.I.II

РЕШЕНИЕ. Используя теорему Гаусса и учитывая сферическую симметрию задачи, определим величину вектора индукции $D_r = D$ в некоторой точке A на расстоянии r внутри сферы $R_1 \leq r \leq R_2$ (рис.I.II).

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \, ,$$

где

$$D_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3) \, ,$$

$$D_r = \frac{\rho}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right).$$

В соответствии с (I.20в) найдем поле

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \, .$$

Потенциал найдем после интегрирования:

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right) d_r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{2R_1^3}{r}\right) + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из условия непрерывности потенциала, который на внешней поверхности шара определяется только свободным зарядом:

$$\varphi(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon} \frac{(R_2^3 + 2R_1^3)}{6\varepsilon\varepsilon_0 R_2} + C$$

Подставляя эту величину в формулу (I.25), получим

$$C = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\rho(R_2^3 + 2R_1^3)}{6\varepsilon_0 \varepsilon R_2} \, .$$

Таким образом, окончательно распределение потенциала внутри слоя:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + \rho\frac{R_2^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\rho(R_2^3 + 2R_1^3)}{6\varepsilon_0\varepsilon R_2} \, .$$

Потенциал на внешней поверхности шара

$$\varphi(R_2)=-\frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2}+\frac{R_1^3}{R_2}\right)+\frac{\rho(R_2^3+2R_1^3)}{6\varepsilon\varepsilon_0 R_2}+\rho\,\frac{R_2^3-R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2},$$

а на внутренней поверхности:

$$\varphi(R_1)=-\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}+\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}+\frac{\rho(R_2^3+2R_1^3)}{6\varepsilon_0\varepsilon R_2}.$$

Потенциал в центре шара совпадает с этой величиной, поскольку поле $E_{r<R_1}=0$, следовательно, $\varphi_{r<R_1}=const$, причем $\varphi(r)$ непрерывно зависит от r.

ЗАДАЧА 5. Найти распределение потенциала внутри и снаружи плоского конденсатора, заполненного диэлектриком $\varepsilon = 20$, одна из пластин которого заземлена $\varphi_2 = 0$, а ко второй приложен потенциал $U = 10$ В. Расстояние (рис.I.I2) между пластинами $d = 1$ см.

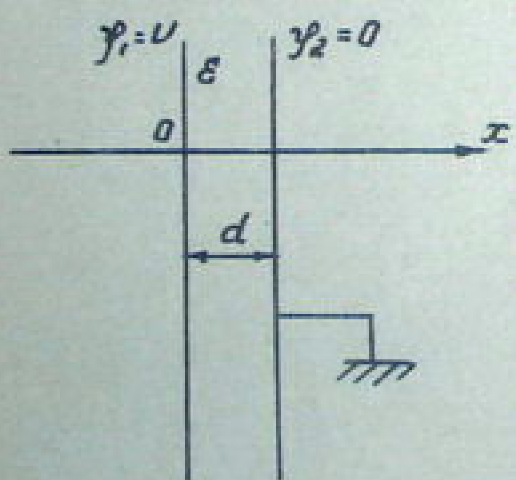

Рис.I.I2

РЕШЕНИЕ. Поскольку внутри и снаружи заряды отсутствуют, уравнение потенциала (уравнение Лапласа) запишется следующим образом:

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=A;\quad \varphi(x)=A\cdot x+B.$$

Учитывая условия на границах, имеем:

$$\varphi_{x=0}=\varphi_1=B;$$

$$\varphi_{x=d}=\varphi_2=Ad+B=Ad+u=0;$$

$$A=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{d}=-\frac{u}{d};$$

$$\varphi(x)=-\frac{U}{d}x+u=u\left(1-\frac{x}{d}\right)$$

Электрическое поле внутри конденсатора

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{U}{d}=\frac{10}{0{,}01}=10^3\ \text{В/м}.$$

Вне конденсатора поле $\vec{E}=0$, поэтому

$$\varphi(x)_{x<0}=const=u;$$

$$\varphi(x)_{x>d}=const=0.$$

Этот результат не зависит от величины диэлектрической проницаемости ε, так как задана величина U на пластине конденсатора. Если бы на пластинах была задана плотность сторонних зарядов, то положение было бы иным, т.е. $\varphi\sim\frac{1}{\varepsilon}$; $E\sim\frac{1}{\varepsilon}$.

ЗАДАЧА 6. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого равно $d = 1$ мм, заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 6$. Конденсатор заряжают до напряжения $U = 100$ В и отключают от источника, а затем выдвигают диэлектрик так, что он заполняет половину пространства между пластинами. Определить среднюю по объему конденсатора плотность энергии электрического поля.

РЕШЕНИЕ. Обозначим площадь пластины конденсатора через S. Тогда емкость конденсатора, заполненного полностью диэлектриком, будет

$$C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

а конденсатора с выдвинутым наполовину диэлектриком:

$$C=\frac{\varepsilon_0\frac{S}{2}}{d}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{2}}{d}=\frac{\varepsilon_0(1+\varepsilon)S}{2d}.$$

Поскольку конденсатор отключен от источника, заряд на пластинах конденсатора неизменен и равен

$$Q=C_0U=\frac{\varepsilon_0\varepsilon SU}{d}.$$

Искомая величина равна отношению энергии конденсатора ко всему объему между пластинами:

$$w=\frac{W}{V}=\frac{Q^2}{2C}\,\frac{1}{Sd}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\left(\frac{U}{d}\right)^2=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6^2}{1+6}\left(\frac{10^2}{10^{-3}}\right)^2=0{,}46\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Бесконечная проводящая плоскость находится в среде (изоляторе) с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 80$, поверхностная плотность связанного заряда диэлектрика $\sigma_0 = 10^{-8}$ Кл/м^2. Найти поле и выражение для потенциала в среде, полагая начало отсчета от проводящей плоскости.

Ответ: $E = 14{,}3$ В/м; $\varphi(x) = -14{,}3x + C$.

2. Показать, что если поле в некоторой среде меняется по закону $E_x = a + bx$, $E_y = const$, $E_z = const$, то оно не является потенциальным.

3. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского конденсатора, заполненного жидкостью с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 15$. Площадь пластин $S = 400$ см^2, исходное расстояние $d_0 = 1$ см. Заряд пластин 5 мкКл поддерживается постоянным. Задачу решить двумя способами.

Ответ: $4{,}7\cdot10^{-2}$ Дж.

4. Расстояние между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму квадратов площадью $S = 400$ см^2, $d = 1$ см; с помощью электрической батареи конденсатор заряжается до разностей потенциалов $U = 10$ В, затем отключается. После этого между обкладками до половины конденсатора вставляется пластина $d_1 = 1$ см, $S_1 = 10\times20$ см^2. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 4$. Определить поляризацию пластины P.

Ответ: $P = 1{,}1\cdot10^{-8}$ Кл/м^2.

5. Показать, что на границе диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанного заряда $\sigma_p = -\frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon}$, где σ - поверхностная плотность заряда на проводнике.

6. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика ($\varepsilon = 5$) создано однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Радиус шара $R = 3{,}0$ см. Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов.

Ответ: $(\sigma_p)_{max} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E = 3{,}5\ \frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$.

7. Два плоских конденсатора, один из которых воздушный (C_1), а другой заполнен диэлектриком $\varepsilon = 8$ (C_2), имеют одинаковые геометрические размеры, соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U = 15$ В. Определить напряженности поля E_1 и E_2 и электрические индукции D_1 и D_2 обоих конденсаторов, если $d = 2$ см.

