

621.431.79

Ч-89.

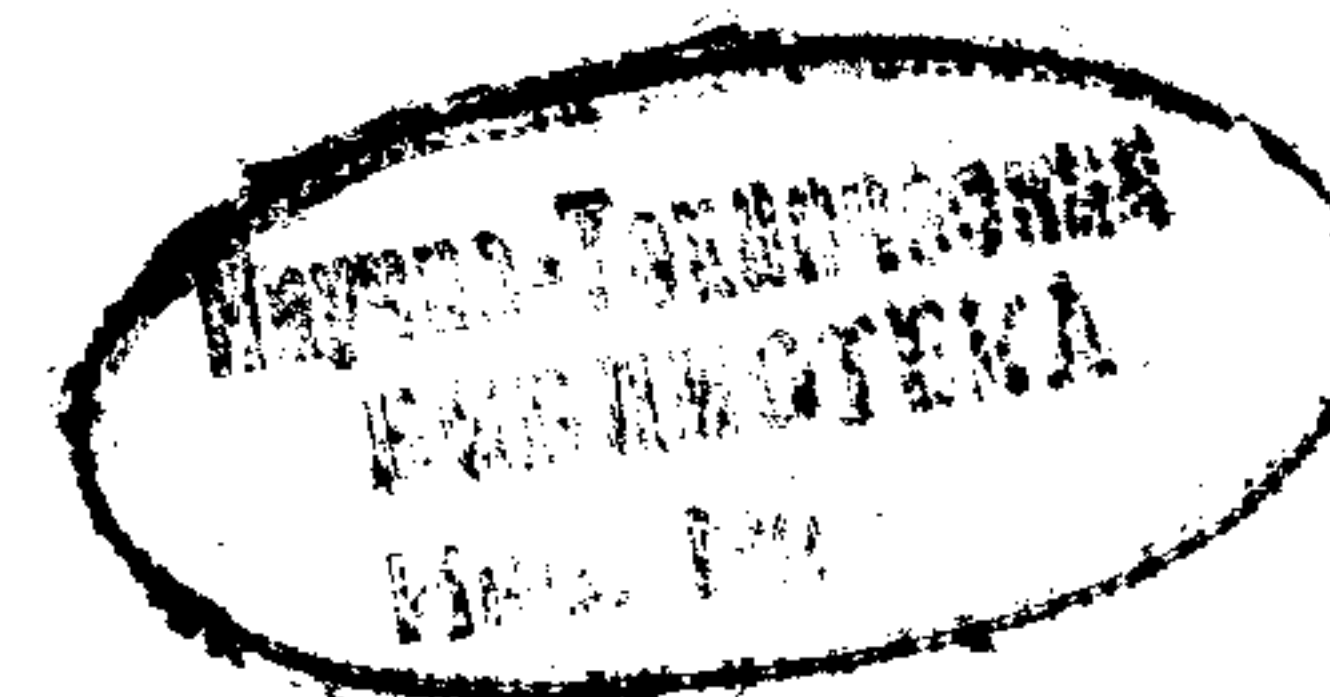
П. А. ИСТОМИН

# КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СУДОВЫХ ДВС

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов кораблестроительных вузов и факультетов*

П. 2. 1989

58401



Издательство „Судостроение“  
Ленинград  
1968



В книге изложены теория и практические расчеты крутильных колебаний валопроводов судовых дизельных установок, которые полностью распространяются на аналогичные стационарные установки и установки с карбюраторными двигателями.

Крутильные колебания линейных систем даны в объеме, достаточном для выполнения практических расчетов. Освещены вопросы борьбы с крутильными колебаниями, в частности — применение успокоителей колебаний и их расчет. Кроме того, даны понятия о сущности и расчете крутильных колебаний нелинейных систем.

Рассмотрены методы экспериментального исследования крутильных колебаний и приборы для регистрации динамических явлений, возникающих в валопроводах судовых силовых установок.

