ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА КОРАБЛЕСТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к практическим занятиям

Ленинград 1982

Методические указания предназначены для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов всех факультетов Ленинградского кораблестроительного института по разделу "Электромагнетизм, электромагнитные колебания и волны".

Указания содержат краткие сведения из теории по рассматриваемым разделам, примеры решения задач и задачи, предлагаемые студентам для самостоятельного решения.

ВАСИЛЬЕВ
Борис Петрович

НЕЧИПОРЕНКО
Радия Леонтьевна

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к практическим занятиям

Ответственный редактор канд.физ.-мат.наук Т.Н.Рекашева
Литературный редактор Т.А.Каня

Тип.ЛКИ. Зак.Р-180. Тир.600. Уч.-изд.л.3,0. 31.12.1982.
Бесплатно.

Глава I

Методика решения задач по разделу "ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ"

§ I. Магнитное поле постоянного тока (в вакууме)

I. Закон Био-Савара-Лапласа: вектор индукции магнитного поля, создаваемого в вакууме элементом проводника $\vec{dl}$, по которому течет ток J, равен

$$\vec{dB} = k_1 \frac{J[\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}, \qquad (I.I)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента dl до той точки, в которой определяется индукция поля; k_1 – коэффициент, зависящий от выбора системы измерения единиц, в Гауссовой абсолютной системе единиц (которую мы в дальнейшем будем для краткости именовать системой СГС):

$k_1 = 1/c$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – электродинамическая постоянная, в СИ: $k_1 = \mu_0/4\pi$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Вектор $\vec{dB}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $\vec{dl}$ и точку, в которой вычисляется поле, причем так, что вращение вокруг $\vec{dl}$ в направлении $\vec{dB}$ связано с $\vec{dl}$ правилом "буравчика".

В скалярной форме закон Био-Савара-Лапласа имеет вид:

$$dB = k_1 \frac{J\,dl\,\sin(\vec{dl}, \vec{r})}{r^2}. \qquad (I.Ia)$$

2. Магнитная индукция в любой точке поля, создаваемого проводником с током, равна, в соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей, векторной сумме магнитных индукций $\vec{dB}$, создаваемых в этой точке всеми элементами dl этого проводника:

$$\vec{B} = \int_{l} \vec{dB}, \qquad (I.2)$$

где интегрирование проводится по всей длине проводника l .

3. Индукция магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током конечной длины, в произвольной точке на расстоянии r от него равна

$$B = k_1 \frac{J}{r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) . \qquad (I.3)$$

Обозначения ясны из рис. I.

Из правила "буравчика" следует, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен "к нам" (кружок с точкой).

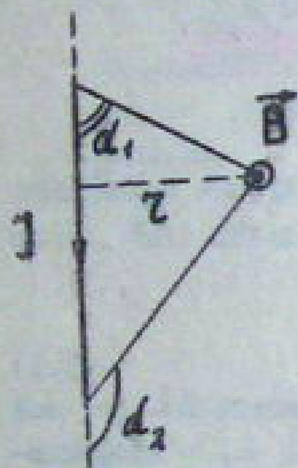


Рис. I

4. Для бесконечно длинного прямолинейного проводника с током:

$$B = k_1 \frac{2J}{r} . \qquad (I.4)$$

5. Магнитная индукция в центре кругового тока:

$$B = k_1 \frac{2\pi J}{R} , \qquad (I.5)$$

где R – радиус кругового контура с током.

6. Магнитная индукция на оси соленоида конечной длины:

$$B = k_1 2\pi n J (\cos\beta_1 - \cos\beta_2) , \qquad (I.6)$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; β_1 и β_2 – углы между осью соленоида и радиусом-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида. Для бесконечно длинного соленоида

$$B = k_1 4\pi n J . \qquad (I.6a)$$

7. Циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ вдоль произвольного замкнутого контура L пропорциональна алгебраической сумме постоянных токов, охваченных контуром:

$$\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = k_1 4\pi \sum_i J_i . \qquad (I.7)$$

8. Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\,^{*)} \qquad (I.8)$$

---

*) В системе СГС μ_0=I, таким образом $\vec{H} = \vec{B}$. Более подробно о векторе напряженности $\vec{H}$ будет сказано в § 3.

Задача I. По двум длинным параллельным проводам, расположенным в вакууме на расстоянии d=30 см друг от друга, текут в противоположных направлениях токи $J_1 = J_2 = 15$ А. Определить индукцию и напряженность магнитного поля в точке r_1=I5 см и r_2=20 см соответственно (рис.2).

Решение

Магнитное поле создано системой токов. Для нахождения магнитной индукции B этого поля в точке О, построим, учитывая правило "буравчика", векторы индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ магнитных полей, создаваемых в точке О токами J_1 и J_2 в отдельности. Вектор $\vec{B}_1 \perp AO$, а вектор $\vec{B}_2 \perp CO$.

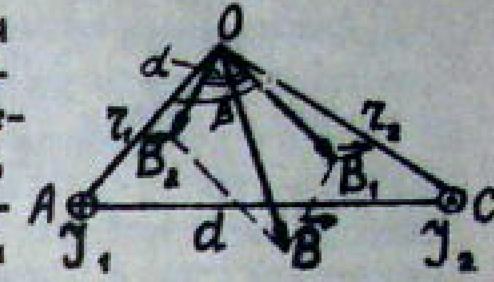


Рис. 2

Согласно принципу суперпозиции полей результирующий вектор $\vec{B}$ является геометрической суммой векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Модуль вектора $\vec{B}$ на основании теоремы косинусов равен

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha} ,$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Значения магнитных индукций B_1 и B_2 находим по формуле (I.4), полагая в ней $k_1 = \mu_0/4\pi$:

$$B_1 = \frac{\mu_0 J_1}{2\pi r_1} ; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 J_2}{2\pi r_2} .$$

Пусть угол между отрезками r_1 и r_2 равен β, тогда должно выполняться равенство: $\alpha + \beta = \pi$.

По теореме косинусов имеем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\beta .$$

Из двух последних соотношений следует

$$\cos\alpha = -\cos\beta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} .$$

Подставляя величины B_1, B_2 и $\cos\alpha$ в формулу для B, получим (при $J_1 = J_2 = J$)

$$B = \frac{\mu_0 J}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\left(\frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}\right)} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{Jd}{r_1 r_2}.$$

Выразим числовые значения всех величин в единицах СИ:

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м, $J = 15$ А, $d = 0{,}30$ м, $r_1 = 0{,}15$ м, $r_2 = 0{,}20$ м.

Вычислим B:

$$B = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot15\cdot0{,}30}{2\pi\cdot0{,}15\cdot0{,}20} = 3\cdot10^{-5}\ \text{Т} = 30\ \text{мкТл}.$$

Напряженность магнитного поля H находим по формуле (I.8):

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{3\cdot10^{-5}}{4\pi\cdot10^{-7}} = 24\ \text{А/м}.$$

З а д а ч а 2. Бесконечно длинный прямой проводник, по которому течет ток $J = 5$ А, согнут под прямым углом (рис.3). Найти индукцию магнитного поля в точках A и C, находящихся на биссектрисе угла, и в точке D на продолжении одной из его сторон. Расстояние от вершины угла до каждой из точек $r_0 = 10$ см.

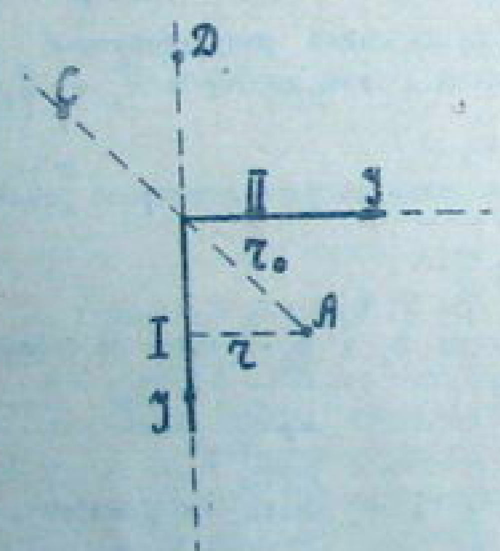


Рис.3

Решение

В каждой из указанных точек магнитная индукция $\vec B$ может быть найдена как векторная сумма магнитных индукций полей, создаваемых токами, текущими по вертикальному (I) и горизонтальному (II) отрезкам провода: $\vec B = \vec B^{I} + \vec B^{II}$.

Воспользуемся формулой (I.3). В единицах СИ величина вектора $\vec B$ равна

$$B = \frac{\mu_0 J}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Рассмотрим сначала точку A: для вертикального отрезка проводника $\alpha_1^{I} = 0$, $\alpha_2^{I} = 135°$; для горизонтального – $\alpha_1^{II} = 45°$, $\alpha_2^{II} = \pi$; $r = r_0\cos 45°$. Подставив значения углов и r в формулу для B, получим

$$B_A^{I} = B_A^{II} = \frac{\mu_0 J}{2\pi r_0\sqrt2}\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right).$$

Векторы $\vec B_A^{I}$ и $\vec B_A^{II}$ направлены перпендикулярно плоскости рисунка, "от нас".

Следовательно, $B_A = B_A^{I} + B_A^{II} = \frac{\mu_0 J}{\pi r_0\sqrt2}\cdot1{,}7 =$

$$= \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot5}{\pi\cdot0{,}10\cdot1{,}4}\cdot1{,}7 = 2{,}4\cdot10^{-5}\ \text{Тл}.$$

В точке C: $\alpha_1^{I} = 0$; $\alpha_2^{I} = 45°$ и $\alpha_1^{II} = 135°$, $\alpha_2^{II} = \pi$;

$$B_C = B_C^{I} + B_C^{II} = \frac{\mu_0 J}{\pi r_0\sqrt2}\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right) = 0{,}4\cdot10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Вектор магнитной индукции в точке C направлен "к нам".

В точке D отрезок I проводника не создает поля, так как эта точка лежит на его продолжении. Магнитное поле в точке D будет создавать только ток, текущий по отрезку проводника II. В этом случае $\alpha_1^{II} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2^{II} = \pi$ и $r = r_0$, а вектор магнитной индукции численно равен

$$B_D = \frac{\mu_0 J}{4\pi r} = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot5}{4\pi\cdot0{,}10} = 0{,}5\cdot10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Направлен вектор $\vec B_D$ "к нам".

З а д а ч а 3. По круговому витку радиуса R = 10 см (рис.4) циркулирует ток I = 1 А. Найти магнитную индукцию B:

а) на оси витка на расстоянии $r_0 = 10$ см от его центра;

б) в центре витка.

Решение

а) Разделим круговой виток на бесконечно малые элементы $d\vec l$. Рассмотрим один такой элемент $d\vec l$ с током I, перпендикулярный плоскости чертежа. В точке C он создает магнитное поле, индукция $d\vec B$ которого определяется с помощью закона Био-Савара-Лапласа (I.I). Поскольку $d\vec l \perp \vec r$, то для величины магнитной индукции dB имеем

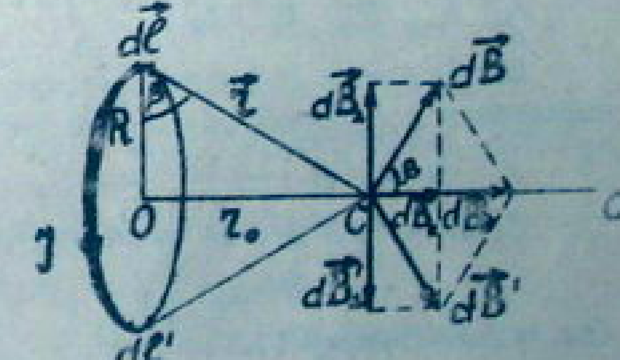


Рис. 4

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{J\,dl}{r^2}. \qquad (I)$$

Вектор $d\vec B$ лежит в плоскости чертежа перпендикулярно радиусу-вектору $\vec r$ и составляет угол β с осью витка. Проекция вектора $d\vec B$ на ось витка равна

$$dB_{\parallel} = dB\cos\beta, \qquad (2)$$

где

$$\cos\beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+r_0^2)^{1/2}}. \qquad (3)$$

Любому элементу $\vec{dl}$ отвечает диаметрально противоположный элемент $\vec{dl'}$, который дает в точке C такую же составляющую на ось OO':

$$\vec{dB'_\parallel} = \vec{dB_\parallel}$$

или

$$dB'_\parallel = dB\cos\beta ,$$

а также перпендикулярную к OO' составляющую $\vec{dB'_\perp} = -\vec{dB_\perp}$. При сложе..ии всех составляющих $dB_\perp$ (интегрировании по всему витку) все они взаимно уничтожатся, в то время как составляющие $dB_\parallel$ будут складываться. Следовательно, результирующее поле $\vec{B}$ будет направлено по оси OO'. Величину вектора $\vec{B}$ можем определить, сложив составляющие $dB_\parallel$ всех элементов контура.

Подставляя (I) и (3) в (2), находим

$$dB_\parallel = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{J\,dl\,R}{(R^2+r_0^2)^{3/2}} .$$

Следовательно;

$$B = \int dB_\parallel = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{JR}{(R^2+r_0^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 J R^2}{2(R^2+r_0^2)^{3/2}} .$$

Подставляя в полученную формулу значения μ_0, J, R и r_0, выраженные в единицах СИ, определим искомую индукцию:

$$B = 4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{1\cdot10^{-2}}{2\cdot2\cdot1{,}4\cdot10^{-3}} = 2{,}3\cdot10^{-6}\ \text{Тл} .$$

б) Если $r_0 = 0$, то из предыдущей формулы следует, что

$$B = \mu_0\,\frac{J}{2R}$$

(см. также формулу (I.5)).

Вычислим магнитную индукцию в центре витка:

$$B = 4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{1}{2\cdot0{,}1} = 6{,}3\cdot10^{-6}\ \text{Тл} .$$

З а д а ч а 4. По проводнику, согнутому в виде квадратной рамки со стороной $a = 10$ см, течет ток $J = 5$ А. Определить индукцию $\vec{B}$ и напряженность магнитного поля H в точке, равноудаленной от вершин квадрата на расстояние, равное его стороне.

Решение

Строим чертеж (рис.5), на котором показан вектор $\vec{B}_1$ – индукция магнитного поля, создаваемого в точке A током, текущим по стороне квадрата CD.

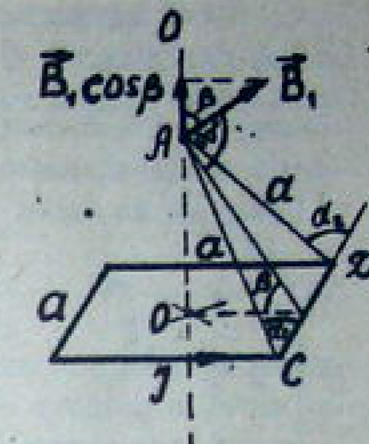


Рис. 5

Искомая индукция $\vec{B}$ магнитного поля в точке A равна

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 ,$$

где $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ – индукции магнитных полей, создаваемых в точке A токами, текущими по остальным трем сторонам квадрата (на рисунке эти векторы не показаны).

Вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси OO и по модулю равен

$$B = 4B_1\cos\beta .$$

Из чертежа ясно, что $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$, тогда

$$B = \frac{4}{\sqrt{3}}B_1 .$$

Полагая в формуле (I.3) $k = \mu_0/4\pi$, получим для B_1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 J}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) .$$

Из рис. 5 видим, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$. Следовательно, $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$.

Таким образом, формула для B_1 приобретает вид:

$$B_1 = \frac{\mu_0 J}{4\pi r}\,2\cos\alpha_1 = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}\cos\alpha_1 ,$$

и так как $\alpha_1 = 60^\circ$, а $r = (\sqrt{3}/2)a$, то очевидно, что

$$B = \frac{2\mu_0 J}{3\pi a} .$$

Подставляя известные величины, вычислим искомую индукцию B:

$$B = \frac{2\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot5}{3\pi\cdot0{,}1} = 1{,}33\cdot10^{-5}\ \text{Тл} .$$

Напряженность магнитного поля H в точке A равна:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2J}{3\pi a} = \frac{2\cdot5}{3\cdot3{,}14\cdot0{,}1} = 10\ \text{А/м} .$$

З а д а ч а 5. Бесконечно длинный прямой провод с током $J_1 = 2$ А расположен параллельно плоскости кругового витка радиуса $R = 4$ м с током $J_2 = 5$ А. Прямой провод и ось круготого витка пересекаются в точке O_1, отстоящей от центра ватого витка на расстоянии $d=4$ м (рис.6). Определить напряженность магнитного поля в точке O_2, если $OO_2 = O_1O_2$.

Решение

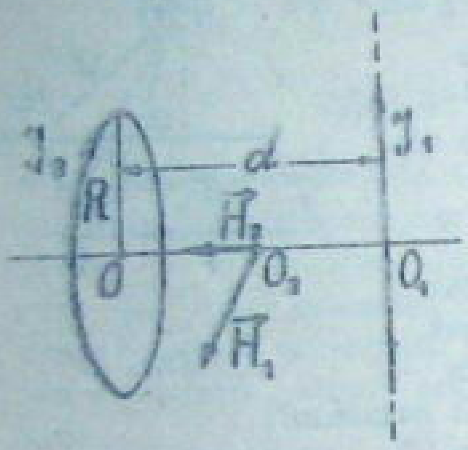


Рис. 6

Пользуясь правилом "буравчика", строим в точке O_2 векторы: $\vec H_1$ – вектор напряженности магнитного поля, создаваемого током J_1, и $\vec H_2$ – вектор напряженности магнитного поля, создаваемого током J_2.

Абсолютные значения этих векторов определяем по формулам:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{J_1}{2\pi \frac{d}{2}};$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{J_2 R^2}{2\left[R^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}$$

(см. решение задачи 3).

Результирующий вектор напряженности в точке O_2 равен

$$\vec H = \vec H_1 + \vec H_2 .$$

Так как векторы $\vec H_1$ и $\vec H_2$ взаимно перпендикулярны, то модуль вектора $\vec H$ будет равен

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{J_1}{\pi d}\right)^2 + \left(\frac{J_2 R^2}{2\left[R^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}\right)^2} .$$

Производя вычисления в единицах СИ, получим:

$$H \simeq 47 \text{ А/м} .$$

З а д а ч а 6. По проводнику, согнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности равна 20 А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить напряженность магнитного поля в точке пересечения диагоналей этого квадрата.

Решение

Обозначим через R радиус окружности, а через a – сторону квадрата.

Напряженность магнитного поля в центре окружности выражается формулой

$$H_0 = \frac{J}{2R} .$$

Отсюда находим

$$R = \frac{J}{2H_0} .$$

Длина окружности $l = 2\pi R$, сторона квадрата

$$a = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi J}{4 \cdot 2H_0} = \frac{\pi J}{4H_0} .$$

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей напряженность $H_\square$ поля квадратного витка равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой стороной квадрата в отдельности:

$$\vec H_\square = \vec H_1 + \vec H_2 + \vec H_3 + \vec H_4 . \qquad (I)$$

В точке пересечения диагоналей квадрата все векторы напряженности будут направлены перпендикулярно плоскости витка в одну сторону. Из соображений симметрии следует, что абсолютные значения этих векторов одинаковы, т.е. $H_1 = H_2 = H_3 = H_4$. Это позволяет геометрическую сумму (I) заменить алгебраической суммой: $H_\square = 4H_1$ или $H_\square = 4\frac{J}{4\pi\frac{a}{2}}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{8H_0}{\pi^2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$, где $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$.