Ответ: $E_1 = E_2 = 7{,}5\cdot10^2$ В/м; $D_1 = 6{,}6\cdot10^{-9}$ Кл/м^2; $D_2 = 5{,}3\cdot10^{-8}$ Кл/м^2.

8. Найти емкость сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 10{,}5$ см, пространство между сферами заполнено маслом ($\varepsilon = 5$). Какой радиус должен иметь шар, помещенный в масло, чтобы иметь ту же емкость?

Ответ: $C = 1{,}17\cdot10^{-9}$ Ф; $R = 2{,}1$ м.

9. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая восприимчивость которого $\varkappa = 0{,}08$. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 4$ кВ. Найти поверхностную плотность зарядов на пластинах и на диэлектрике. Расстояние между пластинами $d = 5$ мм.

Ответ: $\sigma_p = 5{,}6\cdot10^{-7}$ Кл/м^2; $\sigma = 1{,}1\cdot10^{-6}$.

10. Три одинаковых точечных заряда q расположены в вершинах квадрата. Какой точечный заряд нужно поместить в четвертую вершину квадрата, чтобы энергия взаимодействия этих четырех зарядов равнялась нулю?

Ответ: $-q$.

11. Три одинаковых конденсатора соединены параллельно и подключены к источнику постоянного напряжения. Определить, во сколько раз изменится энергия этой системы конденсаторов, если пространство между пластинами одного из них заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной четырем.

Ответ: увеличится в два раза.

12. Два одинаковых конденсатора заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной пяти, и соединены

последовательно. Систему заряжают от источника постоянного напряжения и отключают от него. Как изменится энергия системы конденсаторов, если у одного из них удалить диэлектрик?

Ответ: увеличится в три раза.

13. Сфера радиусом 1 см, равномерно заряженная с плотностью 1 мкКл/м^2, находится в вакууме. Определить энергию электрического поля внутри сферы радиусом 3 см.

Ответ: 0,47 мкДж.

14. Определить диэлектрическую проницаемость вещества, из которого изготовлен однородный шар радиусом 1 см, равномерно заряженный с плотностью 0,1 мкКл/см^3, если энергия электрического поля внутри шара равна 1 Дж.

Ответ: 13.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

2.1. Магнитное поле постоянного тока (в вакууме)

Основные соотношения и формулы

Основным законом, который используют при расчете магнитного поля постоянного тока, является закон Био - Савара - Лапласа (БСЛ). Закон БСЛ позволяет определить индукцию (напряженность) магнитного поля элемента тока $I d\vec{l}$ в произвольной точке пространства:

$$d\vec{B} = k_1 \frac{[I d\vec{l}\, \vec{n}_r]}{r^2}. \qquad (2.1)$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от элемента dl, по которому течет ток I, до точки определения индукции; $\vec{n}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ - единичный радиус-вектор; k_1 - коэффициент, зависящий от выбора системы измерения единиц:

$$k_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ - в единицах СИ} & \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \\ \frac{1}{c} \text{ - в системе СГС} & c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}. \end{cases}$$

Вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор $I d\vec{l}$, и точку, в которой определяется магнитное поле, причем так, что вращение вокруг $I d\vec{l}$ связано с правилом "буравчика".

В скалярной форме закон БСЛ имеет вид

$$dB = k_1 \frac{I dl \cdot \sin(I d\vec{l}, \vec{r})}{r^2}. \qquad (2.2)$$

Для расчета магнитного поля проводника с током конечной длины L пользуются принципом суперпозиции магнитных полей, создаваемых в данной точке всеми элементами токов $I d\vec{l}$ проводника:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \qquad (2.3)$$

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в вакууме связана с индукцией $\vec{B}$ простым соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}.$$

В системе СГС $\mu_0 = 1$, таким образом, $\vec{H} = \vec{B}$.

Нередко для расчета магнитного поля постоянных токов полезно использовать теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$:

$$\oint_l B_l\, dl = 4\pi k_1 \sum_i I_i. \qquad (2.4)$$

Здесь l - произвольный замкнутый контур, охватывающий токи I_i; $B_l = B\cos\theta$; θ - угол между вектором $\vec{B}$ и касательной к контуру l.

Применяя закон БСЛ для двух весьма распространенных простейших источников магнитного поля, получим следующие формулы:

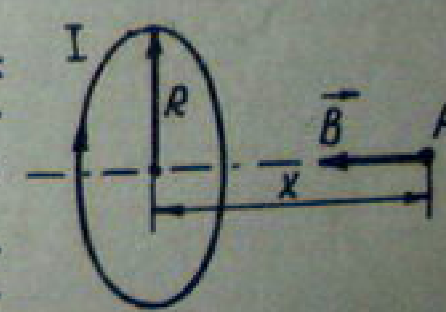

Рис.2.1

- для тока кругового контура радиусом R в точке, находящейся на оси на расстоянии x от его плоскости (рис.2.1):

$$B = 2\pi k_1 \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}; \qquad (2.5)$$

- для отрезка прямого проводника с током I в точке, расположенной на расстоянии r_0 от него (рис.2.2):

$$B = k_1 \frac{I}{r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (2.6)$$

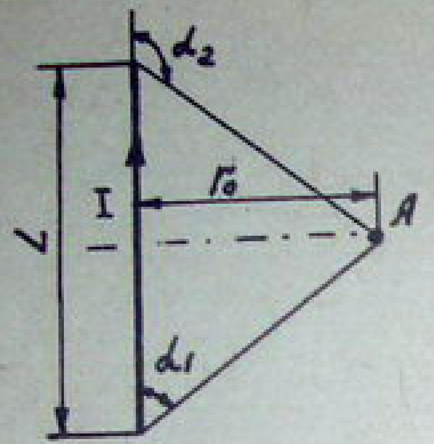

Рис.2.2

Частные случаи:

- магнитное поле в центре кругового тока ($x = 0$ в формуле (2.5)):

$$B = k_1\frac{2\pi I}{R}; \qquad (2.7)$$

- магнитное поле бесконечного длинного прямого проводника с током ($\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$ в формуле (I.6)):

$$B = k_1\frac{2I}{r_0}. \qquad (2.8)$$

При решении задач по расчету магнитных полей их можно представить на основании универсального принципа суперпозиции, в виде различных комбинаций полей простейших источников. Существенным здесь является лишь учет векторного характера принципа суперпозиции.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. По проводнику, согнутому в виде квадратной рамки со стороной a = 10 см, течет ток I = 5 А. Определить индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в точке, равноудаленной от вершин рамки на расстояние, равное его стороне.