Включенные в книгу численные примеры, необходимые для выполнения расчетов, вспомогательные таблицы, а также методика изложения курса позволяют использовать учебник на заочном и вечернем факультетах.

Учебник предназначен для студентов кораблестроительных вузов. Книга может быть рекомендована инженерно-техническим работникам конструкторских бюро заводов и проектных организаций, занимающимся проектированием поршневых ДВС и установок с ними.

В учебнике 97 рисунков, 22 таблицы, 77 библиографических источников.

3—18—5

68—6

**ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ ИСТОМИН**  
**КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СУДОВЫХ ДВС**

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. Ю. П. Васильев  
доктор техн. наук, проф. А. С. Орлин

Научный редактор Г. Д. Кортын. Редактор Е. Н. Шаурак

Технический редактор Д. М. Крякова. Корректор О. И. Скрылева

Оформление переплета художника Ю. С. Детинкина

Сдано в набор 28/VI 1968 г. М-44302. Подписано к печати 1/X 1968 г. Формат издания 60×90<sup>1/16</sup>.  
Печ. л. 19,25 (в т. ч. 1 вкл.) Уч.-изд. л. 17,5. Изд. № 2069-67. Тираж 6000 экз. Цена 61 коп.  
Заказ № 1263. Бумага типографская № 2.  
Издательство „Судостроение“. Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, 8.

Ленинградская типография № 4 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Социалистическая, 14.

**От автора**

Расчет крутильных колебаний валопроводов является обязательным элементом проектирования судовых силовых установок. Для выполнения подобных расчетов в практике отечественного судостроения широко используется метод, предложенный В. П. Терских.

Прикладной характер этой дисциплины и трудность ее освоения побудили автора уделить большое внимание практической стороне вопроса, т. е. выполнению необходимых расчетов, что способствует уяснению физической сущности рассматриваемых явлений.

Существенной трудностью при создании учебника была необходимость изложения, позволяющего использовать этот учебник для разных специальностей.

Учитывая эту особенность, автор рекомендует:

— для студентов недизельных специальностей ограничиться изучением гл. 1;

— для изложения краткого курса по методу В. П. Терских базироваться на материалах, изложенных в гл. 1, гл. 2, гл. 3 (за исключением § 23 и 26 — 32), гл. 4, гл. 5 (за исключением § 48 — 50), гл. 6, гл. 7 (за исключением § 64, 66 и 67), § 65, 76—78, 80—82 и гл. 10;

— для изучения более краткого курса по методу Толле базироваться на материалах, изложенных в гл. 1, гл. 2, § 12, 13, 14, 24, 25, 31, 32, гл. 4, гл. 5 (за исключением § 48—50), гл. 6, § 60, 62, 65, 76, 77, 79, 80, 81, 82 и гл. 10;

— для изучения полного курса использовать весь материал, помещенный в учебнике, за исключением § 85—89, предназначенных для дополнительной проработки в процессе дипломного проектирования.

Все формулы и расчеты представлены в системе единиц МКГСС, поэтому размерности указаны только в отдельных случаях для пояснения физического смысла некоторых величин.

При участии автора гл. 8 написана канд. техн. наук Г. И. Бухариной, а гл. 9 и 10 канд. техн. наук В. В. Алексеевым, за что автор приносит им глубокую благодарность.

Кроме того, автор выражает глубокую признательность д. т. н., проф. В. П. Терских, работы и советы которого он широко использовал при составлении учебника, д. т. н., проф. А. С. Орлину, в соддержательной рецензии которого автор нашел много полезных советов, и научному редактору, к. т. н. Г. Д. Кортыну, тщательно просмотревшему рукопись и сделавшему ряд ценных рекомендаций.



## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A_y$  — амплитуда колебаний  $y$ -й массы  
 $A_{yR}$  — то же резонансная  
 $B_{y, y+1}$  — амплитуда деформации соединения  
 $c$  — число масс, расположенных до двигателя (в индексе)  
 $e_{y, y+1}$  — податливость соединения между  $y$ -й и  $y+1$ -й массами  
 $E_{y, y+1}$  — то же безразмерная  
 $e_0$  — постоянная при переходе к безразмерной системе  
 $E_{y, y+1}^{(1)}$  — податливость части системы от соединения  $y, y+1$  до 1-й массы  
 $E_{y, y+1}^p$  — податливость части системы от соединения  $y, y+1$  до  $p$ -й массы  
 $E_{y, y+1}^{(1)(p)}$  — податливость всей системы на соединении  $y, y+1$   
 $F_{y, y+1}$  — амплитуда эластического момента при вынужденных колебаниях  
 $F_{y, y+1}$  — то же безразмерная  
 $G$  — модуль упругости второго рода  
 $G_y$  — амплитуда демпфирующего момента на  $y$ -й массе  
 $G_{y, y+1}$  — то же в  $y, y+1$ -м соединении  
 $H_y$  — стойкость  $y$ -й массы  
 $H_y$  — то же безразмерная  
 $H_y^{(1)}$  — стойкость части системы от  $y$ -й до 1-й массы  
 $H_y^{(p)}$  — то же до  $p$ -й массы  
 $H_y^{(1)(p)}$  — стойкость всей системы на  $y$ -й массе  
 $H_z^{(1)}$  — стойкость части системы, состоящей из группы равных масс в начале системы  
 $i_y$  и  $i_{y, y+1}$  — передаточные отношения в редукторе для массы и соединения  
 $k$  — индекс выделяемой массы, например, места надлома  
 $k+1$  — то же для соединения  
 $l$  — длина участка вала  
 $M_y$  — возмущающий момент на  $y$ -й массе (амплитуда)  
 $M_y$  — то же безразмерный  
 $m_y$  — то же, отнесенный к моменту на 1-й массе  
 $M_z^{(1)}$  — возбудитель системы на  $z$ -й массе  
 $M_z^{(1)}$  — то же безразмерный  
 $M_t^{(1)(p)}$  — возбудитель системы на  $t$ -й массе  
 $N$  — частота колебаний в минуту  
 $n$  — число оборотов вала в минуту  
 $n_R$  — то же при резонансе  
 $p$  — число всех масс системы (индекс)  
 $T$  — период колебаний  
 $V_y$  — демпфирующий момент на  $y$ -й массе  
 $V_{y, y+1}$  — то же в соединении

- $W_{тр}$  — работа сил трения  
 $z$  — число цилиндров двигателя  
 $\alpha_y$  — безразмерная амплитуда  $y$ -й массы  
 $\sqrt{\Delta}$  и  $\Delta$  — безразмерная частота колебаний и ее квадрат  
 $\Delta_e$  — квадрат частоты  $e$ -узловой формы свободных колебаний  
 $\delta_{y, y+1}$  — безразмерная амплитуда эластического момента в соединении  $y, y+1$  при частоте свободных колебаний данной формы  
 $\theta_0$  — постоянная системы  
 $\theta_y$  — момент инерции  $y$ -й массы  
 $\vartheta_y$  — то же безразмерный  
 $\mu_y$  и  $\mu_{y, y+1}$  — удельное трение на  $y$ -й массе и в соединении  $y, y+1$   
 $\nu$  — порядок гармонического возмущающего момента  
 $\xi_y$  и  $\xi_{y, y+1}$  — начальные фазы колебаний и эластических моментов  
 $\xi_{y, 1}$  — угол поворота  $y$ -го кривошипа по отношению к первому или угол поворота вала между вспышками в  $y$ -м и 1-м цилиндрах  
 $\tau$  — безразмерное время  
 $\varphi_y$  — фаза колебаний  $y$ -й массы  
 $\psi_y$  — начальная фаза возмущающего момента на  $y$ -й массе  
 $\Omega$  — угловая скорость коленчатого вала  
 $\omega$  — круговая частота колебаний  
 $\omega_e$  — то же для  $e$ -узловой формы колебаний  
 Черточка над символом обозначает, что соответствующая величина выражена в комплексной форме.