Следовательно:

$$H_\square = \frac{8H_0}{\pi^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}H_0 = \frac{8\cdot 1{,}4\cdot 20}{10} = 22 \text{ А/м} .$$

З а д а ч а 7. К тонкому однородному проволочному кольцу радиусом R подводят ток $J = 2$ А в направлении, указанном стрелками. Найти индукцию магнитного поля в центре кольца, если подводящие провода, делящие кольцо на две дуги l_1 и l_2, расположены радиально и имеют бесконечную длину (рис.7).

Решение

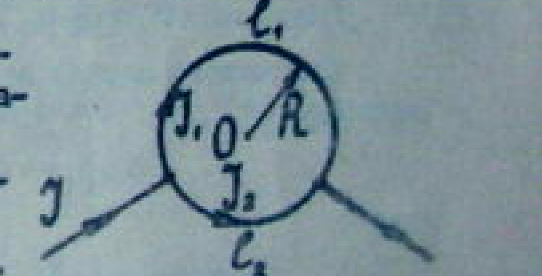


Рис.7

Вследствие радиального расположения подводящие провода не будут создавать поля в центре кольца, а условие "бесконечной длины" позволяет пренебречь полем, создаваемым той частью провода, которая подходит к источнику. Поэтому магнитная индукция $\vec B$ в точке O равна $\vec B = \vec B_1 + \vec B_2$, где $\vec B_1$ – вектор индукции магнитного поля, создаваемого в точке O током J_1, текущим по дуге l_1; $\vec B_2$ – вектор индукции магнитного поля, создаваемого в точке O током J_2, текущим по дуге l_2.

Используя правило "буравчика", получаем абсолютное значение для магнитной индукции B:

$$B = B_1 - B_2 .$$

Для нахождения величин B_1 и B_2 применим закон Био-Савара-Лапласа. Проинтегрировав выражение (I.Ia) по l_1 и l_2 и учитывая, что для любого элемента dl кольца угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ равен $\pi/2$ и $r = R$, получим:

$$B_1 = \frac{\mu_0 J_1 l_1}{4\pi R^2}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 J_2 l_2}{4\pi R^2}.$$

Тогда выражение для искомой индукции будет иметь вид:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}\left(J_1 l_1 - J_2 l_2\right).$$

Токи J_1 и J_2 параллельны и, следовательно, обратно пропорциональны сопротивлениям дуг, т.е. обратно пропорциональны их длинам: $J_1/J_2 = l_2/l_1$. Отсюда $J_1 l_1 = J_2 l_2$ и, следовательно, $B = 0$.

Задача 8. Чему должно быть равно отношение длины соленоида l к его диаметру D, чтобы индукцию магнитного поля в центре длинного соленоида можно было найти по формуле для бесконечно длинного соленоида? Ошибка расчета не должна превышать 5 %.

Решение

Магнитная индукция B_1 соленоида конечной длины равна

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 J n\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right).$$

Для нашего случая индукции магнитного поля в центре соленоида

$$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + D^2}}$$

или

$$\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2/l^2}} = 1 - \frac{D^2}{2l^2};$$

при этом полагается, что $D^2/l^2 << 1$.

Следовательно, $B_1 = \mu_0 J n\left(1 - D^2/2l^2\right)$.

Магнитная индукция в центре бесконечно длинного соленоида равна $B_2 = \mu_0 J n$. По условию задачи относительная ошибка, сделанная при определении B по этой формуле, не должна превышать 5%, т.е.

$$\delta B = \frac{B_2 - B_1}{B_2} \le 0{,}05.$$

Подставляя сюда выражения для B_1 и B_2, получим

$$D^2/2l^2 < 0{,}05.$$

Отсюда

$$l/D > 3.$$

Задача 9. Коаксиальный кабель представляет собой длинную металлическую тонкостенную трубку радиусом $R = 10$ мм, вдоль оси которой расположен тонкий провод. Силы токов в трубке и проводе равны, направления противоположны. Определить магнитную индукцию в точках I и 2 (рис. 8), удаленных соответственно на расстояния $r_1 = 5{,}0$ мм и $r_2 = 15$ мм от оси кабеля, если сила тока $J = 0{,}50$ А.

Решение

Линии индукции магнитного поля тока кабеля имеют форму окружностей, центры которых лежат на оси кабеля и плоскости которых перпендикулярны этой оси. Во всех точках одной и той же линии индукции величина B одинакова. Поэтому целесообразно применить формулу (I.7), используя в качестве контура интегрирования линию индукции.

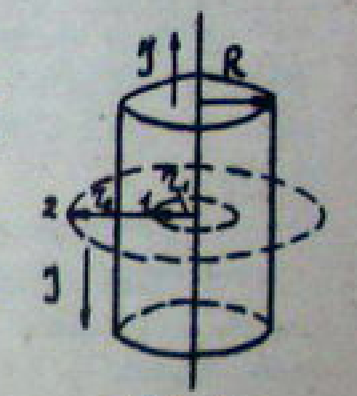


Рис. 8

Пусть в качестве контура интегрирования выбрана линия индукции, проходящая через точку I. Тогда, учитывая, что для всех элементов dl этой линии $\cos(\vec{B}_1, d\vec{l}) = I$, можем записать

$$\oint \vec{B}_1 d\vec{l} = \oint B_1 \cos(\vec{B}_1, d\vec{l})\, dl = B_1 \oint dl = 2\pi r_1 B_1 = \mu_0 J,$$

откуда

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{J}{r_1}.$$

Подставив числовые значения величин и произведя вычисления, получим $B_1 = 2{,}0\cdot 10^{-5}$ Т. Аналогично найдем формулу для величины B_2. Для этого в качестве контура интегрирования возьмем линию индукции, проходящую через точку 2. Поскольку контур интегрирования охватывает два тока, равных по модулю, но противоположно направленных, то

$$\oint \vec{B}_2 d\vec{l} = \oint B_2 \cos(\vec{B}_2, d\vec{l})\, dl = B_2 \oint dl = 2\pi r_2 B_2 = \mu_0 (I - I) = 0,$$

откуда $B_2 = 0$.

§ 2. Действие магнитного поля на токи и заряды (в вакууме)

I. Закон Ампера: сила, действующая на элемент проводника $\vec{dl}$ с током I, помещенного в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (сила Ампера), равна:

$$d\vec{F} = k_2 I[\vec{dl}\,\vec{B}], \qquad (I.9)$$

или

$$dF = k_2 I\,dl\,B\sin(\widehat{\vec{dl},\vec{B}}), \qquad (I.9а)$$

где k_2 – коэффициент, зависящий от выбора системы единиц; $k_2 = 1$ в СИ; $k_2 = \frac{1}{c}$ в СГС.

2. Сила взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок l проводника, равна

$$F = k_1 k_2 \frac{2 I_1 I_2 l}{d}. \qquad (I.I0)$$

3. Сила, действующая на электрический заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B (магнитная сила Лоренца):

$$\vec{F}_{Л(м)} = k_2 q[\vec{v}\,\vec{B}], \qquad (I.II)$$

или в скалярной форме:

$$F_{Л(м)} = k_2 q v B \sin\alpha(\widehat{\vec{v},\vec{B}}). \qquad (I.IIа)$$

Полная сила Лоренца:

$$\vec{F}_Л = q\vec{E} + k_2 q[\vec{v}\,\vec{B}]. \qquad (I.IIб)$$

4. ЭДС Холла, возникающая на гранях проводящей пластины, вдоль которой идет ток, если ее поместить в поперечное магнитное поле, равна

$$\mathcal{E}_H = k_2 \frac{1}{ne}\frac{IB}{d} \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_H = k_2 R_H \frac{IB}{d}, \qquad (I.I2)$$

где B – индукции магнитного поля; d – толщина пластины; n – концентрация носителей тока; e – заряд электрона; $R_H = \frac{1}{ne}$ – носит название постоянной Холла.

5. На контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B, действует механический момент:

$$\vec{M} = [\vec{p}_м\,\vec{B}] \qquad (I.I3)$$

или

$$M = p_м B\sin(\widehat{\vec{p}_м,\vec{B}}), \qquad (I.I3а)$$

где

$$p_м = IS \qquad (I.I3б)$$

– магнитный момент контура с током.

6. Поток вектора индукции B (магнитный поток) сквозь поверхность S в произвольном магнитном поле:

$$\Phi = \int_S B_n\,dS, \qquad (I.I4)$$

где B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к элементарной площадке dS. В случае однородного магнитного поля магнитный поток равен

$$\Phi = BS\cos(\widehat{\vec{B},\vec{n}}), \quad \text{или} \quad \Phi = B_n S. \qquad (I.I4а)$$

7. Работа силы Ампера по перемещению замкнутого контура (или проводника) с током I в магнитном поле равна

$$A = k_2 I\Delta\Phi, \qquad (I.I5)$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром (или число линий индукции, пересекаемое проводником при его движении).

Решение задач

З а д а ч а I. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой IOO А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии a, равном ее длине (рис. 9).

Решение

Индукция магнитного поля, создаваемого током в I в пространстве, окружающем проводник в СИ равна $B = \mu_0 I/2\pi r$, где r – расстояние от рассматриваемой точки до проводника. Вектор индукции поля $\vec{B}$ во всех точках, лежащих справа от проводника, направлен перпендикулярно плоскости рисунка "от нас". В точках поля, где находятся стороны рамки I и 3, $B = const$. На эти стороны действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ (см. рис. 9).

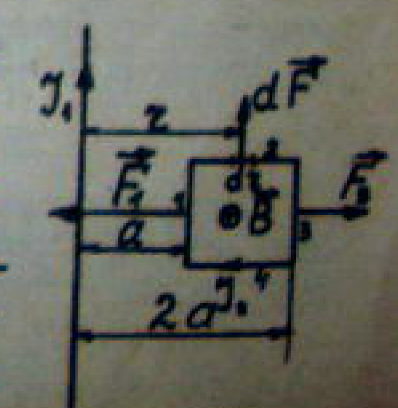


Рис. 9

которые, в соответствии с законом Ампера (I.9), равны в СИ:

$$F_1 = J_2 a B_1 \quad и \quad F_3 = J_2 a B_3 ,$$

здесь B_1 и B_3 – значения магнитной индукции в точках, расположенных на расстоянии a и $2a$ от прямого проводника. Направления сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ показаны на рисунке.

В местах расположения сторон 2 и 4 магнитная индукция

$$B \neq const .$$

Сила, действующая на элементарный участок dr стороны 2 равна $dF = J_2 dr B$. Можно показать, что силы, действующие на стороны 2 и 4 рамки, определяемые по формуле $F_{24} = \int dF$, равны по абсолютной величине и противоположны по направлению.

Таким образом, искомая сила, действующая на рамку, равна

$$\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 .$$

По модулю результирующая сила равна

$$F = F_1 - F_3 .$$

Подставив в эту формулу выражения для F_1 и F_3 и учитывая, что $B_1 = \frac{\mu_0 J_1}{2\pi a}$, а $B_3 = \frac{\mu_0 J_1}{4\pi a}$, получим:

$$F = \frac{\mu_0 J_1 J_2 a}{2\pi a}(1-1/2) = \frac{\mu_0 J_1 J_2}{4\pi} .$$

Вычисляем F:

$$F = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^{2}\cdot10^{2}}{4\pi} = 10^{-3}\ Н .$$

З а д а ч а 2. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $J_1 = 20$ А и $J_2 = 30$ А в одном и том же направлении. Какую работу надо совершить, чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d_2 = 20$ см ? (Расчет произвести на единицу длины проводников).

Решение

Элементарная работа $dA = F dx$, где F – сила взаимодействия двух проводников, определяемая формулой (I.10); dx – элементарное перемещение.

Полная работа в единицах СИ равна:

$$A = \int F dx = \int_{d_1}^{d_2} \mu_0 \frac{J_1 J_2 \ell}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 J_1 J_2 \ell}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1} .$$

Работа на единицу длины проводников:

$$A' = \frac{A}{\ell} = \frac{\mu_0 J_1 J_2}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1} ;$$

$$A' = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot20\cdot30}{2\pi} \ln 2 = 8{,}3\cdot10^{-5}\ \frac{Дж}{м} .$$

З а д а ч а 3. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом $R = 10$ см, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл. По проводнику течет ток $J = 10$ А. Найти силу F, действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля (рис.10).

Решение

Рассмотрим элемент полукольца $d\ell$. Сила, действующая на него со стороны магнитного поля, в единицах СИ равна (см.I.9)

$$d\vec{F} = J[d\vec{\ell}\,\vec{B}]$$

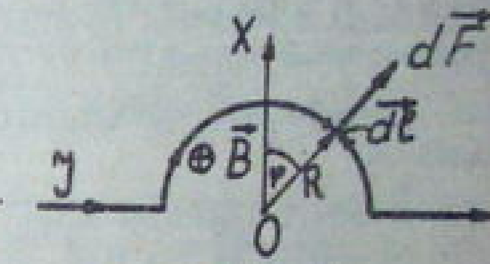


Рис. 10

Сила $d\vec{F}$ направлена вдоль радиуса полукольца R от точки O. По модулю она равна $dF = J d\ell B$. Результирующая сила F, действующая на все элементы полукольца, направлена вдоль оси симметрии, которой является ось OX. Для нахождения ее величины просуммируем проекции всех элементарных сил на эту ось:

$$F = \int dF_x = \int dF \cos\varphi = \int J d\ell B \cos\varphi .$$

Но $d\ell = R d\varphi$, следовательно,

$$F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} JRB\cos\varphi\, d\varphi = JBR\sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2JRB ; \quad F = 2JRB .$$

Подставив в формулу значения входящих в нее величин, получим:

$$F = 2\cdot10\cdot0{,}1\cdot50\cdot10^{-3} = 0{,}1\ Н .$$

З а д а ч а 4. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}25$ Тл находится плоская катушка радиусом $R = 25$ см, в которой $N = 75$ витков. Плоскость катушки составляет угол $\beta = 60°$ с направлением магнитных силовых линий (рис.II). Определить вращающий момент, действующий на катушку, если по ее виткам идет ток $J = 8$ А. Какую работу надо совершить, чтобы удалить эту катушку из магнитного поля?

Решение

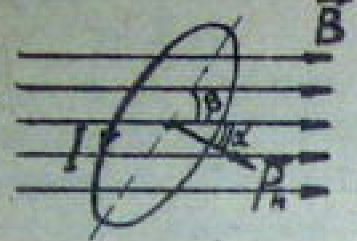


Рис. II

Применим формулу (I.13а). В случае катушки вращающий момент M будет равен $M=Np_M B\sin\alpha$, где p_M – магнитный момент, действующий на один виток катушки с током: $p_M=J\cdot S$ (здесь $S=\pi R^2$ – площадь витка) см.(I.13б) ; $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$.

Итак, $M=NJ\pi R^2 B\sin(\pi/2-\beta)$. Искомая работа равна $A=NJ(\Phi_1-\Phi_2)$, где $\Phi_1=BS\cos\alpha$ – магнитный поток, пронизывающий один виток катушки; $\Phi_2=0$. Поэтому $A=NJ\Phi_1$ или $A=NJB\pi R^2\cos(\pi/2-\beta)$. Произведем вычисления в единицах СИ:

$$M=75\cdot0{,}8\cdot3{,}14\cdot0{,}25^2\cdot0{,}25\cdot0{,}5=15\ Н\cdot м\ ;$$

$$A=75\cdot0{,}8\cdot0{,}25\cdot3{,}14\cdot0{,}25^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx25\ Дж.$$

З а д а ч а 5. В центре длинного соленоида, имеющего $n=5000$ витков на метр, помещена укрепленная на конце коромысла рычажных весов небольшая катушка с общим числом витков $N=200$ (рис.12). Ось катушки перпендикулярна оси соленоида. Диаметр витков катушки $d=10{,}0$ мм. Катушка уравновешена гирьками, установленными на чашке весов. При пропускании по соленоиду и катушке тока равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз p нужно поместить на чашку весов для того, чтобы восстановить равновесие в том случае, когда через соленоид и катушку идет одинаковый ток $J=20{,}0$ мА ? Плечо коромысла имеет длину $l=300$ мм.

Решение

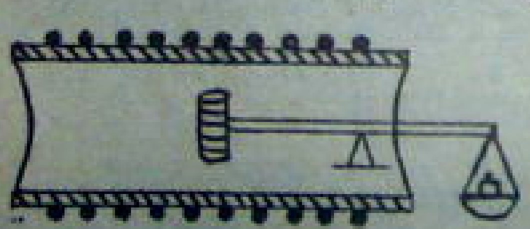


Рис. 12

Условием равновесия коромысла весов является равенство моментов, действующих на его левое и правое плечо. При пропускании тока через соленоид и катушку это условие будет иметь следующий вид:

$$p_K l+M=(p_K+p)l\ ,$$

где p_K – вес катушки; M – механический момент, действующий на катушку в магнитном поле соленоида. Момент M равен $M=p_M B\sin\alpha$, здесь $p_M=NJS=NJ\frac{\pi d^2}{4}$; $B=\mu_0 J n$; $\sin\alpha=1$.

Следовательно;

$$p_K l+\frac{NJ^2\pi d^2\mu_0 n}{4}=(p_K+p)l\ .$$

Решая уравнение относительно p, получим

$$p=\frac{\pi\mu_0 d^2 n NJ^2}{4l}\ .$$

Подставим в это выражение числовые значения и вычислим p:

$$p=\frac{3{,}14\cdot4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot10^{-4}\cdot500\cdot200\cdot4\cdot10^{-4}}{4\cdot0{,}3}=1{,}3\cdot10^{-8}\ Н\ .$$

З а д а ч а 6. Электрон и протон ускоряются электрическим полем напряженностью $E=3\cdot10^4$ В/м, действующим на протяжении $l=10$ см. Затем они попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл, действующее в плоскости, перпендикулярной электрическому полю. Определить:

а) радиус траектории каждой частицы;

б) циклические частоты вращения частиц в магнитном поле.

Решение

Кинетическая энергия электрона и протона при выходе из электрического поля определяется по формуле:

$$E_к=eU=eEl\quad;\ или\quad \frac{mv^2}{2}=eEl\ .$$

Скорости, с которыми влетают в магнитное поле эти частицы, равны соответственно

$$v_e=\sqrt{\frac{2eEl}{m_e}}\ ;\qquad v_p=\sqrt{\frac{2eEl}{m_p}}\ ,$$

где e – заряд электрона; m_e – масса электрона; m_p – масса протона.