РЕШЕНИЕ. Магнитное поле в точке A (рис.2.3) можно представить в виде суперпозиции полей от четырех одинаковых сторон рамки. Однако вследствие того, что ток I меняет свое направление, будет изменяться по направлению и вектор индукции магнитного поля от разных сторон рамки. Искомая индукция будет определяться векторной суммой

$$B = \sum_{i=1}^{4}\vec{B}_i,$$

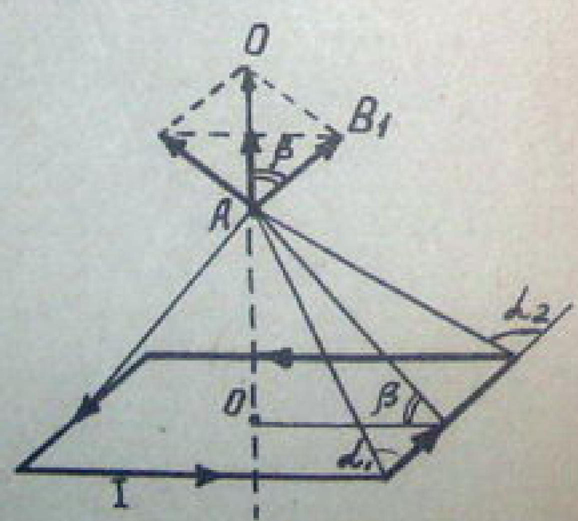

Рис.2.3

где $\vec{B}_i$ - вектор индукции магнитного поля, создаваемого одной стороной.

Нетрудно показать, что горизонтальная составляющая обращается в нуль при суммировании. Таким образом, вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси OO' и по модулю будет равен

$$B = 4B_1\cos\beta,$$

где $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$ (см.рис.2.3), а $B_1 = k_1\frac{I}{r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

Из рис.2.3 видно, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ и $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$. Окончательно для B имеем

$$B = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a} = \frac{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{3\pi\cdot 0{,}1} = 1{,}33\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

ЗАДАЧА 2. Бесконечно длинный прямой провод с током I_1 расположен параллельно плоскости кругового витка радиусом R с током I_2=2 А. Прямой провод и ось кругового витка пересекаются в точке O_1, отстоящей от центра витка на расстояние d = 4 м (рис.2.4). Определить индукцию магнитного поля в точке O_2, если $OO_2 = O_1O_2$.

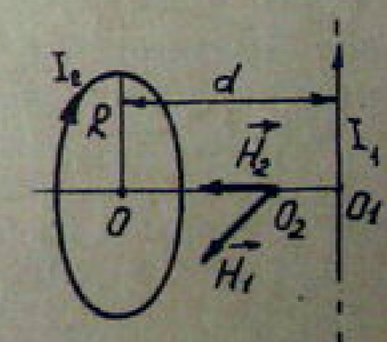

Рис.2.4

Пользуясь правилом "буравчика", строим в точке O_2 векторы: $\vec{B}_1$ - вектор индукции магнитного поля, создаваемого током I_1, и $\vec{B}_2$ - вектор индукции магнитного поля, создаваемого током I_2. Абсолютные значения этих векторов определяем по формулам:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\frac{\alpha}{2}}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2 R^2}{2\left[R^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Результирующий вектор индукции в точке O_2 равен

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Так как векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ взаимно перпендикулярны, модуль вектора $\vec{B}$ будет равен

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\mu_0\sqrt{\left(\frac{I_1}{\pi d}\right)^2+\left(\frac{I_2R^2}{2+\left[R^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}\right)^2}\ .$$

Произведя вычисления, получим: $B = 0{,}59 \cdot 10^{-4}$ Тл.

ЗАДАЧА 3. Ток I течет по тонкой прямой бесконечной ленте шириной ℓ. Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке O (рис.2.5).

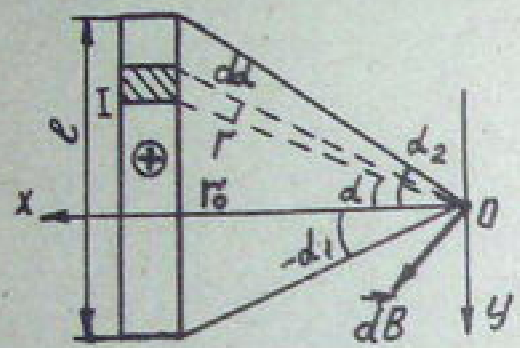

Рис.2.5

Непосредственно применять закон БСЛ здесь нельзя, так как ленту нельзя считать ни тонким прямым проводником, ни элементом тока. Теорема о циркуляции также не дает положительного результата, так как магнитное поле несимметрично.

Разделим проводящую ленту на узкие длинные проводники так, чтобы каждый из них можно было принять за тонкий длинный прямой проводник, для которого справедлива формула (2.8). Пусть ширина участка проводника $d\ell$, тогда элементарный ток, который течет по этому участку, будет равен

$$dI=\frac{d\ell}{\ell}I\ .$$

Он создаст в точке O магнитное поле, индукция которого будет равна

$$dB=\kappa_1\frac{2dI}{r}\ ,$$

где

$$r=\frac{r_0}{\cos\alpha}\ ;\quad d\ell=\frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{r_0\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\ ,$$

откуда

$$dB=\kappa_1\frac{2I\,d\alpha}{\ell\cos\alpha}\ .$$

Направление вектора $d\vec{B}$ определяется правилом "буравчика". Результирующий вектор $\vec{B}$ находится, согласно принципу суперпозиции, векторной суммой

$$\vec{B}=\int_\ell d\vec{B}\ ,$$

где суммирование производится по всей ширине ленты. Удобно вычислить отдельно проекции $\vec{B}$ по осям x и y:

$$B_x=\int_\ell dB_x \quad \text{и} \quad B_y=\int_\ell dB_y\ ;$$

$$dB_x=dB\cdot\sin\alpha=\kappa_1\frac{2I\cdot\sin\alpha\,d\alpha}{\ell\cos\alpha}\ ;$$

$$dB_y=dB\cdot\cos\alpha=\kappa_1\frac{2I\,d\alpha}{\ell}\ .$$

После интегрирования получим:

$$B_x=\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\kappa_1\frac{2I\sin\alpha\,d\alpha}{\ell\cos\alpha}=\kappa_1\frac{2I}{\ell}\ln\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\ ;$$

$$B_y=\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\kappa_1\frac{2I\,d\alpha}{\ell}=\kappa_1\frac{2I}{\ell}(\alpha_2+\alpha_1)\ ;$$

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}\ .$$

Полезно рассмотреть частные случаи:

- лента бесконечной ширины (плоскость), тогда $B_x=0$ и $B_y=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\ell}$,

таким образом магнитное поле достаточно широкого плоского проводника с током однородно;

- точка O симметрична относительно ленты, тогда

$$B_x=0 \quad \text{и} \quad B=B_y=\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{\ell}\alpha_1\ .$$

ЗАДАЧА 4. По проводнику, имеющему форму сплошного цилиндра радиусом R, течет ток плотностью j. Определить магнитное поле внутри и вне проводника (рис.2.6).

Рис.2.6

РЕШЕНИЕ. Закон БСЛ здесь применять нецелесообразно, так как проводники нельзя считать тонкими. Однако задача обладает цилиндрической симметрией и может быть легко решена с помощью теоремы (2.4) о циркуляции вектора $\vec{B}$.

Пусть нас интересует магнитное поле в точке A_1, расположенной внутри проводника. Проведем окружность с центром в точке O , проходящую через точку A_1 (рис.2.6). Вследствие цилиндрической симметрии задачи величина индукции B в любой точке окружности радиусом r_1 одинакова. По теореме (2.4) имеем

$$\oint_{l_1} B_l \, dl = 4\pi k_1 \sum_i I_i ,$$

где контур l_1 – окружность радиуса r_1 , на которой B = const , тогда

$$B_1 2\pi r_1 = 4\pi k_1 j \pi r_1^2 .$$

Здесь учтено, что сумма токов, охватываемых контуром l_1 , равна $j\pi r_1^2$, отсюда

$$B_1 = 2\pi k_1 j r_1 .$$

Индукция линейно возрастает от центра к периферии проводника.

Рассмотрим теперь точку A_2 за пределами проводника на расстоянии r_2 от его центра и применим теорему (2.4) так же, как это делалось выше:

$$B_2 2\pi r_2 = 4\pi k_1 j \pi R^2 ;$$

$$B_2 = 2\pi k_1 \frac{jR^2}{r^2} = k_1 \frac{2I}{r_2} .$$

Индукция B_2 убывает обратно пропорционально расстоянию. Последнее выражение совпадает с формулой (2.8) для бесконечно длинного прямого проводника с током.

Задачи для самостоятельного решения

1. По двум длинным параллельным проводам, расположенным в вакууме на расстоянии 30 см друг от друга, текут в противоположных направлениях токи $I_1 = I_2 = 15$ А. Определить индукцию магнитного поля в точке, расположенной на расстояниях от проводников $r_1 = 15$ см и $r_2 = 20$ см соответственно.

Ответ: $B = 3 \cdot 10^{-5}$ Тл.

2. Бесконечно длинный прямой проводник, по которому течет ток $I = 5$ А, согнут под прямым углом (рис.2.7). Найти индукцию магнитного поля в точках A и C , находящихся на биссектрисе угла, и в точке D на продолжении одной

из его сторон. Расстояние от вершины угла до каждой из точек $r_0 = 10$ см.

Ответ: $B_A = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ Тл; $B_C = 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ Тл; $B_D = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

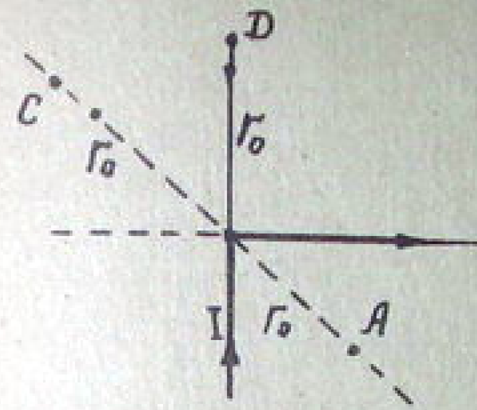

Рис.2.7

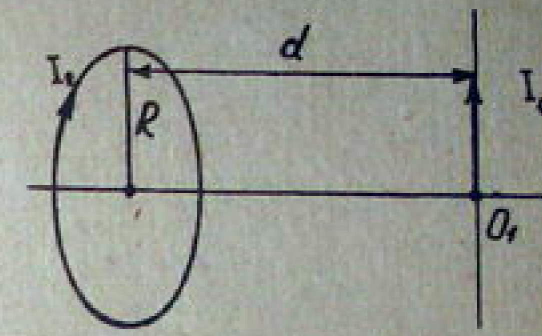

Рис.2.8

3. Бесконечно длинный прямой провод с током $I_1 = 2$ А расположен параллельно плоскости кругового витка радиусом R = 4 м с током $I_2 = 5$ А. Прямой провод и ось кругового витка пересекаются в точке O_1, отстоящей от центра витка на расстояние d = 4 м (рис.2.8). Определить индукцию магнитного поля в точке O_2 , если $OO_2 = O_1O_2$.

Ответ: $B = 2{,}75 \cdot 10^{-5}$ Тл.

4. К тонкому однородному проволочному кольцу радиусом R подводят ток I = 2 А в направлении, указанном стрелками. Найти индукцию магнитного поля в центре кольца, если подводящие провода, делящие кольцо на две дуги l_1 и l_2 , расположены радиально и имеют бесконечную длину (рис.2.9).

Ответ: B = 0.

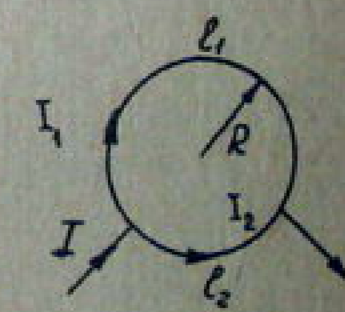

Рис.2.9

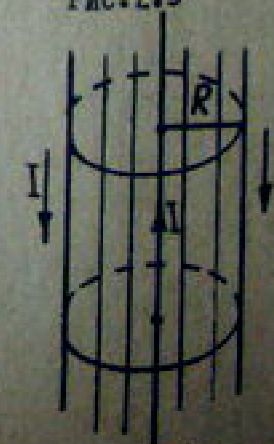

Рис.2.10

5. Коаксиальный кабель представляет собой длинную металлическую тонкостенную трубку радиусом R = 10 мм, вдоль оси которой расположен тонкий провод. Силы токов в трубке и проводе равны, направления противоположны. Определить магнитную индукцию в точ-

ках I и 2 (рис.2.I0), удаленных соответственно на расстояния $r_1 = 5{,}0$ мм и $r_2 = 15$ мм от оси кабеля, если сила тока $I = 0{,}50$ А.

Ответ: $B_1 = 2\cdot10^{-5}$ Тл; $B_2 = 0$.

6. Ток $I = 20$ А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением $S = 1{,}0$ мм^2, создает в центре кольца индукцию магнитного поля $B = 2{,}24\cdot10^{-4}$ Тл. Какая разность потенциалов приложена к концам проволоки, образующей кольцо?

Ответ: $U = 0{,}12$ В.

7.

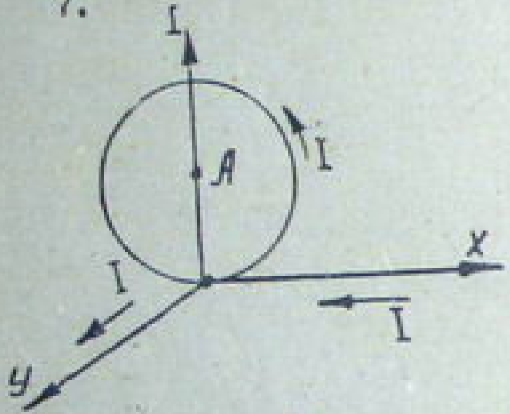

Рис.2.II

7. Определить индукцию магнитного поля, созданного системой тонких проводников, по которым течет ток I, в точке А, являющейся центром кругового проводника радиусом R (рис.2.II).

Ответ:
$$B = k_1\frac{I}{R}\sqrt{2(2\pi^2 - 2\pi + 1)}.$$

8. Ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкой дуги длиной ℓ и радиусом R (рис.2.I2). Определить индукцию магнитного поля в точке О.

Ответ: $B = k_1\dfrac{4I}{\ell}\sin\dfrac{\ell}{2R}$.

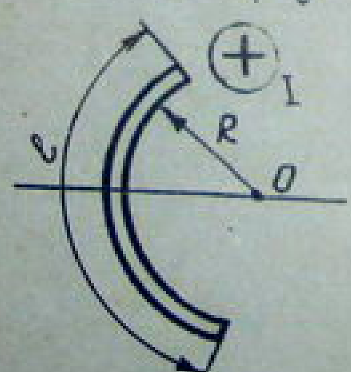

Рис.2.I2

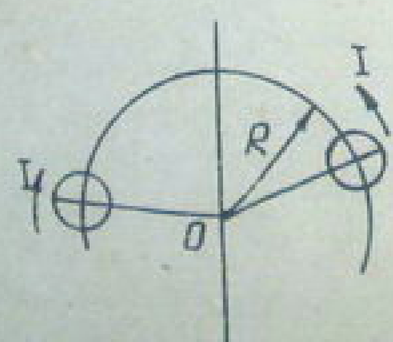

Рис.2.I3

9. Два бесконечно длинных параллельных проводника с токами сближаются, перемещаясь по дуге окружности с центром в точке О (рис.2.I3). Как изменяется по величине индукция магнитного поля в точке О, если: а) токи в проводах параллельны, б) антипараллельны?