В магнитном поле на движущийся заряд действует сила Лоренца (I.11а). В нашем случае она равна $F_л=evB$ (в СИ) и является центростремительной силой, т.е.

$$evB=\frac{mv^2}{R}\ .$$

Отсюда $R = \frac{mv}{eB}$. Если в эту формулу подставить полученные выражения для v_e и v_p, а также соответствующие массы m_e и m_p, то получим:

$$R_e = \frac{\sqrt{2m_e eEl}}{eB}; \qquad R_p = \frac{\sqrt{2m_p eEl}}{eB}.$$

Вычислим радиус траектории электрона R_e и радиус траектории протона R_p:

$$R_e = \frac{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{4}\cdot 0{,}1}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 18\cdot 10^{-5}\ м;$$

$$R_p = \frac{\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{4}\cdot 0{,}1}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 25\cdot 10^{-3}\ м.$$

Циклические частоты вращения частиц определим, воспользовавшись соотношением $\omega = \frac{v}{R}$. Подставим в эту формулу выражение для R:

$$\omega = \frac{veB}{mv} = \frac{eB}{m}.$$

В результате вычислений получим:

$$\omega_e = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 1{,}64\cdot 10^{11}\ рад/с;$$

$$\omega_p = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1}{1{,}67\cdot 10^{-27}} = 9{,}5\cdot 10^{7}\ рад/с.$$

З а д а ч а 7. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 3000$ В, влетает в магнитное поле соленоида под углом $\alpha = 30°$ к его оси. Число витков соленоида $N = 5000$, его длина $l = 25$ см. По соленоиду идет ток $J = 1$ А. Найти:

а) радиус винтовой линии электрона в магнитном поле;

б) шаг винтовой линии.

Решение

Электрон влияет на магнитное поле соленоида со скоростью $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, где e – заряд электрона, m – его масса. Разложим вектор скорости $\vec{v}$ на составляющие $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. I3).

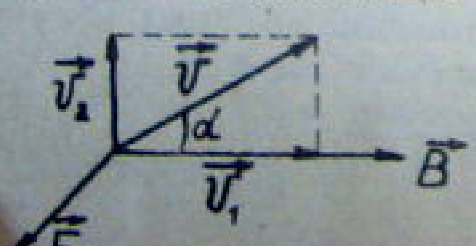


Рис. I3

Благодаря наличию составляющей скорости $\vec{v}_2$, на электрон действует сила Лоренца, которая заставляет его двигаться по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Радиус этой окружности определяется условием $\frac{mv_2^2}{R} = ev_2B$, т.к. сила Лоренца в данном случае является центростремительной силой. Отсюда

$$R = \frac{mv_2}{eB} = \frac{mv\sin\alpha}{eB}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для v, а также учитывая, что $B = \mu_0 Jn = \mu_0 J\frac{N}{l}$, получим:

$$R = \frac{l}{\mu_0 JN}\sqrt{\frac{2Um}{e}}\sin\alpha.$$

Вдоль направления вектора $\vec{B}$ сила не действует, поэтому электрон движется в этом направлении равномерно со скоростью $v_1 = v\cos\alpha$. В результате сложения двух движений частица движется по винтовой линии радиусом R и с шагом h. $h = v_1 T$, где T – период обращения электрона по окружности, он равен $T = \frac{2\pi R}{v_2}$.

Окончательно получим для h выражение:

$$h = \frac{2\pi m v\cos\alpha}{eB} = \frac{2\pi l}{\mu_0 JN}\sqrt{\frac{2Um}{e}}\cos\alpha.$$

Вычисления дают следующие значения:

$$R = \frac{0{,}25}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{3}}\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 10^{3}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}}\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot 10^{-3}\ м,$$

$$h = \frac{2\pi\cdot 0{,}25}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{3}}\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 10^{3}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}}\cdot 0{,}85 = 4\cdot 10^{-2}\ м.$$

З а д а ч а 8. Пластина полупроводника толщиной $d = 0{,}2$ мм помещена в магнитное поле, направленное вдоль d. Удельное сопротивление полупроводника $\rho = 10^{-5}$ Ом·м, индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Перпендикулярно полю вдоль пластины пропускают ток $J = 0{,}1$ А. При этом возникает поперечная разность потенциалов $U = 3{,}25\cdot 10^{-3}$ В. Определить подвижность носителей тока в полупроводнике (рис. I4).

Решение

Поперечная разность потенциалов U возникает на гранях пластины полупроводника, благодаря эффекту Холла. Поэтому, в соответствии с выражением (I.I2), она равна в СИ:

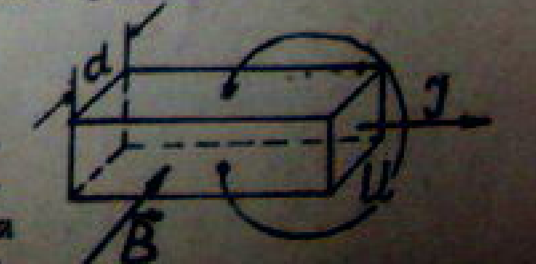


Рис. I4

$U = \mathcal{E}_H = \frac{1}{ne}\frac{JB}{d}$. Известно, что $\frac{1}{\rho} = neu$, где n – концентрация носителей тока; e – их заряд, u – подвижность. Отсюда $u = \frac{1}{\rho}\frac{1}{ne}$. Но $\frac{1}{ne} = \frac{\mathcal{E}_H \cdot d}{JB}$, следовательно,

$$u = \frac{1}{\rho}\frac{\mathcal{E}_H \cdot d}{JB} = \frac{3{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}}{10^{-5}\cdot 0{,}1\cdot 1} = 0{,}65\ \text{м}^2/\text{В}\cdot\text{с}.$$

З а д а ч а 9. Однородные электрическое ($E = 1000$ В/м) и магнитное ($H = 1000$ А/м) поля совпадают по направлению. Определить нормальное и тангенциальное ускорения электрона в момент влета его в эти поля со скоростью $v_0 = 8\cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ в двух случаях: I) скорость электрона совпадает с направлением полей (рис.I5); 2) скорость электрона перпендикулярна направлению полей (рис.I6).

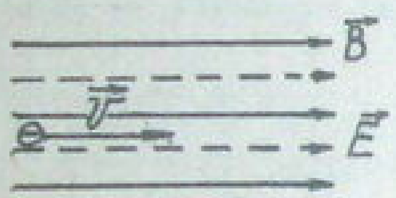


Рис. I5

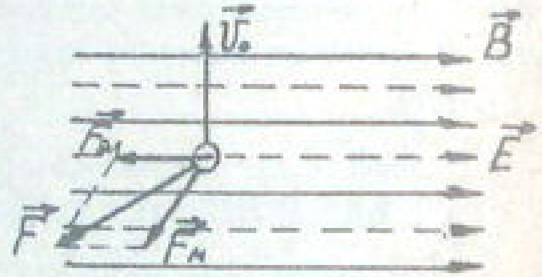


Рис. I6

Решение

I. В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила, которая сообщает ему ускорение, направленное противоположно вектору $\vec{E}$ и определяемое по формуле:

$$\vec{a}_\tau = -\frac{\vec{F}_{эл}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}.$$

Так как электрон влетает в магнитное поле вдоль линий индукции, то на него магнитная сила не действует. Следовательно, $a = a_\tau$ и $a_n = 0$. Произведем вычисления в единицах СИ:

$$a_\tau = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^3}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 1{,}76\cdot 10^{14}\ \text{м/с}^2.$$

2. Результирующая сила, действующая на электрон, равна $\vec{F} = \vec{F}_{эл} + \vec{F}_м$ (рис.I6) Так как $\vec{F}_{эл} \perp \vec{v}_0$ и $\vec{F}_м \perp \vec{v}_0$, то $\vec{F} \perp \vec{v}_0$ и, следовательно, $\vec{a} = \vec{F}/m$ и $\vec{a} \perp \vec{v}_0$. Вектор полного ускорения $\vec{a}$ перпендикулярен скорости $\vec{v}_0$, поэтому он не имеет касательной составляющей, т.е. $\vec{a}_\tau = 0$.

Таким образом,

$$a = a_n = \frac{F}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{(eE)^2 + (ev_0B)^2}.$$

Подставляя в это выражение числовые значения входящих в него величин (полагаем $B = \mu_0 H$), получим

$$a_n = \frac{1}{9{,}1\cdot 10^{-31}}\sqrt{(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^3)^2 + (1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 8\cdot 10^5\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^3)^2} = 2{,}5\cdot 10^{14}\ \text{м/с}^2.$$

З а д а ч а I0. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток $J = 1$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной $b = 6$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон $r_0 = 1$ см. Меньшая сторона рамки $a = 4$ см (рис.I7). Каков магнитный поток Φ, пронизывающий рамку?

Решение

Рамка находится в неоднородном магнитном поле, созданном током I. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля в точках, расположенных справа от проводника, т.е. в пространстве, где находится рамка, перпендикулярен плоскости рисунка и направлен "к нам". Разобьем поверхность, ограниченную рамкой, на элементарные полоски (параллельные прямому проводу) длиной b и шириной dr (см.рис.I7).

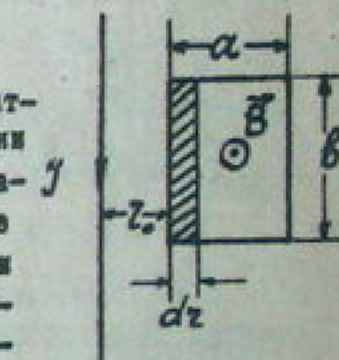


Рис. I7

Магнитный ток через такую полоску находим по формуле

$$d\Phi = B_n dS.$$

В данном случае

$$B_n = B = \mu_0 \frac{J}{2\pi r}, \qquad dS = b\,dr.$$

Полный поток магнитной индукции Φ сквозь рамку определяем по формуле (I.I4):

$$\Phi = \int_S B_n\, dS = \mu_0 \frac{Jb}{2\pi}\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 J b}{2\pi}\ln\frac{r_0+a}{r_0}.$$

Вычисления:

$$\Phi = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 0{,}06}{2\pi}\ln\frac{0{,}05}{0{,}01} =$$

$$= 12 \cdot 10^{-9} \ln 5 = 19,3 \cdot 10^{-9} \text{ Вб} .$$

§ 3. Магнитное поле в веществе

1. Вектор намагничения (намагниченность) $\vec{J}$ численно равен магнитному моменту единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{Mi} , \qquad (I.16)$$

где N – число частиц в объеме V ; p_{Mi} – магнитный момент i – й частицы.

2. Вектором напряженности $\vec{H}$ магнитного поля называется величина, определяемая равенствами *:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad \text{– в единицах СИ;} \qquad (I.17)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{J} \quad \text{в системе СГС,} \qquad (I.17a)$$

где $\vec{B}$ –вектор магнитной индукции поля в среде.

3. Магнитная восприимчивость вещества

$$\chi = \frac{J}{H} . \qquad (I.18)$$

4. Векторы магнитной индукции $\vec{B}$ и напряженности $\vec{H}$ связаны соотношениями:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{– в СИ;} \qquad (I.19)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{– в СГС,} \qquad (I.19a)$$

где μ – магнитная проницаемость среды (для вакуума $\mu = 1$).

5. Связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ :

$$\mu = 1 + \chi \quad \text{в СИ ;} \qquad (I.20)$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad \text{в системе СГС} \qquad (I.20a)$$

6. Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$: циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ вдоль произвольного замкнутого контура L равна алгебраической сумме постоянных токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i J_i \quad \text{в СИ;} \qquad (I.21)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_i J_i \quad \text{в системе СГС.} \qquad (I.21a)$$

* Чтобы не вводить новых коэффициентов для характеристик магнитного поля, будем записывать их в СИ и системе СГС.

Задача 1. В магнитном поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл помещен шарик из вольфрама радиусом $r = 5$ мм. Определить магнитный момент шарика. Магнитная восприимчивость вольфрама $\chi = 1,76 \cdot 10^{-4}$.

Решение

Согласно определению вектора намагничения $\vec{J}$ (I.16) магнитный момент тела в магнитном поле равен

$$p_M = \sum_{i=1}^{N} p_{Mi} = JV . \qquad (1)$$

Учитывая формулы (I.18) – (I.20), получим

$$J = \chi H = \chi \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{\chi B}{\mu_0 (1+\chi)} .$$

Подставляя это выражение и соотношение $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (объем шарика) в формулу (1), получим

$$p_M = \frac{\chi B}{\mu_0 (1+\chi)} \frac{4}{3} \pi r^3 = 2,66 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot \text{м}^2 .$$

Задача 2. Определить напряженность и индукцию магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей $N = 200$ витков, идет ток $J = 5$ А. Внешний диаметр тороида $d_1 = 30$ см, внутренний – $d_2 = 20$ см .

Решение

Линии напряженности магнитного поля тороида–окружности. Во всех точках линии напряженности $H = const$ и вектор $\vec{H}$ перпендикулярен радиусу окружности.

Напишем выражение для циркуляции вектора $\vec{H}$ вдоль некоторой линии напряженности, т.е. в качестве замкнутого контура L (см.формулу I.21) возьмем окружность радиуса R . Тогда, очевидно, что

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \int_0^{2\pi R} dl = 2\pi R H .$$

Применяя теорему о циркуляции вектора $\vec{J}$ (I.21), получим:

$$2\pi R H = \sum_{i=1}^{N} J_i \quad \text{или} \quad 2\pi R H = NJ .$$

Отсюда

$$H = \frac{NJ}{2\pi R} .$$

Для средней линии тороида
$$R = \frac{d_1 + d_2}{4},$$
поэтому
$$H = \frac{2NJ}{\pi(d_1 + d_2)}.$$
Магнитная индукция поля равна
$$B = \mu_0 H = \frac{2\mu_0 NJ}{\pi(d_1 + d_2)}.$$
Произведем вычисления:
$$H = \frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{3{,}14(0{,}3 + 0{,}2)} = 1{,}37 \cdot 10^3 \text{ А/м};$$
$$B = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5}{\pi(0{,}3 + 0{,}2)} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Задача 3. В соленоид длиной $l = 0{,}1$ м, имеющий $N = 300$ витков, введен железный сердечник. По соленоиду проходит ток $J = 1$ А. Найти вектор намагничения железа внутри соленоида, если его магнитные свойства выражаются графиком $B = f(H)$ (см. справочник по физике).

Решение

Воспользуемся формулой (I.17). Из нее имеем для искомой величины
$$\mathcal{J} = \left(\frac{B}{\mu_0 H} - 1\right) H, \qquad (I)$$
где H – напряженность магнитного поля в соленоиде;
$H = J\frac{N}{l} = Jn = 3 \cdot 10^3$ А/м; B –индукция магнитного поля в соленоиде.
По графику $B = f(H)$ находим значение B, соответствующее $H = 3 \cdot 10^3$ А/м; $B = 1{,}6$ Тл. Подставив в равенство (I) числовые значения величин и выполнив вычисление, получим:
$$\mathcal{J} = 1{,}27 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Задача 4. На железном сердечнике в виде тора диаметром $d = 500$ мм имеется обмотка с общим числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделан поперечный разрез, в результате чего образовался воздушный зазор шириной $l' = 1{,}00$ мм. При токе в обмотке силой $J = 0{,}85$ А напряженность

поля в зазоре $H_в = 6{,}0 \cdot 10^5$ А/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Рассеянием линий магнитной индукции пренебречь.

Решение

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию тороида L:
$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i J_i.$$
Во всех точках контура L, и в сердечнике, и в зазоре, $(\vec{H}, \hat{d\vec{l}}) = 0$, поэтому $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H\,dl$.

Абсолютные значения напряженностей в сердечнике и в зазоре различны, поэтому интеграл по контуру L надо разбить на два: по части l_1 контура, проходящей внутри сердечника, и по части l_2 – в зазоре, тогда
$$\oint_L H\,dl = \int_{l_1} H\,dl + \int_{l_2} H\,dl.$$
Считая напряженность поля внутри сердечника постоянной и равной H_c, внутри зазора– также постоянной и равной $H_в$, получим
$$\int_{l_1} H\,dl + \int_{l_2} H\,dl = H_c(\pi d - l') + H_в l'. \qquad (I)$$
Сумма токов, сцепленных с контуром интегрирования, $\sum_i J_i = NJ$. Таким образом, согласно уравнению (I)
$$H_c(\pi d - l') + H_в l' = NJ.$$
Напряженность и индукция поля в среде связаны соотношением (I.19)
$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0 \mu}.$$
Отсутствие рассеяния линий индукций обусловливает равенство индукции поля в зазоре и в среде: $B_c = B_в$. Но $B_в = \mu_0 H_в$, поэтому справедливо равенство $H_c = H_в / \mu$.

Следовательно,
$$\frac{H_в}{\mu}(\pi d - l') + H_в l' = NJ.$$
Отсюда
$$\mu = \frac{(\pi d - l') H_в}{NJ - l' H}.$$
Вычисления дают $\mu = 3800$.

Задача 5. Тороид с железным сердечником, длина которого по средней линии $\ell_1 = 1{,}00$ м, имеет воздушный зазор $\ell_2 = 3{,}0$ мм. По обмотке тороида, содержащей $N = 1300$ витков, пустили ток, в результате чего индукция в зазоре стала $B_2 = 1{,}00$ Тл. Определить силу тока.

Решение

Поскольку воздушный зазор в тороиде узкий, то рассеянием линий индукции можно пренебречь и считать, что через любое поперечное сечение тороида проходит один и тот же магнитный поток Φ. А так как и площадь любого сечения S одна и та же, то во всех точках, расположенных по средней линии тороида, $B = const$: $B_1 = B_2 = B = \frac{\Phi}{S} = 1$ Тл, где B_1 – магнитная индукция в железе, B_2 – магнитная индукция в воздухе. Ввиду того, что магнитные индукции в железе и воздушном зазоре одинаковы, а магнитные проницаемости этих веществ разные, то напряженности магнитного поля в железе и зазоре различны (см.формулу I.I9). Поэтому применив теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ к контуру L, совпадающему со средней линией тороида, получим

$$H_1\ell_1 + H_2\ell_2 = NJ,$$

где H_1, H_2 – напряженности магнитного поля в железе и зазоре.

Отсюда

$$J = \frac{H_1\ell_1 + H_2\ell_2}{N}.$$

Для воздуха $\mu = I$. На основании (I.I9) имеем

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1{,}00}{4\pi\cdot 10^{-7}} = 8{,}0\cdot 10^5 \text{ А/м}.$$

По графику зависимости $B = f(H)$ в железе (этот график приводится в задачниках и справочниках по физике) найдем величину H_1: $H_1 = 200$ А/м.

Подставив значения величин, входящих в формулу для J, получим: $J = 2{,}0$ А.

Задача 6. Длина железного сердечника тороида $\ell_1 = 2{,}5$ м, длина воздушного зазора $\ell_2 = 1$ см. По обмотке тороида идет ток. После выключения тока индукция в зазоре стала $B = 5{,}7$ мТл. Определить остаточную намагниченность J сердечника, а также напряженность H поля в железе.

Решение

Повторив рассуждения, приведенные в задаче 4, и учитывая, что $J = 0$, получим

$$H_1\ell_1 + H_2\ell_2 = 0. \qquad (I)$$

Величины H_2 и B в воздушном зазоре связаны соотношением (I.I9), где $\mu = I$.