10. Найти циркуляцию вектора напряженности магнитного поля в двух случаях, изображенных на рис.2.I4, по контурам ℓ_1 и ℓ_2, если сила тока в проводниках $I_1 = I_2 = I_3 = I$ А.

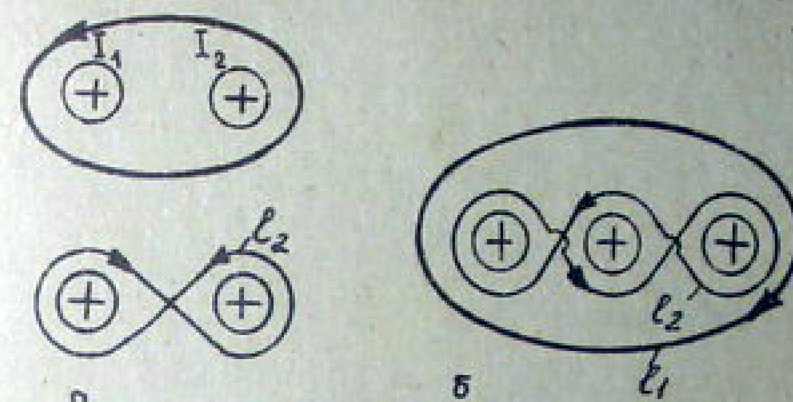

Рис.2.I4

II. По проводнику, согнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности равна 20 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить напряженность магнитного поля в центре квадрата.

Ответ: $H = 22$ А/м.

I2. Эбонитовая тонкостенная цилиндрическая трубка радиусом R и длиной ℓ с помощью трения равномерно зарядилась поверхностным зарядом плотностью σ. Цилиндр приводится во вращение вокруг своей оси с частотой ω (рис.2.I5). Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке А на оси цилиндра.

Ответ: $B = 2\pi k_1 \omega R\sigma(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

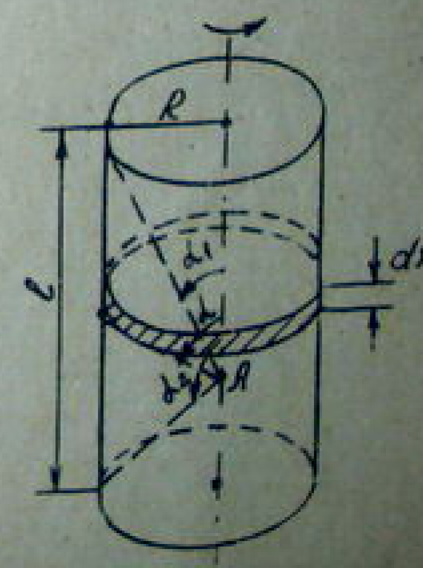

Рис.2.I5

У к а з а н и е. Непосред-
ственное применение закона БСЛ в и теорему
этой задаче нецелесообразно, трудно использовать. Ну-
о циркуляции $\vec{B}$, так как магнитное поле несимметрично. элементом
но сначала рассмотреть магнитное поле, создаваемое

dx (см.рис.2.15) вращающегося цилиндра, для чего воспользоваться выражением (2.5), а затем, используя принцип суперпозиции, определить индукцию магнитного поля вращающегося цилиндра.

2.2. Действие магнитного поля на проводники с током и заряды

Основные соотношения и формулы

На элемент тока $I\vec{dl}$ во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ действует сила, которая определяется законом Ампера:

$$d\vec{F}=k_2\left[I\vec{dl}\vec{B}\right], \qquad (2.9)$$

или в скалярной форме:

$$dF=k_2 I\,dl\,B\sin(I\vec{dl}\,\hat{,}\,\vec{B}). \qquad (2.9а)$$

Здесь k_2 – коэффициент, зависящий от выбора системы измерения единиц:

$$k_2=\begin{cases}1 - \text{в единицах СИ},\\ 1/c - \text{в системе СГС}.\end{cases}$$

Пользуясь законом Ампера, можно определить удельную силу взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами I_1 и I_2, находящимися на расстоянии r_0 друг от друга:

$$f=\frac{F}{l}=k_1k_2\frac{2I_1I_2}{r_0}. \qquad (2.10)$$

На электрический заряд q, движущийся со скоростью ϑ в магнитном поле с индукцией B, действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_Л=k_2q\left[\vec{\vartheta}\vec{B}\right], \qquad (2.11)$$

или в скалярной форме:

$$F_Л=k_2q\vartheta B\sin(\vec{\vartheta}\,\hat{,}\,\vec{B}). \qquad (2.11а)$$

При движении заряда q в электрических и магнитных полях сила Лоренца определяется двумя составляющими:

$$\vec{F}_Л=q\vec{E}+k_2q\left[\vec{\vartheta}\vec{B}\right], \qquad (2.12)$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

На контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B, действует механический момент

$$\vec{M}=\left[\vec{p}_м\vec{B}\right], \qquad (2.13)$$

или в скалярной форме:

$$M=p_мB\sin(\vec{p}_м\,\hat{,}\,\vec{B}), \qquad (2.13а)$$

где $p_м=IS$ – магнитный момент контура площадью S с током I.

Поток вектора $\vec{B}$ (магнитный поток) через поверхность S в произвольном магнитном поле равен:

$$\Phi=\int_S B_n dS, \qquad (2.14)$$

где $B_n=B\cos(\vec{B}\,\hat{,}\,\vec{n})$ – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали в данном месте поверхности S.

В случае однородного магнитного поля магнитный поток равен:

$$\Phi=BS\cos(\vec{B}\,\hat{,}\,\vec{n})=B_nS. \qquad (2.15)$$

Работа по перемещению плоского контура с током I в магнитном поле определяется формулой

$$A=k_2I\Delta\Phi, \qquad (2.16)$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока через поверхность контура.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА I. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой 100 А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии a, равном ее длине (рис.2.16).

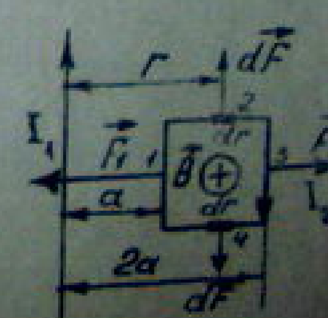

Рис.2.16

Индукция магнитного поля, создаваемого током I_1 в пространстве, окружающем проводник 1, в единицах СИ равна $B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, где r – расстояние от рассматриваемой точки до проводника. Вектор индукции поля $\vec{B}$ во всех точках, лежащих справа от проводника, направлен перпендикулярно плоскости рисунка "от нас". В точках поля, где находятся стороны рамки I и 3, $B=\mathrm{const}$. На эти стороны действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ (см.рис.2.I6), которые, в соответствии с законом Ампера (2.9), в единицах СИ равны: $F_1=I_2aB_1$ и $F_3=I_2aB_3$ (B_1 и B_3 - значения магнитной индукции в точках, расположенных на расстоянии a и $2a$ от прямого проводника). Направления сил F_1 и F_3 показаны на рисунке.

В местах расположения сторон 2 и 4 магнитная индукция

$$B \neq \mathrm{const}.$$

Сила, действующая на элементарный участок dr стороны 2, равна $dF=I_2 dr B$. Можно показать, что силы, действующие на стороны 2 и 4 рамки, определяемые по формуле $F_{24} = \int dF$, равны по абсолютной величине и противоположны по направлению.

Таким образом, искомая сила, действующая на рамку, равна

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_3.$$

По модулю результирующая сила равна

$$F=F_1-F_3.$$

Подставив в эту формулу выражения для F_1 и F_3 и учитывая, что $B_1=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, а $B_3=\dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$, получим:

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi a}(1-1/2)=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}.$$

После подстановки имеем $F = 10^{-3}$ Н.

ЗАДАЧА 2. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом R = I0 см находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 50 мТл. По проводнику течет ток I = I0 А. Найти силу F, действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля (рис.2.I7).

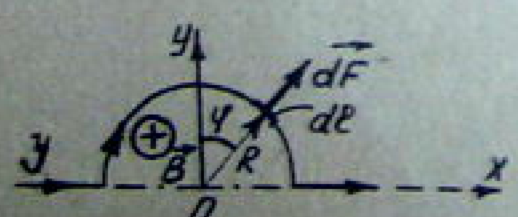

Рис.2.I7

Каждый элемент тока $I\vec{dl}$ расположен неодинаково относительно магнитного поля, поэтому необходимо применять закон Ампера в общем виде (2.9). Разделим проводник на столь малые участки, чтобы каждый из них можно было считать элементом тока $I\vec{dl}$, к которому применим закон Ампера (2.9). Сила $\vec{dF}$ направлена вдоль радиуса полукольца R от центра O и равна по модулю

$$dF=IdlB,$$

так как $I\vec{dl}\,\widehat{,}\,\vec{B}=\pi/2$.

Результирующая сила, действующая на полукольцо, будет направлена вдоль оси симметрии OY, так как проекции на ось OX сил, действующих на симметрично расположенные элементы, взаимно компенсируются, что нетрудно показать аналитически. Остается просуммировать проекции на ось симметрии OY всех элементарных сил:

$$F=F_y=\int_l dF_y=\int_l dF\cos\varphi=\int_l IdlB\cos\varphi.$$

Поскольку $dl=Rd\varphi$

$$F=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} IRB\cos\varphi\, d\varphi = IBR\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2RIB.$$

После подстановки численных значений имеем F = 0,I Н.

ЗАДАЧА 3. В магнитном поле, созданном прямым бесконечным проводником с током I_1 = 5 А, помещена прямоугольная рамка с током I_2 = 3 А так, что сторона рамки длиной a = I м параллельна проводнику и отстоит от него на расстояние $r_0=0{,}1b$, где b - длина другой стороны рамки (рис.2.I8). Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть рамку на угол $\pi/2$ относительно оси OO_1 параллельной проводнику с током I_1 и проходящей через середину стороны b рамки.

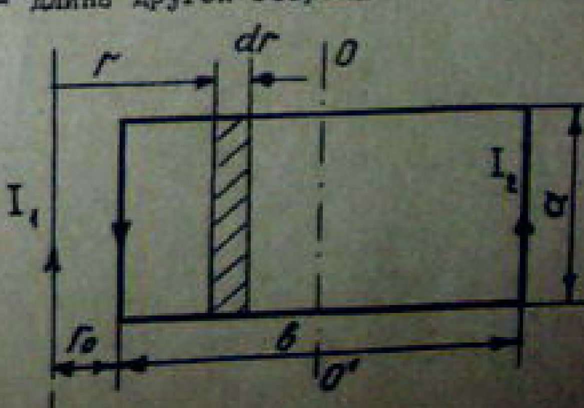

Рис.2.I8

РЕШЕНИЕ. Согласно (2.16), работа определится изменением магнитного потока

$$A = \kappa_2 I_2 \Delta\Phi .$$

Нетрудно видеть, что после поворота на 90^0 магнитный поток через рамку обращается в нуль ($\Phi_2 = 0$), в то время как в первоначальном положении рамки магнитный поток через нее Φ_1 будет максимальным. Необходимо учесть, однако, при определении Φ_1 , что магнитное поле прямого проводника неоднородно:

$$B_1 = \kappa_1 \frac{2I_1}{r} .$$

Было бы неверным вычислять Φ_1 по формуле (2.15) для однородного поля. При вычислении Φ_1 воспользуемся более общим определением магнитного потока (2.14). С этой целью разделим плоскость рамки на столь узкие полосы шириной dr (см.рис.2.18), чтобы магнитное поле в пределах такой полосы можно было бы считать однородным. Тогда можно записать элементарный магнитный поток через эту полоску:

$$d\Phi_1 = B_1 dS = \kappa_1 \frac{2I_1}{r} a\,dr .$$

Суммарный магнитный поток Φ_1 определится после интегрирования:

$$\Phi_1 = \int_{r_0}^{r_0+b} d\Phi_1 = \kappa_1 2I_1 a \int_{r_0}^{r_0+b} \frac{dr}{r} = \kappa_1 2I_1 a \ln\frac{r_0+b}{r_0} =$$

$$= \kappa_1 2I_1 a \ln 11 .$$

Проведем вычисление работы в единицах СИ:

$$A = I_2 \Delta\Phi_2 = I_2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln 11 \approx 4{,}1\cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

ЗАДАЧА 4. Электрон и протон ускоряются электрическим полем напряженностью $E = 3\cdot 10^4$ В/м, действующим на протяжении $\ell = 10$ см. Затем они попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, действующее в плоскости, перпендикулярной электрическому полю. Определить: а) радиус траектории каждой частицы, б) циклические частоты вращения частиц в магнитном поле.

РЕШЕНИЕ. Кинетическая энергия электрона и протона при выходе из электрического поля определяется по формуле

$$E_\kappa = eU = eE\ell \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} = eE\ell .$$

Скорости, с которыми влетают в магнитное поле эти частицы, равны соответственно:

$$v_e = \sqrt{\frac{2eE\ell}{m_e}} ; \quad v_p = \sqrt{\frac{2eE\ell}{m_p}} ,$$

где e - заряд электрона; m_e - масса электрона; m_p - масса протона.

В магнитном поле на движущийся заряд действует сила Лоренца (2.11а). В нашем случае она равна $F_\Lambda = evB$ (в единицах СИ) и является центростремительной силой, т.е.

$$evB = \frac{mv^2}{R} ,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{eB} .$$

Подставляя в эту формулу выражение для v_e и v_p и соответствующие массы m_e и m_p , получим:

$$R_e = \frac{\sqrt{2m_e eE\ell}}{eB} ; \quad R_p = \frac{\sqrt{2m_p eE\ell}}{eB} .$$

После численных подстановок получим

$$R_e = 1{,}8\cdot 10^{-4} \text{ м} ; \quad R_p = 2{,}5\cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Циклические частоты вращения частиц определим из соотношения $\omega = v/R$:

$$\omega_e = \frac{eB}{m_e} = 1{,}64\cdot 10^{11} \frac{\text{рад}}{\text{с}} ;$$

$$\omega_p = \frac{eB}{m_p} = 9{,}5\cdot 10^{7} \frac{\text{рад}}{\text{с}} .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Прямой бесконечный проводник с током $I_1 = 10^4$ А расположен в плоскости квадратной рамки со стороной 1 м и массой 1 кг (рис.2.19). При каком токе I_2 в рамке она будет "висеть" неподвижно в воздухе на расстоянии $r_0 = 1$ м от проводника?