Таким образом;

$$H_2 = \frac{B}{\mu_0}.$$

Подставив это значение H_2 в (I), получим напряженность магнитного поля в железе:

$$H_1 = -H_2\frac{\ell_2}{\ell_1} = -\frac{B}{\mu_0}\cdot\frac{\ell_2}{\ell_1}, \qquad (2)$$

знак " – " в формуле (2) показывает, что векторы $\vec{H}$ и $\vec{B}$ в намагниченном железе при отсутствии тока в обмотке направлены противоположно. Из формулы (I.I7) следует, что остаточная намагниченность железа равна

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}_1,$$

или в скалярной форме

$$J = \frac{B}{\mu_0} + H_1.$$

Подставив вместо H_1 его абсолютное значение из формулы (2), найдем

$$J = \frac{B(\ell_1 + \ell_2)}{\mu_0\ell_1}.$$

Произведем вычисления:

$$H_1 = -\frac{5{,}7\cdot 10^{-3}}{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}\cdot\frac{0{,}01}{2{,}5} = -18{,}2 \text{ А/м};$$

$$J = \frac{5{,}7\cdot 10^{-3}(2{,}5 + 0{,}01)}{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 2{,}5} = 4{,}5\cdot 10^3 \text{ А/м}.$$

§ 4. Явление электромагнитной индукции

I. Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея): Электродвижущая сила индукции, возникающая в замкнутом контуре, помещенном в магнитном поле, пропорциональна скорости изменения магнитного потока через площадь, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -k_2\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (I.22)$$

Если контур состоит из N одинаковых витков, т.е. представляет собой соленоид, то

$$\mathcal{E}_i = -k_2 N \frac{d\Phi}{dt}, \qquad \text{(I.22a)}$$

знак " - " в формуле для $\mathcal{E}_i$ является выражением правила Ленца: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемый им магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, уменьшает те изменения магнитного потока, которые вызвали появление индукционного тока.

2. Количество электричества, протекающего по контуру с сопротивлением R при изменении потока, пронизывающего контур, на величину $\Delta\Phi$, равно

$$q = -k_2 \frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad \text{(I.23)}$$

3. Электродвижущая сила самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем, равна

$$\mathcal{E}_c = -k_2^2 L \frac{dJ}{dt}, \qquad \text{(I.24)}$$

где L - индуктивность контура.

4. Магнитный поток через контур и сила тока в нем связаны соотношением

$$\Phi = k_2 L J. \qquad \text{(I.25)}$$

5. Индуктивность длинного соленоида равна

$$L = \frac{k_1}{k_2} 4\pi \mu n^2 V, \qquad \text{(I.26)}$$

где n - число витков, приходящееся на единицу длины соленоида; V - объем соленоида.

6. Сила тока в цепи, содержащей источник постоянной ЭДС, сопротивление R и индуктивность L, при размыкании цепи спадает по закону

$$J = J_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad \text{(I.27)}$$

а при замыкании цепи нарастает по закону

$$J = J_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad \text{(I.27a)}$$

7. Электродвижущая сила взаимной индукции, возникающая в контуре при изменении силы тока в соседнем контуре, равна

$$\mathcal{E}_{i_2} = -k_2 L_{21} \frac{dJ_1}{dt}, \qquad \text{(I.28)}$$

где L_{21} - коэффициент взаимной индукции или взаимная индуктивность контуров.

Взаимная индуктивность двух контуров, пронизываемых общим магнитным потоком, равна

$$L_{21} = \frac{k_1}{k_2} 4\pi \mu n_1 n_2 V, \qquad \text{(I.29)}$$

где n_1 и n_2 - число витков на единицу длины этих контуров.

Решение задач

З а д а ч а 1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл расположена прямоугольная рамка $abcd$, подвижная сторона которой cd длиной $l = 10$ см перемещается со скоростью $v = 25$ м/с перпендикулярно линиям индукции поля (рис. 18). Определить ЭДС индукции, возникающую в контуре $abcd$.

Решение

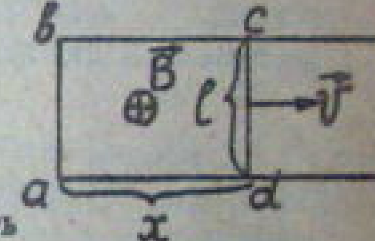


Рис. 18

При движении проводника cd площадь рамки увеличивается, магнитный поток Φ сквозь рамку возрастает, поэтому, согласно закону Фарадея (I.22), в ней будет возникать ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (k_2 = 1).$$

Выразим магнитный поток Φ через индукцию поля B и стороны рамки l и x.

Согласно формуле (I.14a), имеем

$$\Phi = BS = Blx.$$

Учитывая, что B и l - величины постоянные, перепишем выражение для ЭДС в виде

$$\mathcal{E}_i = -Bl\frac{dx}{dt},$$

где $\frac{dx}{dt} = v$ - скорость перемещения проводника cd. Поэтому $\mathcal{E}_i = -Blv$. Подставив числовые значения величин B, l и v, получим

$$\mathcal{E}_i = -0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 25 = -0{,}25 \text{ В}.$$

Индукционный ток в контуре направлен против часовой стрелки.

З а д а ч а 2. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током $J = 20$ А на расстоянии $r_0 = 1$ см находятся две шины, параллельные току J. По шинам поступательно перемещается проводник длиной $\ell=0{,}5$ м. Скорость его $v=3$ м/с постоянна и направлена вдоль шин. Найти разность потенциалов, возникающую на концах проводника (рис.19).

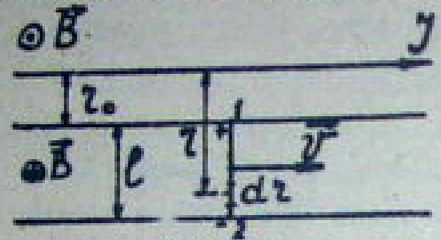


Рис. 19

Решение

Сначала определим направление ЭДС индукции, которая возникает в проводнике ℓ. Магнитное поле тока J в области, расположенной ниже проводника, направлено "от нас" (см.рис.19). Применяя правило правой руки, определяем, что на ближайшем к току J конце проводника ℓ будут накапливаться положительные заряды, а на дальнем–отрицательные. Следовательно:

$$\varphi_1-\varphi_2=\varepsilon_i \quad .$$

Очевидно, что проводник движется в неоднородном поле. Рассмотрим небольшой участок dr проводника ℓ и будем считать, что в его пределах поле однородно. Тогда разность потенциалов на таком участке равна $d\varphi=B\,dr\,v$, где B – индукция поля, создаваемого током J на участке dr. Обозначим через r расстояние от прямого тока до рассматриваемого участка. Тогда индукция поля в пределах рассматриваемого участка dr:

$$B=\frac{\mu_0 J}{2\pi r}$$

и

$$d\varphi=\frac{\mu_0 J}{2\pi r}dr\cdot v \; .$$

Интегрируя полученное выражение по всей длине движущегося проводника, найдем искомую разность потенциалов:

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 d\varphi=\frac{\mu_0 J v}{2\pi}\int_{r_0}^{r_0+\ell}\frac{dr}{r} \; .$$

Произведя интегрирование, получим

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\mu_0}{2\pi}J\,v\ln\frac{r_0+\ell}{r_0}=4{,}7\cdot10^{-5}\ \text{В} \; .$$

З а д а ч а 3. Квадратная рамка со стороной $a=1$ м движется с некоторой постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном к бесконечно длинному проводнику, лежащему в плоскости рамки параллельно одной из его сторон (рис.20). По проводнику проходит ток силой $J=10$ А. В некоторый момент времени

расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки $x=1$ м. Какова должна была бы быть скорость v, чтобы в этот момент в рамке индуцировалась ЭДС, равная 10^{-4} В ?

Решение

Вычислим магнитную индукцию поля в точке М. По закону Био-Савара-Лапласа

$$B_M=\frac{\mu_0 J}{2\pi r} \; .$$

Поток магнитной индукции через заштрихованный элемент площади (рис.20)

$$d\Phi=\frac{\mu_0 J}{2\pi R}\cdot a\cdot dr \; .$$

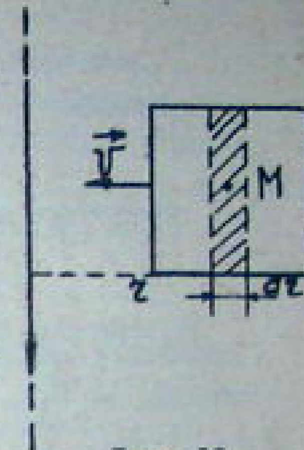


Рис. 20

Поток через всю рамку

$$\Phi=\int_x^{x+a}\frac{\mu_0 J}{2\pi r}\cdot a\,dr=\frac{\mu_0 J a}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x} \; .$$

По закону Фарадея

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{\mu_0 J a}{2\pi}\frac{x}{(x+a)}\frac{a}{x^2}v=\frac{\mu_0 J a^2 v}{2\pi(x+a)x} \; .$$

Отсюда

$$v=\frac{\varepsilon_i\cdot 2\pi(x+a)x}{\mu_0 J a^2}; \qquad v=100\ \text{м/с} \; .$$

З а д а ч а 4. В центре плоской круглой рамки, состоящей из $N_1=50$ витков радиусом $R=20$ см расположена маленькая прямоугольная рамка, состоящая из $N_2=100$ витков, площадью $S=1$ см^2 каждый (рис.21). Эта рамка вращается вокруг одного из диаметров первой рамки с постоянной угловой скоростью $\omega=300\ \text{с}^{-1}$. Найти мгновенное значение возникающей ЭДС, соответствующее углу поворота рамки 30^0. Ток в обмотке первой рамки $J=10$ А. Плоскости обеих рамок в начальный момент совпадают.

Решение

По условию задачи вторая рамка мала по сравнению с первой, следовательно, можно считать, что индукция поля в ее пределах постоянна и равна индукции в центре первой рамки т.е.

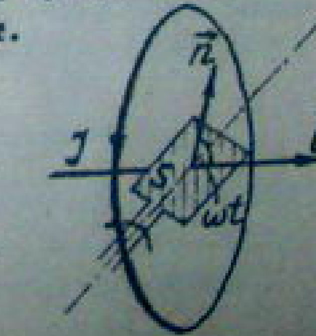


Рис. 21

$$B=\frac{\mu_0 J}{2R}N_1 \; .$$

При вращении рамки (см.рис.21) магнитный поток, пронизывающий рамку, меняется и в момент времени t будет равен

$$\Phi = BS\cos\omega t .$$

Подставляя в выражение для Φ значение B из предыдущей формулы, находим

$$\Phi = \frac{\mu_0 J}{2R} S N_1 \cos\omega t .$$

Выражение для ЭДС индукции будет иметь вид

$$\mathcal{E}_i = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 J}{2R} S N_1 N_2 \omega \sin\omega t .$$

Произведем вычисления:

$$\mathcal{E}_i = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot 0{,}2} \cdot 10^{-4} \cdot 50 \cdot 100 \cdot 300 \cdot 1/2 = 2{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

З а д а ч а 5. Проволочный виток радиусом r=4см и сопротивлением $R = 0{,}01$ Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\varphi = 30^\circ$ с направлением поля. Какое количество электричества q протечет по витку, если магнитное поле выключить?

Решение

Количество электричества dq, которое протечет по витку за время dt, если магнитное поле выключить, определяется из формулы для силы тока:

$$J = \frac{dq}{dt} .$$

Отсюда $dq = J \cdot dt$, где $J = \mathcal{E}_i / R$.

Величину ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ находим по закону Фарадея (I.22), который в единицах СИ будет иметь вид

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{, тогда} \quad dq = -\frac{d\Phi}{R} .$$

Интегрируя, получим

$$q = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} ,$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки, пронизывающие виток до выключения и после выключения поля соответственно:

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha = B\pi r^2 \cos\alpha ; \qquad \Phi_2 = 0 .$$

Таким образом:

$$q = \frac{B\pi r^2 \cos\alpha}{R} ,$$

здесь $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Расчет дает $q = 10^{-2}$ Кл.

З а д а ч а 6. По длинному соленоиду с немагнитным сердечником сечением $S = 5{,}0$ см^2, содержащему $N = 1200$ витков, течет ток силой $J = 2{,}00$ А. Индукция магнитного поля в центре соленоида $B = 10{,}0$ мТл. Определить его индуктивность.

Решение

I-й способ. Индуктивность длинного соленоида выражается формулой (I.26), которая в СИ имеет вид $L = \mu_0 n^2 V$. Подставляя в эту формулу выражения $n^2 = N^2/\ell^2$ и $V = \ell \cdot S$, получим $L = \mu_0 (N^2/\ell) S$.

Неизвестную величину ℓ найдем, воспользовавшись формулой (I.6а) для магнитной индукции поля внутри длинного соленоида, откуда

$$\ell = \frac{\mu_0 N J}{B} .$$

Окончательно для L имеем:

$$L = \frac{NBS}{J} .$$

Выразив входящие в формулу величины в единицах СИ и выполнив вычисления, найдем

$$L = 3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ Г} = 3{,}0 \text{ мГн} .$$

2-й способ. Применим формулу (I.25). При этом учтем, что в случае соленоида Φ в этой формуле является полным магнитным потоком, равным сумме потоков, проходящих сквозь каждый виток соленоида. Поскольку через каждый виток длинного соленоида проходит один и тот же магнитный поток $\Phi' = BS$, то полный поток равен

$$\Phi = N\Phi' = NBS .$$

Подставляя это значение Φ в (I.25), найдем индуктивность соленоида:

$$L = \frac{NBS}{J} .$$

З а д а ч а 7. Катушка с индуктивностью $L = 250$ мГн и сопротивлением $R = 0{,}30$ Ом подключается к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени τ сила тока в катушке достигнет 50% установившегося значения ?

Решение

С момента подключения катушки к источнику напряжения ток в ней возрастает постепенно по закону (I.27а)

$J = J_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, где J_0 – сила установившегося тока.

При $t = \tau$ $J = 0{,}5\,J_0$. Поэтому $0{,}5\,J_0 = J_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\tau}\right)$, отсюда получим $e^{-\frac{R}{L}\tau} = 0{,}5$ и $\tau = L\ln 0{,}5/R$.

Произведя вычисление τ (в СИ), найдем:

$$\tau = -\frac{0{,}25\cdot(-0{,}69)}{0{,}3} = 0{,}58\ \text{с}.$$

§ 5. Энергия магнитного поля

I. Энергия магнитного поля тока J в контуре (соленоиде) обладающем индуктивностью L:

$$W = k_2^2\frac{LJ^2}{2}. \qquad (I.30)$$

2. Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия, отнесенная к единице объема):

$$w_H = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}, \quad \text{в СИ}; \qquad (I.3I)$$

$$w_H = \frac{W}{H} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi} \quad \text{в системе СГС}. \qquad (I.3Iа)$$

Решение задач

З а д а ч а I. На полый картонный цилиндр длиной $l = 50$ см, диаметром $D = 3$ см навита в два ряда медная проволока ($\rho_{меди} = 0{,}017\ \frac{\text{Ом}\cdot\text{мм}^2}{\text{м}}$) диаметром $D_0 = 1$ мм. Полученная таким образом катушка подключена к источнику постоянного напряжения $\mathcal{E} = 1{,}4$ В (рис.22). Через какое время τ после перевода ключа К из положения I в положение 2 сила тока в катушке уменьшится в 1000 раз? Какое количество тепла выделится

в катушке за это время? Чему равна магнитная энергия катушки до переключения ?

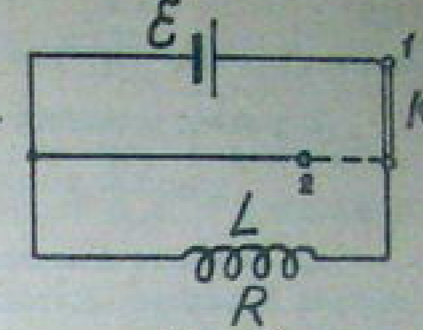


Рис. 22

Решение

При включении источника (положение ключа К – "1") значение тока $J_0 = \mathcal{E}/R$ установится не сразу, а постепенно. В это время происходит накапливание магнитной энергии катушки. После перевода ключа К в положение "2" ток в катушке исчезнет не мгновенно, а будет постепенно уменьшаться до 0 (благодаря действующей в цепи ЭДС самоиндукции). При этом на омическом сопротивлении будет выделяться джоулево тепло. Количество тепла, которое выделится на сопротивлении за время прохождения тока после отключения источника, равняется магнитной энергии катушки до отключения источника. Закон изменения тока в цепи катушки выражается формулой (I.27).

$$J = J_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Отсюда $t = \frac{L\ln J_0/J}{R}$. Индуктивность катушки L можно определить по формуле $L = \mu_0 N^2 S_K/l_K$, здесь N – общее число витков катушки; $S_K = \pi D^2/4$ и l_K – поперечное сечение и длина катушки соответственно. Очевидно, что общее число витков катушки $N = \frac{l_K}{D_0}\cdot 2$.

Следовательно,

$$L = \frac{\mu_0 l_K \pi D^2}{D_0^2} = 1{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{Гн}.$$

Сопротивление обмотки $R = \rho\frac{l_{пр}}{S_{пр}}$, где $l_{пр} = \pi D N$ – длина провода обмотки; $S_{пр} = \pi D_0^2/2$ – поперечное сечение провода.

Отсюда

$$R = \frac{\rho D N\cdot 4}{D_0^2} = \frac{8\rho D l_K}{D_0^3} = 2{,}0\ \text{Ом}.$$

Подставляя вычисленные значения R и L в формулу для t и учитывая, что по условию $J_0/J = 10^3$ для искомого времени τ, получим $\tau = 6{,}2\cdot 10^{-3}$ с. Количество джоулева тепла, выделившегося на сопротивлении R за время τ, равно

$$Q=\int_0^\tau J^2 R\,dt = J_0^2 R\int_0^\tau e^{-\frac{2R}{L}}dt$$

или

$$Q=\frac{J_0^2 L}{2}\left(1-e^{-\frac{2R}{L}\tau}\right).$$

Начальная магнитная энергия катушки

$$W=\frac{LJ^2}{2}=\frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}=4{,}4\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

При подсчете величины Q оказывается, что вычитаемое, стоящее в скобках, составляет величину порядка 10^{-6}. Это значит, что практически за время $\tau=6{,}2\cdot10^{-3}$ с вся магнитная энергия катушки превратилась в джоулево тепло.

Задача 2. Обмотка соленоида содержит $n=20$ витков на каждый сантиметр длины. При какой силе тока J объемная плотность энергии $w_н$ магнитного поля будет равна $0{,}1$ Дж/м³? Сердечник выполнен из немагнитного материала, и магнитное поле во всем объеме однородно.

Решение

Объемная плотность магнитного поля $w_н$ определяется по формуле

$$w_н=\frac{W}{V},\ \text{где}\quad W=\frac{LJ^2}{2}=\frac{\mu_0 n^2 V J^2}{2}.$$

Подставив выражение для W в формулу для W_0, получим

$$w_н=\frac{\mu_0 n^2 J^2}{2},\ \text{откуда}\quad J=\sqrt{\frac{2w_н}{\mu_0 n^2}}=0{,}2\ \text{А}.$$

Задача 3. По обмотке тороида с железным сердечником пустили ток силой $J=0{,}60$А. Витки провода диаметром $d=0{,}40$мм с весьма тонкой изоляцией плотно прилегают друг к другу. Определить индуктивность тороида, а также энергию магнитного поля в сердечнике, если площадь его сечения $S=4{,}0$ см², а диаметр средней линии $D=30{,}0$ см

Решение

Можем рассматривать данный тороид как длинный соленоид, согнутый в кольцо. Его индуктивность рассчитывается по формуле (I.26), которая в СИ принимает вид:

$$L=\mu_0\mu n^2 V=\mu_0\mu\pi DS/d^2.$$

Напряженность магнитного поля внутри тороида равна

$$H=nJ=J/d=1{,}5\cdot10^3\ \text{А/м}.$$

По кривой намагничивания железа находим магнитную индукцию в сердечнике: $B=1{,}35$ Т.