Ответ: $I_2 = 9{,}8 \cdot 10^3$ А.

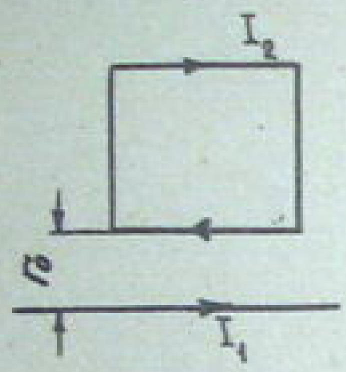

Рис.2.19

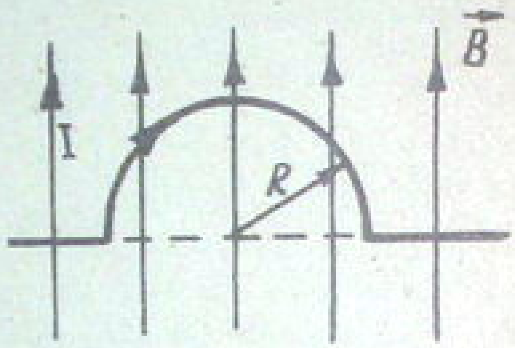

Рис.2.20

2. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной $a = 20$ см текут токи по $I = 10$ А. Определить силу взаимодействия контуров, если расстояние между соответственными сторонами контуров $d = 2$ мм.

Ответ: $F = 8$ мкН.

3. В однородном магнитном поле с индукцией B расположен проводник в форме полукольца радиусом R, по которому течет ток I. Линии индукции $\vec{B}$ параллельны плоскости полукольца (рис.2.20). Определить по величине и направлению силу, действующую на проводник.

Ответ: $F = 2IRB$.

4. В однородном магнитном поле расположен прямолинейный проводник с током длиной ℓ перпендикулярно линиям $\vec{B}$. Как изменится модуль силы, действующей на проводник, если его согнуть: а) под прямым углом в плоскости, параллельной линиям $\vec{B}$; б) под прямым углом в плоскости, перпендикулярной линиям $\vec{B}$; в) в полуокружность в плоскости, параллельной линиям $\vec{B}$?

5. В однородном магнитном поле в плоскости, параллельной линиям индукции, расположена прямоугольная рамка с током (рис.2.21). Сравнить работы, необходимые для поворота рамки на 90^0 вокруг осей OO' и O_1O_1'.

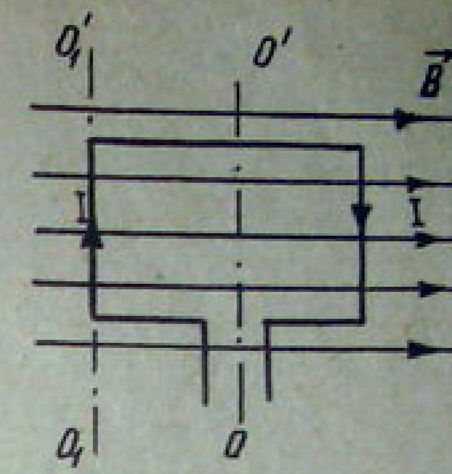

Рис.2.21

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}25$ Тл находится плоская катушка радиусом $R = 25$ см, содержащая $N = 75$ витков. Плоскость катушки составляет угол 60^0 с направлением магнитных силовых линий. Определить вращающий момент, действующий на катушку, если по ее виткам течет ток $I = 8$ А. Какую работу надо совершить, чтобы удалить эту катушку из магнитного поля?

Ответ: $M = 15$ Н·м; $A = 25$ Дж.

7. Два прямолинейных длинных проводника расположены на расстоянии $r_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А в одном и том же направлении. Какую работу на единицу длины проводника надо совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $r_2 = 20$ см?

Ответ: $A = 8{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж/м.

8. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 3000$ В, влетает в магнитное поле соленоида под углом $\alpha = 30^0$ к его оси. Число витков соленоида $N = 5000$, его длина $\ell = 25$ см. По соленоиду течет ток $I = 1$ А. Найти: а) радиус винтовой линии электрона в магнитном поле; б) шаг винтовой линии.

Ответ: а) $R = \dfrac{\ell}{\mu_0 IN}\sqrt{\dfrac{2Um}{e}}\sin\alpha = 4\cdot10^{-3}$ м;

б) $h = \dfrac{2\pi\ell}{\mu_0 IN}\sqrt{\dfrac{2Um}{e}}\cos\alpha = 4\cdot10^{-2}$ м.

9. Вблизи длинного прямого провода, по которому протекает ток $I_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка с током $I_2 = 1$ А (рис.2.22). Рамка и провод лежат в одной плоскости, стороны рамки $a = 68$ см, расстояние $b = 4$ см. Какую

работу надо совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное пунктиром на рис.2.22?

Ответ; $A = 2{,}72 \cdot 10^{-7}$ Дж.

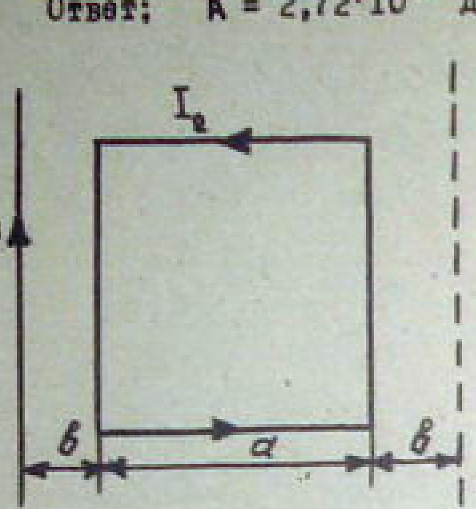

Рис.2.22

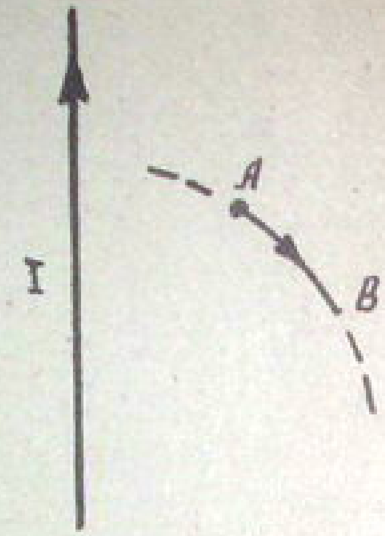

Рис.2.23

10. Вблизи проводника с постоянным током пролетел электрон (рис.2.23). Как изменилась кинетическая энергия электрона на участке траектории AB ?

2.3. Магнитное поле в веществе

Основные соотношения и формулы

Намагниченность вещества характеризуется вектором намагниченности $\vec{I}$, который определяет магнитный момент единицы объема магнетика:

$$\vec{I} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{\Delta N}\vec{P}_{mi}, \qquad (2.17)$$

где ΔN - число частиц в объеме ΔV ; $\vec{P}_{mi}$ - магнитный момент i-й частицы.