Используя соотношение $\mu_0\mu=B/H$, получим $L=\pi DSB/d^2H$.

Энергию магнитного поля найдем по формуле (I.30), подставив в нее полученное выражение для L:

$$W=\frac{LJ^2}{2}=\frac{\pi DSBJ^2}{2d^2H}\qquad (k_2=1).$$

Подставляя в формулы для L и W числовые значения всех величин, выраженные в единицах СИ, получим $L=2{,}4$ Гн; $W=0{,}4$ Дж.

Задача 4. Телевизионный кабель состоит из двух проводов, один из которого (внутренний) является сплошным цилиндром, второй (внешний) – полым цилиндром. Оси их совпадают. Диаметр первого цилиндра $d_1=0{,}3$ мм, второго $d_2=8$ мм. Определить индуктивность единицы длины кабеля.

Решение

Магнитное поле кабеля создается током, текущим по внутреннему проводу, и сосредоточено в пространстве между проводами. Энергия этого поля, отнесенная к единице длины кабеля,

$$W'=\frac{J^2L'}{2},\tag{I}$$

где J – сила тока, протекающего по внутреннему проводу; L' – искомая величина.

Энергия W' может быть также определена через плотность энергии поля $w_н$. С учетом формулы (I.31), можем записать для W' соотношение

$$W'=\int_{r_1}^{r_2}\frac{B^2}{2\mu_0}2\pi r\,dr.$$

Индукция магнитного поля равна

$$B=\frac{\mu_0 J}{2\pi r},$$

поэтому предыдущая формула примет вид

$$W'=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{2r_0}\frac{\mu_0^2 J^2}{4\pi^2 r^2}\cdot2\pi r\,dr=\frac{\mu_0}{4\pi}J^2\ln\frac{r_2}{r_1}.\tag{2}$$

Сравнивая выражения (I) и (2) получим:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляя в эту формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, получим:

$$L' = 6{,}6\cdot10^{-7}\ \text{Гн/м}.$$

З а д а ч а 5. Длинный проводник радиусом r_0=2мм согнут пополам так, что расстояние между осями его половинок a=3 см. Пренебрегая полем внутри проводника, рассчитать индуктивность системы и ее энергию на каждый метр длины. Сила тока в проводнике J=3А.

Решение

Магнитные поля, созданные каждой частью получившейся петли (рис.23), между проводниками направлены в одну сторону(" от нас"). За пределами петли поля направлены в разные стороны.

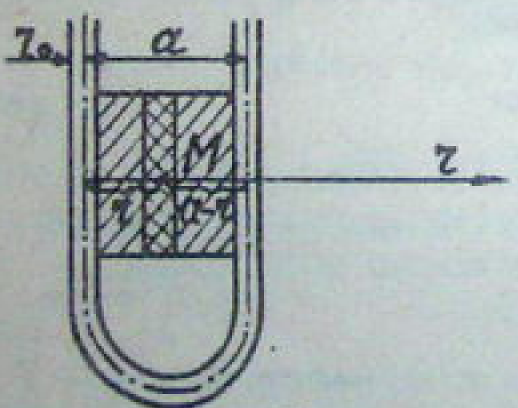


Рис. 23

Полный поток системы, следовательно, будет определяться потоком, пронизывающим только плоскость, ограниченную петлей. Чтобы найти этот поток, надо знать, как зависит индукция результирующего магнитного поля B_M от расстояния r. Учитывая, что проводник длинный, мы можем пренебречь полями токов в подводящих проводах и горизонтальной части проводника. Таким образом:

$$B_M = \frac{\mu_0 J}{2\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a-r}\right). \qquad (1)$$

В качестве элемента площадки dS выберем узкую полоску толщиной dr и длиной $l=1$м.

Так как в данном случае $B_n=B$, то

$$\Phi=\int_{r_0}^{a-r_0} B_M\, l\, dr. \qquad (2)$$

Подставив в выражение (2) формулу (I), получим

$$\Phi = \frac{\mu_0 J l}{2\pi}\left\{\int_{r_0}^{a-r_0}\frac{dr}{r}+\int_{r_0}^{a-r_0}\frac{dr}{a-r}\right\} = \frac{\mu_0 J l}{\pi}\ln\frac{a-r_0}{r_0}.$$

Индуктивность системы с учетом полученного выражения для Φ:

$$L' = \frac{\Phi}{J} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{a-r_0}{r_0} = 1{,}05\cdot10^{-6}\ \text{Гн}.$$

Энергия системы на каждый метр длины

$$W' = \frac{L'J^2}{2} = \frac{\mu_0 l J^2}{2\pi}\ln\frac{a-r_0}{r_0} = 4{,}7\cdot10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Г л а в а 2. Методика решения задач по разделу "ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ"

§ I. Электромагнитные колебания в контуре

I. Электромагнитные колебания возникают в колебательном RLC - контуре. Свободные колебания в контуре при $R\neq0$ будут затухающими. Величина заряда конденсатора q меняется во времени по следующему закону:

$$q = Q_0 e^{-\delta t}\sin(\omega_c t+\varphi_0), \qquad (2.1)$$

здесь Q_0 – амплитудное значение заряда конденсатора (т.е. заряд в момент времени $t=0$); $\delta=R/2L$ – коэффициент затухания;

$\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний;

$\omega_0=1/\sqrt{LC}$ – частота собственных (незатухающих) колебаний, т.е. колебаний при $R=0$.

2. Для характеристики затухающих колебаний часто используется величина θ, называемая логарифмическим декрементом затухания:

$$\theta = \ln\frac{Q_0(t)}{Q_0(t+T)}, \qquad (2.2)$$

где $Q_0(t)=Q_0 e^{-\delta t}$, откуда

$$\theta=\delta T. \qquad (2.3)$$

Если сопротивление колебательного контура настолько мало, что $\delta^2 \ll \omega_0^2$, то такие колебания называются квазигармоническими с медленно изменяющейся амплитудой. Они описываются выражениями для гармонических колебаний с собственной частотой:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (2.4)$$

3. Мгновенные силы значения тока J в цепи, разности потенциалов U_c на конденсаторе и ЭДС индукции $\mathcal{E}_L$ вычисляются по следующим формулам:

$$J=\frac{dq}{dt};\qquad u_c=\frac{q}{c};\qquad \mathcal{E}_L=-L\frac{dJ}{dt}, \qquad (2.5)$$

где q – величина заряда, определяемая выражением (2.I).

4. Под действием внешней периодически изменяющейся ЭДС вида:

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\sin\omega t \qquad (2.6)$$

в колебательном контуре устанавливаются вынужденные синусоидальные колебания той же частоты:

$$J=J_0\sin(\omega t+\varphi). \qquad (2.7)$$

Амплитудное значение силы тока J_0 и фазовый сдвиг φ между током и внешней ЭДС зависят от частоты вынужденных колебаний:

$$J_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega c)^2}}=\frac{\mathcal{E}_0}{z}; \qquad (2.8)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-1/\omega c}{R}, \qquad (2.9)$$

здесь

$$z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega c)^2} - \qquad (2.I0)$$

величина, называемая импедансом контура.

Амплитуда J_0 достигает максимального значения при резонансной частоте

$$\omega_p=\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad (2.II)$$

Очевидно, что при резонансе

$$(J_0)_{max}=\frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad и \quad \varphi=0. \qquad (2.I2)$$

5. Действующим (эффективным) значениям силы тока и ЭДС называется среднее квадратичное значение этих величин за один период колебаний. Для синусоидальных колебаний действующие значения этих величин в $\sqrt{2}$ раза меньше их амплитудных значений:

$$J_{эфф}=\frac{J_0}{\sqrt2};\quad \mathcal{E}_{эфф}=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt2};\quad (U_c)_{эфф}=\frac{U_{0c}}{\sqrt2};\ (U_R)_{эфф}=\frac{U_{0R}}{\sqrt2}. \qquad (2.I3)$$

§ 2. Электромагнитные волны

I. Длина волны электромагнитного излучения, на которую настроен колебательный контур, определяется из условий резонанса (2.II):

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=2\pi\frac{c}{\omega_p},$$

т.е. $$\lambda=2\pi c\sqrt{LC}, \qquad (2.I4)$$

где $c=3\cdot10^8\ \frac{м}{с}$ –скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

В любой другой среде скорость распространения электромагнитных волн меньше, чем в вакууме:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (2.I5)$$

здесь ε и μ –диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно.

2. Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме объемных плотностей электрического и магнитного полей:

$$w=w_E+w_H=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{\mu\mu_0H^2}{2}\quad (в\ СИ), \qquad (2.I6)$$

где E и H – напряженность электрического и магнитного полей; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно.

В плоской (бегущей) электромагнитной волне:

$$E=E_0\sin(\omega t-kx); \qquad (2.I7)$$

$$H=H_0\sin(\omega t-kx),$$

где $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$– волновое число.

Так как объемные плотности электрической и магнитной энергии в любой момент времени и в любой точке пространства одинаковы, то

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E=\sqrt{\mu\mu_0}\,H. \qquad (2.I8)$$

Это означает, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской электромагнитной волне колеблются в одинаковых фазах.

3. Плотность потока электромагнитной энергии численно равна энергии, которую переносит волна за единицу времени через единицу площади поверхности, нормальной к направлению переноса энергии:

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t\cdot S}, \qquad (2.I9)$$

где ΔW– энергия, переносимая через поверхность S (нормальную к направлению переноса) за время Δt.

Выражение (2.I9) можно записать в дифференциальной форме:

$$P=\frac{1}{S}\frac{dW}{dt}. \qquad (2.20)$$

Вектор плотности потока электромагнитной энергии (вектор Умова–Пойтинга) равен векторному произведению $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad \text{в СИ} \qquad (2.21)$$

В плоской волне $\vec{E} \perp \vec{H}$ и плотность потока будет равна:

$$P = E \cdot H . \qquad (2.22)$$

Решения задач

Задача I. Колебательный контур составлен из конденсатора емкостью $C = 10^3$ пФ и катушки, индуктивность которой $L = 4 \cdot 10^3$ Гн , а сопротивление $R_L = 2 \cdot 10^{-3}$ Ом.

I. Определить частоту собственных колебаний и длину волны,на которую настроен контур.

При разомкнутой цепи конденсатор зарядили до $Q_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл затем цепь замкнули

2. Записать уравнение для разности потенциалов на зажимах конденсатора $U_c(t)$ и тока в цепи $J(t)$.

3. Вычислить логарифмический декремент затухания контура и определить интервал времени, в конце которого амплитуда разности потенциалов U_0 уменьшится в 2 раза.

4. Построить графики зависимости $U_c(t)$ и $J(t)$ за интервал времени, равный одному периоду колебаний.

Решение

I. Частота свободных затухающих колебаний

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} .$$

Вычислим величины δ и ω_0 :

$$\delta = \frac{R}{2L} = 2{,}5\ c^{-1} ; \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \cdot 10^5\ c^{-1}.$$

Так как $\delta \ll \omega_0$, то мы имеем случай квазигармонических колебаний с частотой

$$\nu_c \approx \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 0{,}8 \cdot 10^5\ \text{Гц} .$$

Длина волны, на которую настроен контур, определяется из формулы (2.14):

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 3760\ \text{м} .$$

2. Уравнение квазигармонических колебаний запишем в виде

$$q = Q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

где $\varphi_0 = \pi/2$, так как цепь была замкнута в момент $t = 0$, когда $q = Q_0$. Используя уравнения (2.5), запишем выражения для

$U_c(t)$ и $J(t)$:

$$U_c = q/C = U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \pi/2) ,$$

где $U_0 = Q_0/C = 2 \cdot 10^{-7}/10^{-9} = 200$ В ;

$$U_c = 200\, e^{-2{,}5 t} \sin(5 \cdot 10^5 t + \pi/2)\ \text{В} ;$$

$$J = dq/dt = \omega_0 Q_0 e^{-\delta t}\left[\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - (\delta/\omega_0)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right].$$

Отношение δ/ω_0 является мерой затухания колебаний. Если $\delta/\omega_0 \ll 1$, то изменение амплитуды колебаний заметно лишь после достаточно большого интервала времени. В нашем случае $\delta/\omega_0 = 5 \cdot 10^{-6}$, поэтому можно записать для силы тока приближенное выражение:

$$J = J_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

где

$$J_0 = \omega_0 Q_0 = 5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 0{,}1\ \text{А} ;$$

$$J = 0{,}1\, e^{-2{,}5 t} \cos(5 \cdot 10^5 t + \pi/2)\ \text{А} .$$

3. По определению

$$\theta = \delta \cdot T = \frac{\delta}{\nu_c} = \frac{2{,}5}{0{,}8 \cdot 10^5} \simeq 3{,}12 \cdot 10^{-12} ;$$

$$U_c(t) = U_0 e^{-\delta t} , \qquad U_c(t_1) = \frac{U_0}{2} .$$

Откуда

$$e^{-\delta t_1} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{\ln 2}{\delta} = 0{,}28\ \text{с} .$$

За это время произойдет

$$N = t_1/T = t_1 \cdot \nu_c = 0{,}28 \cdot 0{,}8 \cdot 10^5 = 22400 \quad \text{колебаний.}$$

4. Изменением амплитуды квазигармонических колебаний за время, равное одному периоду колебаний, можно пренебречь.

В начальный момент времени $t = 0$, $U_0 = 200$ В и $J_0 = 0{,}1$ А

В произвольный момент времени $t \leq T$ можно записать следующие выражения для силы тока J и напряжения U_c :

$$J = -0{,}1 \sin 2\pi \frac{t}{T} ; \qquad U_c = 200 \cos 2\pi \frac{t}{T} ,$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{с} .$$

При построении графиков зависимости $J(t)$ и $U_c(t)$ удобно откладывать вдоль оси абсцисс относительное время t/T (рис.24).

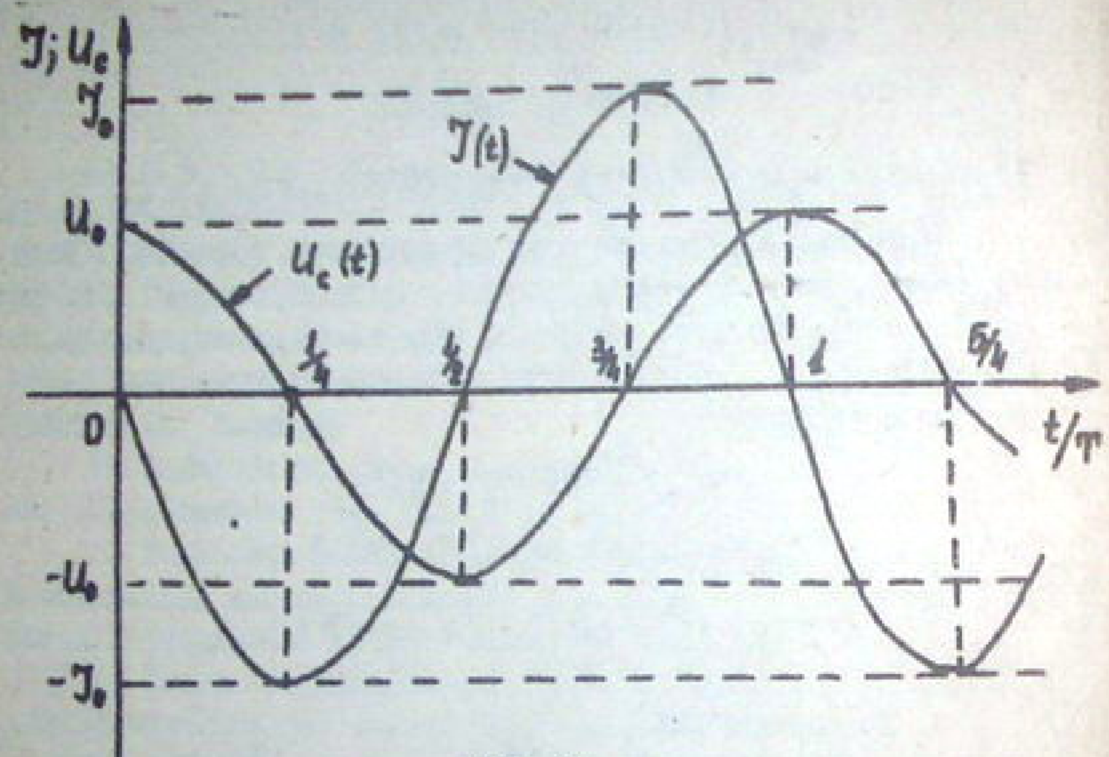


Рис. 24

З а д а ч а 2. Колебательный контур состоит из конденсатора $C=2\cdot10^3$ пФ и катушки индуктивности с параметрами: $R_L=1$ Ом и $L=3\cdot10^{-5}$ Гн, включенных последовательно с источником переменной ЭДС.

Определить среднюю мощность, потребляемую контуром, когда в нем установятся вынужденные колебания с амплитудным значением разности потенциалов на зажимах конденсатора $U_0=0,5$ В.

Решение

Так как активное сопротивление катушки $R_L\neq0$, то контур будет потреблять от источника энергию, которая выделится на сопротивлении R_L в виде джоулева тепла. За малый промежуток времени dt на сопротивлении R_L выделится энергия $dW=J^2R_L dt$. Тогда энергия, выделенная за время, равное периоду колебаний, будет равна:

$$W_T=\int_0^T J^2 R_L dt\ ,$$

где $J=J_0\sin(\omega t+\varphi)$; $\quad W_T=J_0^2R_L\int_0^T\sin^2(\omega t+\varphi)dt=$

$$=\frac{J_0^2R_L}{2}\int_0^T[1-\cos2(\omega t+\varphi)]dt=\frac{J_0^2R_L}{2}T.$$

Средняя мощность, потребляемая контуром, будет равна:

$$P=\frac{W_T}{T}=\frac{J_0^2R_L}{2}.$$

Амплитудные значения силы тока J_0 и падения напряжения U_0 связаны следующими соотношениями (см. задачу I):

$$U_0=\frac{Q_0}{C}\quad;\qquad J_0=\omega_c Q_0\ ,$$

откуда

$$J_0=\omega_c C U_0\ ,$$

где $\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ – частота свободных колебаний.

Численное решение:

$$R_L=1\text{ Ом}\ ;\ L=3\cdot10^{-5}\text{ Гн}\ ;\ C=2\cdot10^{-9}\text{ Ф}\ ;\ U_0=0,5\text{ В}.$$

Вычислим δ и ω_0:

$$\delta=\frac{R_L}{2L}=\frac{1}{6}10^5\ \frac{1}{c};\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt6}10^7\frac{1}{c}.$$

Так как $\omega_0^2\gg\delta^2$, то можно принять колебания за квазигармонические с собственной частотой $\omega_c\approx\omega_0$. В этом случае амплитудное значение силы тока и потребляемая мощность будут равны соответственно:

$$J_0=\omega_0CU_0=U_0\sqrt{C/L}\simeq0,82\cdot10^{-2}\text{ А};$$

$$P=J_0^2R_L/2=U_0^2R_LC/2L\simeq0,33\cdot10^{-5}\text{ Вт}.$$

З а д а ч а 3. Конденсатор переменной емкости и катушка, индуктивность которой $L=2\cdot10^{-4}$ Гн, составляют резонансный входной контур радиоприемника. Сопротивление катушки $R_L=0,1$ Ом.

I. Определить, в каких пределах нужно изменять емкость конденсатора, чтобы перестраивать контур в диапазоне длин волн от $\lambda_1=280$ м до $\lambda_2=560$ м.

2. Радиоволна длиной $\lambda_1=420$ м наводит в настроенном на нее контуре ЭДС, эффективное значение которой $\mathcal{E}_{эфф}=10^{-6}$ В:

а) Какой ток будет протекать в контуре?

б) Чему равна разность потенциалов на катушке ?

в) Чему равна емкость конденсатора ?

3. Как нужно изменить (расстроить) емкость конденсатора, чтобы ток стал в тысячу раз меньше, чем при резонансе? На ка-

кую радиоволну будет тогда настроен контур ?

Решение

1. Согласно формуле (2.14) $\lambda=2\pi c\sqrt{LC}$, откуда

$$C=\lambda^2/4\pi^2c^2L;$$

$$C_1=\frac{(2,8)^2\cdot10^4}{4\pi^2\cdot9\cdot10^{16}\cdot2\cdot10^{-4}}=1,1\cdot10^{-10}\,\Phi=110\ \text{п}\Phi.$$

Так как $\lambda_2=2\lambda_1$, то очевидно, что $C_2=4C_1=440\,\text{п}\Phi$.

Таким образом пределы изменения емкости переменного конденсатора должны быть от $C_1=110\ \text{п}\Phi$ до $C_2=440\ \text{п}\Phi$.

2. При резонансной частоте $z=R$ тогда амплитудное значение силы тока в цепи будет:

$$(J_0)_{max}=\frac{\mathcal{E}_0}{R};\qquad J_{эфф}=\frac{\mathcal{E}_{эфф}}{R}=\frac{10^{-6}}{0,1}=10^{-5}\ \text{A}.$$

Эффективное значение разности потенциалов на катушке определится импедансом катушки:

$$z_L=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}=\sqrt{R^2+L/C_1};$$

$$(U_L)_{эфф}=J_{эфф}\cdot z_L=10^{-5}\sqrt{10^{-2}+2\cdot10^{-4}/1,1\cdot10^{-10}}=1,35\cdot10^{-2}\ \text{В}$$

$$C=\lambda^2/4\pi^2c^2L=420^2/4\pi^2\cdot9\cdot10^{-16}\cdot2\cdot10^{-4}=248\ \text{п}\Phi.$$

Итак, при расстройке контура ток уменьшился в 1000 раз;

$$\frac{J_0}{(J_0)_{max}}=10^{-3},$$

здесь

$$J_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+(\omega_0L-1/\omega_0C')^2}}\qquad(J_0)_{max}=\frac{\mathcal{E}_0}{R},\quad\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};$$

C, C' — значение емкости конденсатора при настройке контура на длину волны $\lambda=420$ м и при расстройке его соответственно:

$$\frac{(J_0)^2_{max}}{J_0^2}=\frac{1}{R^2}\left[R^2+\left(\omega_0L-\frac{1}{\omega_0C'}\right)^2\right]=1+\frac{1}{R^2}\left(\sqrt{\frac{L}{C}}-\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\frac{C}{C'}\right)^2=1+\frac{1}{R^2}\frac{L}{C}\left(1-\frac{C}{C'}\right)^2.$$

Откуда

$$\frac{C}{C'}=1-R\sqrt{\frac{C}{L}\left[\frac{(J_0)^2_{max}}{J_0^2}-1\right]}\approx1-R\frac{(J_0)_{max}}{J_0}\sqrt{\frac{C}{L}}\approx0,886.$$

Полагая $C'=C+\Delta C$, находим

$$\Delta C=C(1/0,886-1)\approx248\cdot0,126=32\ \text{п}\Phi.$$

Таким образом нужно увеличить емкость конденсатора на $\Delta C=32\,\text{п}\Phi$.

Задача 4. Определить энергию, переносимую за время $t=1$ мин. плоской электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме через площадку $S=10^{-3}\,\text{м}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, если известно, что амплитуда напряженности электрического поля в волне $E_0=10^{-3}$ В/м, а частота колебаний $\nu=100$ кГц.

Решение

Запишем выражение для плотности потока электромагнитной энергии в дифференциальной форме (см.формулу (2.20);

$$P=\frac{1}{S}\frac{dW}{dt}.$$

С другой стороны, для плоской электромагнитной волны $P=E\cdot H$, где E и H, в том случае, когда расстояние от источника волн до площадки S фиксировано, можно выразить в виде: $E=E_0\sin\omega t$ и $H=H_0\sin\omega t$, $P=E_0H_0\sin^2\omega t$.

Для плоских электромагнитных волн на основании (2.18) можно записать:

$$H_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0,$$

так как $\varepsilon=\mu=1$ для вакуума и

$$P=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin^2\omega t.$$

С другой стороны $P=\frac{1}{S}\frac{dW}{dt}$. Интегрируя это выражение, получим:

$$W=S\int_0^t P\,dt=S\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\int_0^t\sin^2\omega t\,dt=S\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\left(t/2-\frac{\sin2\omega t}{4\omega}\right).$$

Оценим второе слагаемое в последнем выражении:

$$\frac{\sin2\omega t}{4\omega}=\frac{1}{8\pi}T\sin\frac{2\pi}{T}t\le\frac{T}{8\pi}.$$

Период колебаний $T=1/\nu=10^{-5}$ с. Следовательно, $T\ll t$ и вторым слагаемым можно пренебречь.

Тогда

$$W\cong S\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\cdot t/2=10^{-3}\sqrt{\frac{8,85\cdot10^{-12}}{4\pi\cdot10^{-7}}}\cdot10^{-6}\cdot30\simeq8\cdot10^{-11}\ \text{Вт}.$$

Задача 5. Шар радиусом $R=0,5$ м находится в диэлектрической среде с $\varepsilon=4$, в которой распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электрического поля в волне $E_0=200$ В/м. Вычислить среднюю энергию, падающую на шар.

Решение

Выделим на поверхности сферы радиусом R элементарную поверхность dS в форме криволинейного кольца (рис.25)

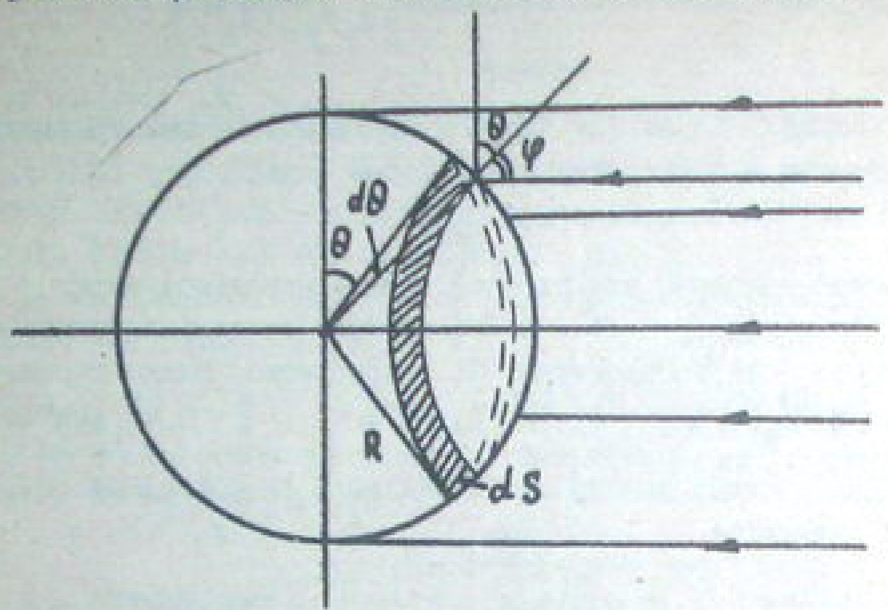


Рис. 25

Если dS ориентирована под некоторым углом φ к направлению распространения волны, то поток электромагнитной энергии за время dt через эту поверхность будет равен:

$$dW = P\,dt\,dS\cos\varphi\ ,$$

где P – плотность потока электромагнитной энергии, которая, согласно предыдущей задаче 4, равна

$$P = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_0^2\sin^2\omega t\ .$$

Вычислим поток энергии через dS за время, равное одному периоду колебаний:

$$dW_T = \int_0^T P\,dS\cos\varphi\,dt = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu_0}\,E_0^2\,dS\cos\varphi\int_0^T \sin^2\omega t\,dt\ ,$$

или

$$dW_T = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}\,dS\cos\varphi\int_0^T (1-\cos 2\omega t)\,dt\ .$$

Произведя интегрирование, получим

$$dW_T = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}\,dS\cos\varphi\cdot T\ .$$

Средняя за период колебаний энергия будет равна

$$d\overline{W}_T = \frac{dW_T}{T} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}\,dS\cos\varphi\ .$$

Суммарную среднюю энергию, падающую на шар, получим в результате интегрирования по поверхности полусферы S_0 радиусом

R (см. рис. 25). В данной задаче площадь элементарной поверхности удобно выразить в сферических координатах:

$$dS = 2\pi r\,R\,d\theta = 2\pi R^2\cos\theta\,d\theta\ .$$

Учитывая, что $\cos\varphi = \sin\theta$, найдем $\overline{W}_T$:

$$\overline{W}_T = \int_{S_0} d\overline{W}_T = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}\int_{S_0} dS\cos\varphi = 2\pi R^2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{E_0^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\ ;$$

$$\overline{W}_T = \frac{\pi}{2}R^2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_0^2 = \frac{\pi}{2}\,0{,}25\cdot 4\cdot 10^4\sqrt{\frac{4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{4\pi\cdot 10^{-7}}} = 8{,}34\cdot 10^2\ \text{Дж}.$$

З а д а ч а 6. По прямому проводу круглого сечения течет переменный ток. Вычислить поток электромагнитной энергии в единицу времени через боковую поверхность участка проводника, обладающего сопротивлением R, и показать, что этот поток равен мощности, выделяемой током силы J на данном участке.

Решение

Силовые линии вектора $\vec{E}$ совпадают с направлением тока $\vec{J}$ в данный момент времени (рис.26). Силовые линии вектора $\vec{H}$ представляют собой концентрические окружности, охватывающие проводник. На рис.26 изображены мгновенные направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для данного направления тока $\vec{J}$. Пользуясь определением вектора Умова-Пойтинга (2.21), нетрудно убедиться, что вектор $\vec{P}$ в любой момент времени всегда направлен перпендикулярно боковой поверхности проводника.

Рис. 26

Так как $\vec{E}\perp\vec{H}$, то величина вектора Умова-Пойтинга

$$P = E\cdot H\ ,$$

где $E = U/\ell$ – величина напряженности электрического поля;

$H = J/2\pi r$ – величина напряженности магнитного поля на расстоянии r от центра проводника; U – разность потенциалов на данном участке.

Используя выражение (2.20), можно сразу записать, чему равен поток электромагнитной энергии в единицу времени:

$$N = \frac{dW}{dt} = P\cdot S = E\cdot H\cdot S .$$

Полагая на поверхности проводника $r = r_0$, где r_0 – радиус проводника, получим

$$N = E\cdot H\cdot S = \frac{U}{l}\,\frac{J}{2\pi r_0}\,2\pi r_0 l = U\cdot J = \frac{J^2}{R},$$

Полученное выражение есть ничто иное, как выражение для мощности выделяемой током силы J в проводнике, сопротивление которого R.

З а д а ч а 7. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного неоднородного диэлектрика толщиной l, диэлектрическая проницаемость которого убывает от значения ε_1 на одной поверхности, до значения ε_2 на другой. Определить время распространения волны через слой в случаях, когда закон убывания: а) линейный; б) экспоненциальный.

Решение

В плоском неоднородном диэлектрике скорость распространения электромагнитной волны изменяется в направлении распространения волны по следующему закону:

$$v(x) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(x)}}, \qquad \mu = 1 .$$

Вычислим время прохождения волной слоя бесконечно малой толщины dx (рис.27):

$$dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon(x)}\,dx .$$

Время прохождения слоя конечной толщины l тогда равно

$$t = \frac{1}{c}\int_0^l \sqrt{\varepsilon(x)}\,dx .$$

а) Случай линейного закона убывания ε:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 - ax ,$$ где

$$a = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{l}; \qquad t = \frac{1}{c}\int_0^l (\varepsilon_1 - ax)^{1/2}\,dx = \frac{1}{c}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{a}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varepsilon^{1/2}\,d\varepsilon .$$

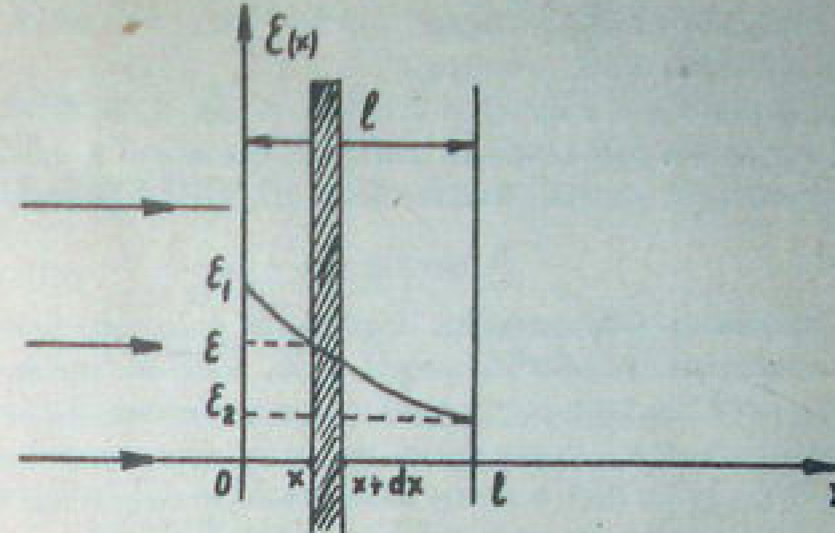


Рис. 27

Или, производя интегрирование, получим

$$t = \frac{2}{3}\,\frac{l}{c}\,\frac{\varepsilon_1^{3/2} - \varepsilon_2^{3/2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} .$$

Если рассматривать вакуум ($\varepsilon_2 = 1$) и предположить, что $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, то для неоднородного диэлектрика получим приближенно: $t_{неодн} \cong \frac{2}{3}\frac{l}{c}\sqrt{\varepsilon_1}$. Для однородного диэлектрика с $\varepsilon = \varepsilon_1 = const$ время распространения волны равно $t_{однор} = l/v_1 = (l/c)\sqrt{\varepsilon_1}$.

Очевидно, что

$$\frac{t_{неодн}}{t_{однор}} = \frac{2}{3},$$

т.е. время распространения волны в неоднородном диэлектрике меньше, чем в однородном.

б) Случай экспоненциального закона убывания ε:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 e^{-ax},$$

где $a = \frac{1}{l}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$; $t = \frac{1}{c}\int_0^l \sqrt{\varepsilon(x)}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\int_0^l e^{-\frac{a}{2}x}\,dx$,

или производя интегрирование, получим $t = \frac{2l}{c}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\ln \varepsilon_1/\varepsilon_2}$.

В случае $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$,

$$t_{неодн} \approx \frac{2l}{c}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\ln \varepsilon_1} \quad \text{и} \quad \frac{t_{неодн}}{t_{однор}} \approx \frac{2}{\ln \varepsilon_1} .$$

В рамках принятых предположений ($\varepsilon_1 \gg 1$) это отношение также всегда меньше единицы.

З а д а ч а 8. Колебательный контур составлен из катушки в виде соленоида, радиус сечения которого $R = 6$ см, и плос-

кого воздушного конденсатора, обкладки которого имеют форму дисков радиусом тоже $R=6$ см.
Контур подключен к источнику переменной ЭДС с частотой $\nu = \frac{10^3}{2\pi}$ Гц.
Найти отношение максимальных значений магнитной и электрической энергий; а) внутри конденсатора; б) внутри соленоида.

Решение

Переменное электрическое поле между пластинами конденсатора создает переменное магнитное поле. В то же время, переменное магнитное поле внутри соленоида порождает вихревое электрическое поле. Связь между электрическим и магнитным полями внутри соленоида и между пластинами конденсатора определяется уравнениями Максвелла в интегральном виде:

$$\oint_{\ell} H_{\ell}\, d\ell = \frac{\partial}{\partial t}\int_{S} D_n\, dS ,$$

где $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$,

$$\oint_{\ell} E_{\ell}\, d\ell = -\partial/\partial t\int_{S} B_n\, dS ,$$

здесь $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$.

Будем считать, что соленоид достаточно длинный по сравнению с его диаметром, а расстояние между пластинами плоского конденсатора достаточно мало по сравнению с диаметром пластин. Иными словами, пренебрегая краевыми эффектами, будем полагать электромагнитное поле внутри соленоида и внутри конденсатора однородным, т.е. E и H, а значит, D и B одинаковы в любой точке в объеме соленоида и конденсатора.

Для однородного электромагнитного поля система уравнений Максвелла упростится:

$$H\cdot\ell = \frac{\partial D}{\partial t}\cdot S = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\cdot S ; \qquad E\cdot\ell = -\frac{\partial B}{\partial t}\cdot S = -\mu_0\frac{\partial H}{\partial t}\cdot S ,$$

здесь $\ell=2\pi R$ – длина окружности соленоида (и пластин конденсатора); $S=\pi R^2$ – площадь поперечного сечения соленоида (площадь пластин конденсатора).

Так как колебательный контур подключен к источнику переменной ЭДС с постоянной частотой ω, то E и H также являются гармоническими функциями от времени, а производные по времени от них равны, соответственно:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \omega E \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \omega H .$$

Теперь рассмотрим отдельно каждый элемент.

а) Конденсатор. Согласно (2.16), максимальные значения объемных плотностей электрической и магнитной энергий внутри конденсатора для случая $\varepsilon=\mu=1$ будут равны:

$$w_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} ; \qquad w_H = \frac{\mu_0 H_0^2}{2} .$$

Для определения H_0 воспользуемся первым уравнением Максвелла:

$$H_0\cdot 2\pi R = \varepsilon_0\omega E_0\pi R^2 ,$$

откуда $H_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega E_0\omega$ и $w_H = \frac{1}{8}\varepsilon_0^2\mu_0\omega^2 E_0^2 R^2$.