Вектор напряженности магнитного поля в веществе определяется равенством

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \text{ - в единицах СИ,}$$
$$(2.18)$$
$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I} \text{ - в системе СГС.}$$

Векторы магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ связаны соотношениями:

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} \text{ - в единицах СИ,}$$
$$(2.19)$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H} \text{ - в системе СГС.}$$

Здесь μ - магнитная проницаемость среды (для вакуума $\mu = 1$):

$$\mu = 1 + \chi \text{ - в единицах СИ,}$$
$$(2.20)$$
$$\mu = 1 + 4\pi\chi \text{ - в системе СГС,}$$

где $\chi = \frac{I}{H}$ - магнитная восприимчивость вещества.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$, подобно (2.4) для вектора $\vec{B}$, запишется в виде:

$$\oint_l H_l\, dl = \sum_i I_i \text{ - в единицах СИ,}$$
$$(2.21)$$
$$\oint_l H_l\, dl = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i \text{ - в системе СГС.}$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. Определить напряженность и индукцию магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей $N = 200$ витков, идет ток $I = 5$ А. Внешний диаметр тороида $d_1 = 30$ см, внутренний - $d_2 = 20$ см.

Линии напряженности магнитного поля тороида - окружности. Во всех точках этих линий напряженность $H = \text{const}$ и вектор $\vec{H}$ перпендикулярен радиусу окружности.

РЕШЕНИЕ. Напишем выражение для циркуляции вектора $\vec{H}$ вдоль некоторой линии напряженности, т.е. в качестве замкнутого контура l (см.формулу (2.21)) возьмем окружность радиусом R . Тогда, очевидно, что

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = H\int_0^{2\pi R} dR = 2\pi R H.$$

Применив теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ (2.21), получим:

$$2\pi R H = \sum_{i=1}^{N} I_i \text{ , или } 2\pi R H = NI,$$

отсюда

$$H=\frac{NI}{2\pi R}.$$

Для средней линии тороида

$$R=\frac{d_1+d_2}{2},$$

поэтому

$$H=\frac{2NI}{\pi(d_1+d_2)}.$$

Магнитная индукция поля равна

$$B=\mu_0H=\frac{2\mu_0NI}{\pi(d_1+d_2)}.$$

Произведем вычисления:

$$H=\frac{2\cdot200\cdot5}{3{,}14(0{,}3+0{,}2)}=1{,}37\cdot10^3\ А/м;$$

$$B=\frac{2\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot200\cdot5}{\pi(0{,}3+0{,}2)}=1{,}6\cdot10^{-3}\ Тл.$$

ЗАДАЧА 2. На железном сердечнике в виде тора диаметром d = 500 мм имеется обмотка с общим числом витков N = 1000. В сердечнике сделан поперечный разрез, в результате чего образовался воздушный зазор шириной l' = I мм. При токе в обмотке I = 0,85 А напряженность поля в зазоре H = = $6{,}0\cdot10^5$ А/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Расстоянием линий магнитной индукции пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Применим теорему о циркуляции вектора $\vec H$, выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида L:

$$\oint_L \vec H d\vec l=\sum_i I_i.$$

Во всех точках контура L, и в сердечнике, и в зазоре $(\vec H\,\hat{,}\,d\vec l)=0$, поэтому $\oint_L \vec H d\vec l=\oint_L Hdl$.

Абсолютные значения напряженностей в сердечнике и в зазоре различны, поэтому интеграл по контуру L надо разбить на два: по части l_1 контура, проходящей внутри сердечника, и по части l_2 – в зазоре, тогда

$$\oint_L Hdl=\oint_{l_1}Hdl=\oint_{l_2}Hdl.$$

Считая напряженность поля внутри сердечника постоянной и равной H_c, внутри зазора – также постоянной и равной $H_в$, получим

$$\oint_{l_1}Hdl+\oint_{l_2}Hdl=H_c(\pi d-l')+H_в l'. \qquad (I)$$

Сумма токов, сцепленных с контуром интегрирования, $\sum_i I_i=NI$. Таким образом, согласно уравнению (I)

$$H_\ell=(\pi d-l')+H_в l'=NI.$$

Напряженность и индукция поля в среде связаны соотношением (2.19):

$$H_c=\frac{B_\ell}{\mu_0\mu}.$$

Отсутствие рассеяния линий индукций обусловливает равенство индукции поля в зазоре и в среде: $B_c=B_в$. Но $B_в=\mu_0H_в$, поэтому справедливо равенство $H_c=H_в/\mu$.

Следовательно:

$$\frac{H_в}{\mu}(\pi d-l')+H_в l'=NI,$$

отсюда

$$\mu=\frac{(\pi d-l')H_в}{NI-l'H}.$$

Вычисления дают μ = 5800.

Задачи для самостоятельного решения

1. В магнитном поле с индукцией $B=2\cdot10^{-5}$ Тл помещен шарик из вольфрама радиусом r = 5 мм. Определить магнитный момент шарика. Магнитная восприимчивость вольфрама χ = = $1{,}76\cdot10^{-4}$.

Ответ: $p_м=2{,}66\cdot10^{-5}\ А\cdot м^2$.

2. В соленоид длиной l = 0,I м, имеющий N = 300 витков, введен железный сердечник. По соленоиду течет ток I = = I А. Найти вектор намагниченности железа внутри соленоида.

если его магнитные свойства выражаются графиком $B = f(H)$ x (см. Б.М.Яворский, А.А.Детлаф. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. Изд.4. М.: Наука, 1968).

Ответ: $I = 1,27 \cdot 10^6$ А/м.

3. Тороид с железным сердечником, длина которого по средней линии $l_1 = 1$ м, имеет воздушный зазор $l_2 = 3$ мм. По обмотке тороида, содержащей $N = 1300$ витков, пропустили ток, в результате чего индукция в зазоре стала $B_2 = 1$ Тл. Определить силу тока x.

Ответ: $I = 2$ А.

4. Замкнутый тороид с железным сердечником имеет $N = 400$ витков из тонкого провода, намотанных в один слой. Средний диаметр тороида $d = 2,5$ см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость μ железа, а также намагниченность I при значениях силы тока в обмотке тороида $I_1 = 0,5$ А и $I_2 = 5$ А.

Ответ: $B_1 = 0,9$ Тл; $B_2 = 1,45$ Тл; $\mu_1 = 2,8 \cdot 10^3$; $\mu_2 = 4,5 \cdot 10^2$; $I_1 = 7,1 \cdot 10^5$ А/м; $I_2 = 1,1 \cdot 10^6$ А/м.

5. Обмотка тонкой тороидальной катушки с железным сердечником состоит из $N = 500$ витков. Средний радиус тороида $r = 8$ см. Найти индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость и намагниченность сердечника, если ток в обмотке $I = 0,5$ А. Зависимость магнитной индукции от напряженности поля для данного сорта железа считать известной.

Ответ: $B = 1,07$ Тл; $\mu = 1,7 \cdot 10^3$; $I = 0,85 \cdot 10^6$ А/м.

6. Длина железного сердечника тороида равна 2,5 м, длина воздушного зазора 1 см. Число витков в обмотке тороида равно 1000. При токе $I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре $B = 1,6$ Тл. Определить магнитную проницаемость железного сердечника при этих условиях (зависимость B от H для данного сорта железа неизвестна).

Ответ: $\mu = 440$.

---

x При решении задач, в которых рассматривают ферромагнетики, зависимость B от H нелинейна, поэтому используют графики $B = f(H)$. Они имеются в задачниках и справочниках по физике.

Воспитовской М.В. 22мн

О Г Л А В Л Е Н И Е