Очевидно, что отношение энергий магнитного и электрического полей внутри конденсатора равно отношению их объемных плотностей:

$$\frac{w_H}{w_E} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\mu_0\omega^2 R^2 .$$

Это отношение существенно зависит от частоты колебаний $(w_H/w_E \sim \omega^2)$. Для заданной в задаче частоты и размеров конденсатора получим: $\frac{w_H}{w_E} = \frac{1}{4}\,8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 4\pi^2\,\frac{10^6}{\pi^2}\cdot 36\cdot 10^{-4} = 4\cdot 10^{-14}$.

б) Соленоид. Для определения E_0 внутри соленоида воспользуемся вторым уравнением Максвелла:

$$E_0\cdot 2\pi R = -\mu_0\omega H_0\pi R^2 .$$

Откуда объемные плотности электрической и магнитной энергий будут соответственно равны:

$$w_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{1}{8}\mu_0^2\varepsilon_0\omega^2 H^2 R^2 ; \qquad w_H = \frac{\mu_0 H^2}{2} .$$

Отношение их

$$\frac{w_E}{w_H} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\mu_0\omega^2 R^2 = 4\cdot 10^{-14} .$$

Произведенные расчеты показывают, что в конденсаторе энергия электромагнитного поля определяется в основном электрической компонентой, а в соленоиде наоборот, магнитной.

Г л а в а 3. Задачи для самостоятельного решения.

I. Ток $I=20$ А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением $S=1{,}0$ мм^2, создает в центре кольца напряженность магнитного поля $H=2{,}24$ Э. Какая разность потенциалов приложена к концам проволоки, образующей кольцо?

Ответ: $U=0{,}12$ В.

2. Напряженность магнитного поля в центре кругового витка радиусом II см равна 0,8 Э. Найти напряженность магнитного

поля на оси витка на расстоянии 10 см от его плоскости.

Ответ: $H = 25,7$ А/м.

3. Два круговых витка радиусом 4 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии 5 см друг от друга. По виткам текут токи $J_1 = J_2 = 4$ А. Найти напряженность магнитного поля в центре одного из витков. Задачу решить для случаев: I) токи в витках текут в одном направлении, 2) токи текут в противоположных направлениях.

Ответ: I) $H = 62,2$ А/м ;

2) $H = 38,2$ А/м .

4. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи силой $J_1 = 10$ А и $J_2 = 15$ А. Расстояние между проводами $a = 10$ см. Определить напряженность H магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на $r_1 = 8$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

Ответ $H = 44,5$ А/м.

5. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см, идет ток силой I=20 А. Определить магнитную индукцию в центре шестиугольника.

Ответ: $B = 138$ мкТл.

26. Длинный провод согнут так, как показано на рис.28, под прямым углом. Он расположен в плоскости магнитного меридиана. В точке О расположена магнитная стрелка, которая вращается вокруг оси OZ. Какой угол она образует с осью OX, если по проводу пропускать ток 20 А? Расстояние $OA = 2$ см. Принять горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли равной 0,2 э.

Ответ: $\varphi \approx 79°$.

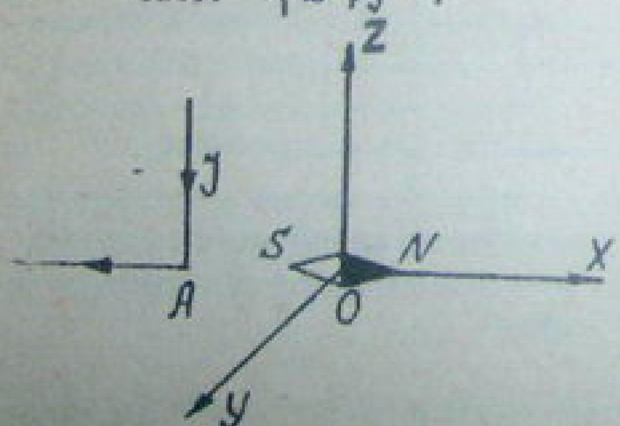


Рис. 28

7. Из проволоки диаметром I мм надо намотать соленоид, внутри которого напряженность магнитного поля должна быть равна 300 э. Предельная сила тока, которую можно пропускать по проволоке, равна 6 А. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Ответ: Из четырех слоев.

8. Обмотка катушки диаметром $d = 10$ см состоит из плотно прилегающих друг к другу витков тонкой проволоки. Определить минимальную длину катушки, при которой магнитная индукция в середине ее отличается от магнитной индукции бесконечного соленоида, содержащего такое же количество витков на единицу длины, не более чем на 0,5 %. Сила тока, протекающая по обмотке, в обоих случаях одинакова.

Ответ: $\ell = 1$ м.

9. Прямой бесконечный ток $J_1 = 10^4$ А расположен в плоскости квадратной рамки со стороной $a = 1$ м и массой $m = 1$ кг (рис. 29). При каком токе J_2 в рамке она будет "висеть" неподвижно в воздухе на расстоянии $b = 1$ м от прямого провода?

Ответ: $J_2 = 9800$ А .

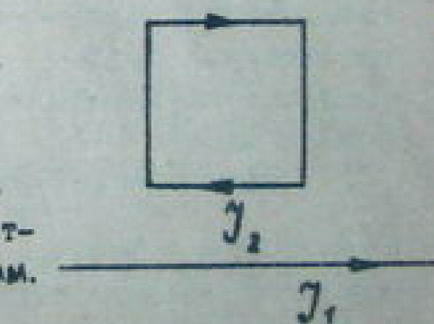


Рис.29

10. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной $a = 20$ см текут токи по $J = 10$ А. Определить силу взаимодействия контуров, если расстояние между соответственными сторонами контуров $d = 2$ мм.

Ответ: $F = 8$ мН .

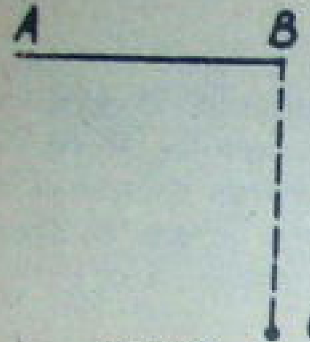
II. Электрический ток, величина которого $J = 0,5$ А, проходит по прямолинейному желобку с ртутью. Поблизости находится прямолинейный бесконечно длинный провод-ник, по которому протекает ток $J_1 = 1$ А. Расположение желобка с ртутью и прямого провода показано на рис.30. AB – желобок, через точку C перпендикулярно плоскости рисунка проходит прямой провод, $BC = AB = 10$ см. Определить, насколько уменьшилось сила давления ртути на дно желобка, когда включили ток.

Ответ: $F = 3,47 \cdot 10^{-8}$ Н .

I2. В однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположена круглая плоская рамка, состоящая из $N = 10$ витков площадью $S = 100$ см² каждый. В обмотке рамки идет ток $J = 3$ А. Каково должно быть направление тока в рамке, чтобы при повороте ее на 180° вокруг одного из диаметров силы поля совершили положительную работу?

Какова величина этой работы? Индукция поля $B = 1,8 \cdot 10^5$ Тл .

Ответ: $A = 1,1 \cdot 10^{-5}$ Дж .



I3. Плоский квадратный контур с стороной $a = 10$ см ,по которому течет ток $I = 100$ А , свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Определить работу, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: I) $\varphi_1 = 90°$; 2) $\varphi_2 = 3°$.

Рис.30

При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Ответ: $A_1 = 1$ Дж; $A_2 = 1,37$ мДж .

I4. Из проволоки длиной 20 см сделаны контуры: I)квадратный и 2) круговой. Найти вращающий момент сил, действующий на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле, индукция которого 1000 Гс . По контурам течет ток силой 2 А. Плоскость каждого контура составляет угол $45°$ с направлением магнитного поля.

Ответ: $M_1 = 3,53 \cdot 10^{-4}$ Н·м; $M_2 = 4,5 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

I5. Ток $I = 10$ А течет по полой тонкостенной трубе радиусом $R_2 = 5$ см и возвращается по сплошному проводнику радиусом $R_1 = 1$ мм , проложенному по оси трубы. Найти индукцию магнитного поля в точках,лежащих на расстоянии $r_1 = 6$ см и $r_2 = 2$ см от оси трубы. Чему равен магнитный поток единицы длины такой системы? Всю систему считать бесконечно длинной. Полем внутри металла пренебречь.

Ответ: $B_1 = 0$; $B_2 = 10^{-4}$ Тл ; $\Phi = 7,8 \cdot 10^{-6}$ Вб .

I6. В однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Т ,движется равномерно проводник длиной I0 см. По проводнику течет ток силой 2 А. Скорость движения проводника 20 см/с направлена перпендикулярно направлению магнитного поля. Найти: I) работу перемещения проводника за I0 с движения; 2)мощность, затраченную на это движение.

Ответ: I) $A = 0,2$ Дж; 2) $P = 2 \cdot 10^{-2}$ Вт .

I7. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400$ В , попал в однородное магнитное поле с индукцией

$B = 1,5$ мТл . Определить радиус кривизны траектории R и частоту n обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

Ответ: $R = 4,41 \cdot 10^{-2}$ м ; $n = 4,21 \cdot 10^{7}$ об/с .

I8. Электрон движется в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 50$ Гс , по винтовой линии с радиусом $R = 2$ см и шагом " винта" $h = 5$ см . Определить энергию электрона и направление вектора скорости в начальный момент.

Ответ: $W = 1,64 \cdot 10^{-16}$ Дж ; $\alpha = 68°$.

I9.Протон влетает со скоростью $v = 100$ км/с в область пространства,где имеется электрическое ($E = 210$ В/м)и магнитное ($B = 3,3$ мТ)поля,совпадающие по направлению.Определить для начального момента движения в поле ускорение протона,если направление скорости v: I) совпадает с направлением полей; 2)перпендикулярно этому направлению.

Ответ: $a_1 = 20,1$ Гм/с^2 ; $a_2 = 37,5$ Гм/с^2 .

20. Медная пластинка имеет длину $\ell = 60$ мм , ширину $b = 20$ мм и толщину $d = 1$ мм (рис. 3I).При пропускании вдоль пластинки тока силы $I = 10,0$ А , между точками I и 2 наблюдается разность потенциалов $U_{12} = 0,51$ мВ , разность потенциалов между точками 3 и 4 равна нулю. Если,не выключая тока, создать перпендикулярное к пластинке однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл , то между точками 3 и 4 возникает разность потенциалов $U_{34} = 0,55 \cdot 10^{-7}$ В. Воспользовавшись этими данными, определить для меди концентрацию свободных электронов n и их подвижность u .

Ответ: $n = 1,1 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$; $u = 3,2 \cdot 10^{-3}$ м^2/В·с .

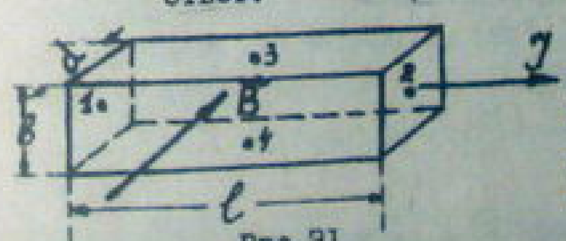


Рис.31

21.Квадратная рамка со стороной $a = 20$ см расположена в одной плоскости с прямым,бесконечно длинным проводом с током. Расстояние от провода до середины рамки $\ell = 1$ м . Вычислить относительную погрешность,которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию равной значению ее в центре рамки.

Ответ: $\Delta\Phi/\Phi = 0,167$ % .

22. Вблизи длинного прямого провода, по которому протекает ток $J_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка с током $J_2 = 1$ А (рис.32). Рамка и провод лежат в одной плоскости; стороны рамки $a = 68$ см, расстояние $b = 4$ см. Какую работу надо совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное пунктиром?

Ответ: $A = 2{,}72$ эрг.

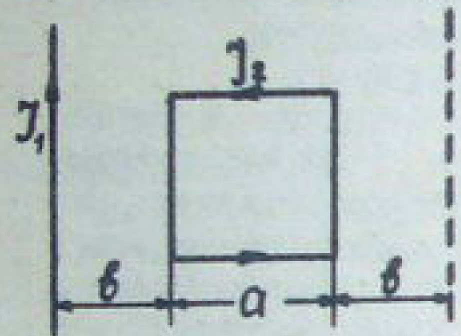


Рис. 32

23. Изолированный металлический диск радиусом $r = 250$ мм вращается с частотой $n = 1000$ об/мин. Найти разность потенциалов U между центром и краем диска, возникающую: I) в отсутствии магнитных полей; 2) при условии, что имеется перпендикулярное диску однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}00\cdot10^{-2}$ Тл.

Ответ: $U = 2{,}0\cdot10^{-9}$ В ; $U = 3{,}4$ В.

24. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл, находится прямой проводник длиной $l = 20$ см. Концы проводника замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $R = 0{,}1$ Ом. Найти силу, которую надо приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 2{,}5$ м/с.

Ответ: $F = 1$ Н.

25. Прямой проводник длиной $l = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с напряженностью $H = 8\cdot10^5$ А/м. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $R = 0{,}4$ Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям напряженности со скоростью $v = 20$ м/с?

Ответ: $P = 10$ Вт.

26. Найти циркуляцию вектора $\vec{H}$ в двух случаях, изображенных на рис. 33, а и б, если сила тока в обоих проводниках $J = 1$ А.

Ответ: а) $C = 0$; б) $C = 16$ А.

27. По длинному медному проводу течет ток $J = 10$ А. Вычислить магнитный поток, приходящийся на I м длины провода, через плоскую поверхность внутри провода, как показано на рис.34.

Ответ: $\Phi = 1{,}0\cdot10^{-6}$ Вб/м.

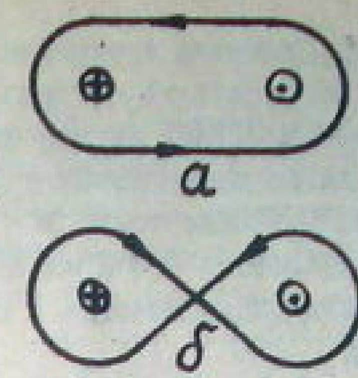


Рис. 33

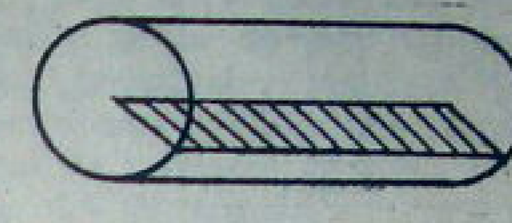


Рис. 34

28. Обмотка тонкой тороидальной катушки с железным сердечником состоит из $N = 500$ витков. Средний радиус тороида $r = 8$ см. Найти индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость и намагниченность сердечника, если ток в обмотке $J = 0{,}5$ А. Зависимость магнитной индукции от напряженности поля для данного сорта железа считать известной.

Ответ: $B = 1{,}07$ Тл; $\mu = 1{,}7\cdot10^3$; $J = 0{,}85\cdot10^6$ А/м.

29. Тонкий металлический стержень длиной $l = 1200$ мм вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной ему оси, отстоящей от одного из концов стержня на расстояние $l_1 = 250$ мм, делая $n = 120$ об/мин. Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и имеет величину $B = 1{,}00\cdot10^{-3}$ Тл. Найти разность потенциалов U, возникающую между концами стержня.

Ответ: $U = 5{,}3$ мВ.

30. Рамка площадью $S = 100$ см^2 содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением $R_1 = 12$ Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $R_2 = 20$ Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл), делая $n = 8$ об/с. Чему равно максимальное значение мощности переменного тока в цепи?

Ответ: $P_{макс} = 79$ Вт.

31. На рис. 35 изображен медный стержень, движущийся со скоростью v параллельно длинному прямому проводу с током I. Вычислить индуцируемую в стержне ЭДС, положив $v = 5{,}0$ м/с, $J = 100$ А, $a = 1{,}0$ см, $l = 20$ см.

Ответ: $\mathcal{E}_i = 3{,}0\cdot10^{-4}$ В.

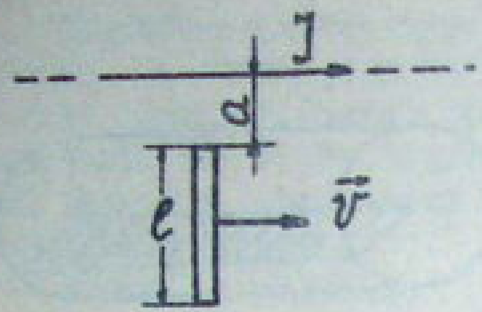


Рис. 35

32. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N=1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $J=4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида.

Ответ: $L = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Гн.

33. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода. Диаметр провода $d = 0,2$ мм, диаметр соленоида $D = 5$ см. По соленоиду течет ток $J = 1$ А. Определить, какое количество электричества протечет через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Ответ: $q = 3,63 \cdot 10^{-4}$ Кл.

34. Нужно изготовить соленоид из медного провода диаметром $d = 0,6$ мм. Длина соленоида $l = 20$ см. Какое должно быть поперечное сечение, если индуктивность соленоида должна быть $L = 0,01$ Гн?

Ответ: $S = 1,43 \cdot 10^{-2}$ м^2.

35. Длина железного сердечника тороида равна 2,5 м, длина воздушного зазора I см. Число витков в обмотке тороида равно 1000. При силе тока 20 А индукция магнитного поля в воздушном зазоре I,6 Тл. Определить магнитную проницаемость железного сердечника при этих условиях (зависимость B от H для данного сорта железа неизвестна).

Ответ: $\mu = 440$.

36. Определить силу тока в цепи через $t = 0,01$ с после ее размыкания. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом и индуктивность $L = 0,1$ Гн. Сила тока до размыкания цепи $J_0 = 50$ А.

Ответ: $J = 6,75$ А.

37. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\Delta J/\Delta t = 5$ А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции $\varepsilon_i = 0,1$ В. Определить коэффициент взаимной индукции катушек.

Ответ: 20 мГн.

38. Соленоид имеет длину $l = 20$ см, площадь поперечного сечения $S = 10$ см^2 и число витков $N = 400$. Соленоид находится в диамагнитной среде. Индуктивность его $L = 10^{-3}$ Гн. Найти магнитную индукцию и вектор намагничения внутри соленоида, если по соленоиду проходит ток величиной $J = 2$ А.

Ответ: $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Т; $J \approx 20$ А/м.

39. Тороидальная катушка (без сердечника) состоит из двух обмоток, навитых одна поверх другой, по тысяче витков каждая. Обмотки соединены последовательно, магнитные поля их направлены в одну сторону. Найти магнитную энергию такой катушки. Как изменится эта энергия, если одну из обмоток отключить? Ток в обмотке $J = 5$ А, средняя длина тороида $l = 25$ см, поперечное сечение $S = 1$ см^2.

Ответ: $W = 25 \cdot 10^{-3}$ Дж, уменьшится в четыре раза.

40. На стержень из немагнитного материала длиной $l = 50$ см и сечением $S = 2$ см^2 намотан в один слой провод так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится 20 витков. Определить энергию W магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке $J = 0,5$ А.

Ответ: $W = 1,26 \cdot 10^{-4}$ Дж.

41. У изображенного на рис. 36 коаксиального кабеля радиусы проводников $r_1 = 1,0$ мм, $r_2 = 4,0$ мм и $r_3 = 5,0$ мм. По внутреннему проводу течет ток $J = 10$ А, а по наружному течет ток той же величины, но обратного направления. Вычислить и сравнить между собой магнитные энергии, приходящиеся на I м длины кабеля внутри центрального проводника, в пространстве между проводниками и внутри наружного проводника.

Ответ: $2,5 \cdot 10^{-6}$ Дж/м; $1,4 \cdot 10^{-5}$ Дж/м; $0,8 \cdot 10^{-6}$ Дж/м.

42. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 0,025$ мкФ и катушку, индуктивность которой $L = 1,015$ Гн, а сопротивление пренебрежимо мало. Конденсатор зарядили до величины $Q_0 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Записать выражение для разности потен-

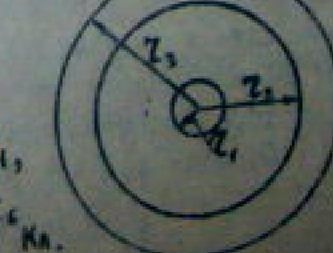


Рис. 36

циалов $U_c(t)$ и для тока в цепи $J(t)$, если конденсатор начал разряжаться в момент времени $t=0$.

2. Вычислить U_c и J в моменты времени $t=T/8, T/4, T/2$.

3. Представить графически зависимости $U_c(t)$ и $J(t)$ для интервала времени, равного одному периоду колебаний.

Ответ: $U_1 = 70{,}7$ В ; $J_1 = -1{,}11 \cdot 10^{-2}$ А ;

$U_2 = 0$; $J_2 = -1{,}57 \cdot 10^{-2}$ А ;

$U_3 = -100$ В ; $J_3 = 0$.

43. Уравнение свободных колебаний в LC – контуре задано в виде: $J = -0{,}02 \sin 400\pi t$ (А).

Зная, что индуктивность контура $L = 1$ Гн , определить: I) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) амплитудное значение разности потенциалов на зажимах конденсатора; 4) максимальное значение энергий электрического и магнитного полей в контуре.

Ответ: $T = 5 \cdot 10^{-3}$ С ; $C = 6{,}3 \cdot 10^{-7}$ Ф ;

$U_0 = 25{,}2$ В ; $(W_c)_{max} = (W_L)_{max} = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж .

44. Электромагнитные колебания в LC – контуре заданы уравнением разности потенциалов на зажимах конденсатора: $U_c = 50 \cos(10^4 \pi t + \pi/3)$.

Зная, что емкость конденсатора равна 10^{-7} Ф, найти: I) индуктивность контура; 2) выражение для силы тока $J(t)$; 3) отношение энергий магнитного и электромагнитного полей в контуре в момент времени $t=T/6$; 4) представить графически зависимости $U_c(t)$ и $J(t)$ для интервала времени, равного одному периоду колебаний.

Ответ: $L = 1{,}015 \cdot 10^{-2}$ Гн ; $W_L/W_c = 1{,}73$ В.

45. В колебательном контуре, индуктивность которого $L = 2$ мГн , установились электромагнитные колебания с частотой $\nu = 500$ Гц и амплитудным значением силы тока $J_0 = 3$ мА. Вычислить : I) емкость конденсатора; 2) полную энергию в контуре; 3) амплитудное значение разности потенциалов на зажимах конденсатора. Сопротивлением контура пренебречь.

Ответ: I) $C = 5 \cdot 10^{-5}$ Ф ; 2) $W = (W_L)_{max} = 9 \cdot 10^{-9}$ Дж ;

3) $U_c = 0{,}019$ В .

46. Напряжения U_x и U_y приложены соответственно к горизонтальным и вертикальным отклоняющим пластинам осциллографа. Какие фигуры будет описывать электронный луч на экране осциллографа, если напряжения U_x и U_y определены уравнениями:

1) $U_x = 2 \sin \omega t$ и $U_y = 2 \cos \omega t$;

2) $U_x = \cos \pi t$ и $U_y = \cos \frac{\pi}{2} t$;

3) $U_x = \sin \pi t$ и $U_y = 4 \sin(\pi t + \pi)$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 4$; $2y^2 - x = 1$; $y = -4x$.

47. Конденсатор предварительно зарядили до разности потенциалов $U_c = 120$ В , затем отключили от источника и подключили к катушке с неизвестными параметрами. Включенный в цепь амперметр показал эффективное значение силы тока $J_{эфф} = 6$ мА. Пренебрегая сопротивлением цепи, найти: I) период колебаний в контуре; 2) индуктивность катушки; 3) величину заряда и энергию в конденсаторе в момент времени, когда ток в 2 раза меньше своего максимального значения.

Ответ: $T = 0{,}79 \cdot 10^{-4}$ с ; $L = 0{,}2$ Гн ;

$q = 8{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл , $W_c = 3{,}65 \cdot 10^{-6}$ Дж .

48. Период гармонических колебаний в контуре $T = 2 \cdot 10^{-3}$ с, эффективное значение разности потенциалов на зажимах конденсатора $(U_c)_{эфф} = 127$ В , энергия электромагнитных колебаний $W = 3 \cdot 10^{-15}$ Дж. Зная, что в начальный момент времени $t=0$ заряд конденсатора был в 2 раза меньше своего максимального значения, записать выражение для силы тока в зависимости от времени.

Ответ: $J = 1{,}05 \cdot 10^{-3} \cos(10^3 \pi t + \pi/6)$ (А).

49. Период собственных электромагнитных колебаний в контуре $T = 4 \cdot 10^{-3}$ с, логарифмический декремент затухания $\theta = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$, начальная фаза $\varphi_0 = \pi/4$. В момент времени $t_1 = \frac{T}{4}$ заряд конденсатора был равен $q(t_1) = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл . Записать уравнение колебаний тока в контуре и нарисовать график изменения тока в зависимости от времени за интервал, равный двум периодам колебаний.

Ответ: $J = 0{,}445\, e^{-4t} \cos(500\pi t + \pi/4)$ (А).

50. Колебательный контур составлен из конденсатора емкостью $C=50$ мкф, катушки, индуктивность которой $L=0{,}5$ Гн и сопротивление $R_L=100$ Ом. Конденсатор предварительно был заряжен до разности потенциалов 1000 В, затем его подключили к катушке.

1. Определить логарифмический декремент затухания контура.

2. Записать выражение для $U_C(t)$.

3. Вычислить полную энергию в контуре в моменты времени $t=0$ и $t=T$.

Ответ: $\theta=3{,}62$; $U_C=1154\,e^{-100t}\sin(173t+\pi/6)$;

$W_1=25$ Дж; $W_2=1{,}8\cdot10^{-2}$ Дж.

51. Колебательный контур состоит из конденсатора $C=7$ мкФ, катушки индуктивности $L=0{,}23$ Гн $R_L=40$ Ом. В начальный момент времени $t=0$ конденсатор был заряжен количеством электричества $Q_0=5{,}6\cdot10^{-4}$ Кл.

1. Вычислить период собственных колебаний.

2. Вычислить логарифмический декремент затухания.

3. Записать выражения для разности потенциалов на зажимах конденсатора $U_C(t)$.

4. Вычислить U_C в моменты времени $t=T/2$, T, $3T/2$, $2T$.

5. Нарисовать график функции $U_C(t)$.

6. Вычислить силу тока в цепи в момент времени $t=0$.

Ответ: $T=8\cdot10^{-3}$ с; $\theta=0{,}7$; $U_C=80\,e^{-87{,}5t}\cos 250\pi t$;

$U_1=-56{,}5$ В, $U_2=40$ В, $U_3=-28$ В, $U_4=20$ В; $J_0=-4{,}9\cdot10^{-2}$ А.

52. Колебательный контур состоит из индуктивности $L=5\cdot10^{-3}$ Гн, емкости $C=1{,}1\cdot10^{-8}$ Ф и сопротивления R. Логарифмический декремент затухания равен 0,005.

1. Во сколько раз уменьшится амплитудное значение силы тока через время, равное одному периоду колебаний?

2. В какой момент времени электромагнитная энергия контура будет составлять 1% от своей первоначальной величины?

3. Какое минимальное сопротивление R нужно включить в колебательный контур, чтобы в цепи наблюдался монотонный процесс уменьшения силы тока без колебаний (такое сопротивление называется критическим $R_{кр}$)?

Ответ: 2) $t=6{,}8\cdot10^{-3}$ с; 3) $R_{кр}=2\sqrt{L/C}=4{,}26\cdot10^{3}$ Ом.

53. Батарея представляет собой блок из двух конденсаторов емкостью 2 мкф каждый. Ее подключают к катушке $L=1$ мГн и сопротивлению $R_L=5$ Ом. Могут ли возникнуть электромагнитные колебания в этой системе, если конденсаторы включены: а) последовательно; б) параллельно.

Ответ: а) нет; б) да.

54. Заряженный конденсатор емкостью $C=0{,}2$ мкФ подключают к катушке, индуктивность которой $L=5{,}07\cdot10^{-3}$ Гн.

1. Определить сопротивление катушки, если известно, что амплитудное значение разности потенциалов на зажимах конденсатора уменьшается в два раза, за время, равное 10^{-3} с.

2. Вычислить логарифмический декремент затухания.

3. Каково сопротивление R' и как нужно его подключать, чтобы амплитуда силы тока уменьшилась в 1,5 раза за время, равное 10^{-3} с?

Ответ;

$$R_L=\frac{\ln 2}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}=17{,}5\text{ Ом};\quad \theta=\pi R\sqrt{\frac{C}{L}}=0{,}34.$$

3) Параллельно катушке нужно подключить сопротивление R':

$$R'=\frac{R_L\cdot R_1}{R_L-R_1},\ \text{где}\ R=\frac{\ln 1{,}5}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}=10{,}2\text{ Ом};\ R'=23{,}5\text{ Ом}$$

55. Определить электромагнитную энергию W в колебательном контуре RLC в момент времени $t=0$, энергию W_1 в момент времени $t_1=T/4$, если заряд конденсатора в начальный момент времени $t=0$ был равен Q_0. Показать, что разность энергий W_0-W_1 равна энергии, выделяемой на сопротивление R за время t_1 (с). Предполагается, что затухание в контуре мало, т.е. коэффициент затухания $\delta\ll\omega$.

Ответ:

$$W_1=W_0\left(1-\frac{\pi R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\right);\quad \Delta W=W_0-W_1=\frac{\pi R}{4\omega}J_0^2.$$

56. Последовательно соединенный колебательный контур с параметрами $L=1{,}27$ Гн, $C=1{,}59$ мкФ и $R=800$ Ом включен в сеть 127 В, 50Гц. Определить: 1) эффективное значение тока в цепи $J_{эфф}$; 2) разность фаз φ между током и напряжением сети; 3) эффективные значения разности потенциалов на каждом элементе колебательного контура; 4) мощность, потребляемую контуром от источника.

Ответ: 1) $J_{эфф}=7{,}2\cdot10^{-2}$ А; 2) $\varphi=-28^\circ$; 3) $U_R=60$ В, $U_L=38$ В, 4) $U_C=150$ В $W=4{,}5$ Вт.

57. Колебательный контур RLC включен в сеть 220В, 50 Гц (рис.37). Параметры контура: $R = 22$ Ом; $L = 0,318$ Гн, а емкость C изменяется таким образом, чтобы вольтметр V показывал максимальное значение. Определить показания вольтметра V и амперметра A, пренебрегая их собственными сопротивлениями.

Ответ: $U_L = 10^3$ В; $J = 10$ А.

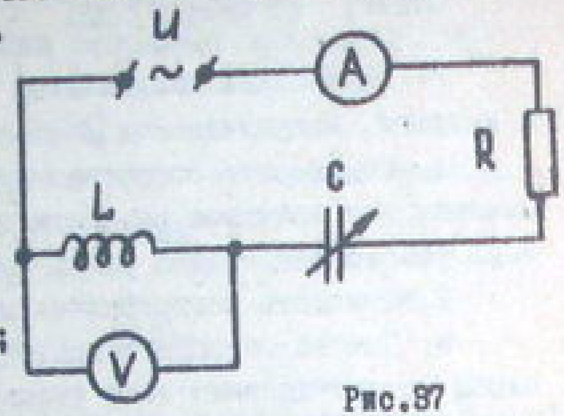


Рис.37

58. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкф и сопротивлением $R = 2$ кОм включены последовательно в сеть 120В, 50 Гц.
1. Определить: а) импеданс цепи Z; б) силу тока в цепи; в) мощность, выделяемую в цепи; г) показания вольтметра, подключенного к сопротивлению R, затем к конденсатору C.
2. Какая картина будет наблюдаться на экране осциллографа, если горизонтальные пластины его подключены к сопротивлению R, а вертикальные к конденсатору C?
3. Какую индуктивность нужно включить последовательно в цепь, чтобы наблюдать резонанс тока?

Ответ: 1) $Z = 3,7 \cdot 10^3$ Ом; $J = 3,25 \cdot 10^{-2}$ А; $P = 2,1$ Вт; $U_R = 65$ В; $U_C = 102$ В 3) $L = 10$ Гн.

59. Собственные колебания LC-контура заданы следующим уравнением для разности потенциалов на зажимах конденсатора: $U_c = 50 \cos 10^4 \pi t$ (В). Зная, что емкость конденсатора $C = 9 \cdot 10^{-7}$ Ф, определить: 1. период колебаний контура; 2) индуктивность контура; 3) выражение для силы тока $J(t)$; 4) длину волны, на которую настроен контур.

Ответ: $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; $L = 1,015 \cdot 10^{-2}$ Гн; $\lambda = 6 \cdot 10^4$ м.

60. Резонансный контур на входе радиоприемника, настроенный на радиоволну длиной λ, состоит из конденсатора емкостью $C = 25$ пФ и катушки, индуктивность которой $L = 10$ мкГн и сопротивление $R_L = 0,01$ Ом. Радиоволны наводят в контуре ЭДС, эффективное значение которой равно 0,1 мкВ. Определить: 1) длину волны λ; 2) эффективное значение силы тока в контуре $J_{эфф}$; 3) эффективное значение разности потенциалов на конденсаторе; 4) как нужно изменить емкость конденсатора, чтобы перестроить контур на другую радиоволну, длина которой λ в два раза больше предыдущей?

Ответ: 1) $\lambda = 30$ м; 2) $J_{эфф} = 10^{-5}$ А; 3) $U_c = 6,3 \cdot 10^{-3}$ В; 4) Увеличить в 4 раза.

61. Плоская электромагнитная волна, распространяясь в вакууме, наводит ЭДС в антенне в виде квадратной рамки, ориентация которой относительно волны показана на рис.38.

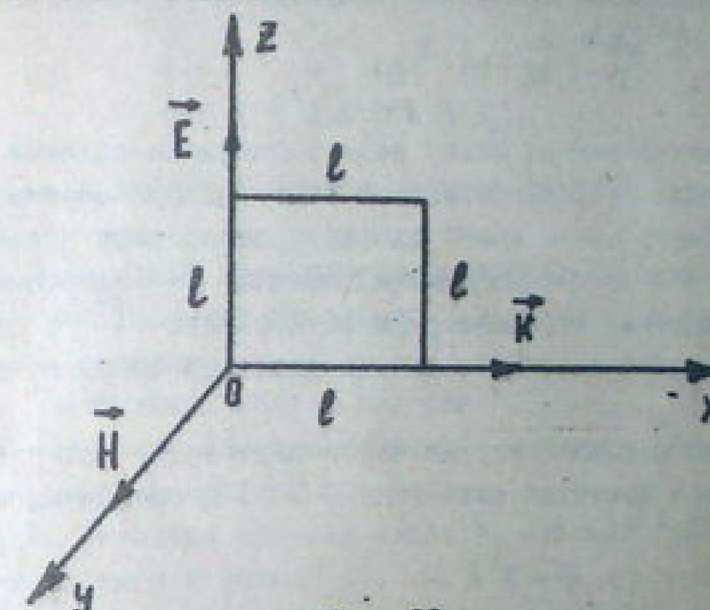


Рис. 38

Амплитудное значение напряженности электрического поля в волне $E_0 = 50$ мВ/м, частота колебаний $\nu = 100$ МГц. Параметры антенны $l = 0,5$ м, индуктивность рамки $L = 0,2$ мкГн, собственное сопротивление $R_L = 0,1$ Ом. Определить: 1) эффективное и амплитудное значения наведенной в антенне ЭДС; 2) эффективное значение силы тока в антенне; 3) емкость конденсатора, который нужно включить последовательно с рамкой, чтобы контур был настроен в резонанс с падающей электромагнитной волной? На какую длину волны настроен контур? 4) эффективное значение силы тока и разности потенциалов на конденсаторе резонансного контура.

Ответ: 1) $\mathcal{E}_{эфф} = 17,7$ В; 2) $J_{эфф} = 0,14$ мА; 3) $C = 12,5$ мкФ, $\lambda = 3$ м; 4) $J_{эфф} = 0,177$ А, $(U_c)_{эфф} = 22,5$ В.

62. Вычислить энергию электромагнитного излучения, падающего от космического источника на антенну радиотелескопа, настроенного на длину волны $\lambda = 3$ мм, за время, равное одному периоду колебаний. Известно, что амплитуда напряженности электрического поля в волне $E_0 = 10^{-6}$ В/м и площадь антенны $S = 10$ м^2.

- Ответ: $W_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon S E_0^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-25}$ Вт.

63. Плоская электромагнитная волна распространяется в направлении оси OX. Определить среднюю за период колебаний энергию, переносимую волной через площадку $S = 1\ см^2$, расположенную под углом 45° к оси OX за время, равное одному периоду колебаний. Амплитуда напряженности электрического поля $E_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ В/м.

Ответ: $W = 2{,}32 \cdot 10^{-12}$ Вт.

64. Двухпроводная линия электропередачи сделана из идеально проводящих шин, сопротивление которых пренебрежимо мало. Одна пара концов линии присоединена к генератору переменного тока, другая – к некоторому сопротивлению R (нагрузке).

I. Показать, что вектор Умова-Пойтинга $\vec{P}$ в пространстве между проводами направлен всегда вдоль проводов от генератора к нагрузке.

2. Найти поток энергии через поперечное сечение линии передачи, если известна сила тока J, потребляемого в нагрузке.

Ответ: 2) $\Phi = J^2 R$.

65. Время распространения электромагнитной волны с частотой $\nu = 5$ МГц в коаксиальном кабеле длиной ℓ увеличилось на 20% после того, как пространство между внешним и внутренним проводами заполнили диэлектриком.

I. Определить диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

2. Вычислить длину электромагнитной волны в кабеле с диэлектрика.

3. Чему должна быть равна длина ℓ кабеля, чтобы время распространения волны в кабеле было равно $T/2$ (T-период колебаний)?

Ответ: I) $\varepsilon = 1{,}42$; 2) $\lambda = 50$ м; 3) $\ell = \lambda/2 = 25$ м.

66. Определить электромагнитную энергию, которую несет с собой бегущая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль воздушного концентрического волновода без потерь. Показать, что энергия, протекающая через сечение волновода в единицу времени, равна мощности, которую отдает источник, подключенный к волноводу. Внешнюю оболочку волновода считать тонкостенной.

Ответ: $\frac{dW}{dt} = \int_S E H dS = \frac{C_1 U J}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$, где $C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$ – электроемкость единицы длины воздушного волновода. $\frac{dW'}{dt} = U \cdot J$.

ОГЛАВЛЕНИЕ