## Введение

Настоящий курс посвящен изучению движения, деформаций и напряжений в валопроводах силовых установок с ДВС. Весь валопровод, включая коленчатый вал двигателя, вал приемника энергии и все промежуточные валы, рассматривается как упругое тело, которое деформируется под действием приложенных к нему крутящих моментов.

Помимо крутящих моментов, на валопровод действуют и другие силы, вызывающие в нем продольные и поперечные деформации, однако соответствующие колебательные явления значительно реже приводят к авариям. В настоящем курсе они не рассматриваются.

Явление крутильных колебаний впервые было описано Бауером (Bauer) в 1900 г. в связи с некоторыми особенностями работы валопровода судовой паросиловой установки. Спустя два года Гюмбель (Gumbel) и Фрам (Frahm) описали два случая поломки коленчатых валов на пароходах. Так как ни методики расчета, ни специальных приборов для регистрации крутильных колебаний в то время еще не существовало, Фрам мог исследовать напряжения в валопроводе только с помощью торсионметра — прибора, предназначенного для замера крутящего момента, передаваемого участками валов. Тем не менее Фрам установил, что в валопроводе наблюдаются напряжения переменного знака и правильно объяснил причину этого явления наличием крутильных колебаний. Позднее в технической литературе появилось несколько статей с описанием подобных явлений в судовых и стационарных установках.

Первое теоретическое исследование сущности и основных свойств крутильных колебаний было дано в статье проф. С. П. Тимошенко «К вопросу о явлениях резонанса в валах» в 1905 г. Однако первый примитивный расчет крутильных колебаний был предложен только в 1912 г. Гюмбелем.

В связи с появлением (после мировой войны 1914 г.) облегченных многоцилиндровых двигателей с повышенным числом оборотов аварии валопроводов значительно участились. Это побудило к усиленной работе над теорией крутильных колебаний. В 1916 г. была опубликована работа К. Э. Рериха «Маховое колесо и периодическая неравномерность вращения машин» и был описан первый прибор для экспериментального исследования крутильных колебаний — торсиограф Гейгера (Geiger).

В 1921 г. в печати появились три работы, посвященные расчету свободных крутильных колебаний простых систем: Хольцер

(Holzer) предложил аналитический метод (по существу совпадавший со способом Гюмбеля); несколько иной метод предложил Виллер (Widler); наиболее удачным оказался метод Толле (Tolle), впоследствии распространенный на разветвленные и замкнутые дискретные линейные системы.

Расчет по методу Толле производится в табличной форме и занимает сравнительно немного времени; однако для случаев систем с большим числом масс, при исследовании колебаний с тремя и большим числом узлов, он требует большой вычислительной работы, так как производится с многозначными числами при помощи арифмометра.

В работе Льюиса (Lewis), изданной в 1925 г., приведен еще метод расчета систем с распределенными массами. Для исследования последних здесь предложен весьма удачный графоаналитический метод, однако необходимость учета распределенных масс встречается крайне редко. Практика показывает, что в области установок с поршневыми двигателями все системы могут рассматриваться как дискретные.

Наиболее удобен для исследования и практических расчетов крутильных колебаний — «Метод цепных дробей», предложенный В. П. Терских в 1930 г. В течение последующих лет этот метод был разработан во всех деталях и распространен на все случаи, встречающиеся в практике. Капитальные работы В. П. Терских «Метод цепных дробей» и «Расчеты крутильных колебаний силовых установок», опубликованные в 1953—1955 гг., являются наиболее полными и совершенными трудами в области крутильных колебаний силовых установок.

Кроме указанных, различными авторами, в том числе Граммелем (Grammel), Таплиным (Tuplin), были предложены другие способы расчета свободных колебаний, однако каких-либо преимуществ перед методами Терских и Толле они не имели.

Особое направление в области расчета и изучения крутильных колебаний — моделирование — осуществляется в работах И. М. Тетельбаума, который построил электрический стенд, позволяющий решать ряд задач.

В настоящее время наиболее распространены методы Терских, Толле и Хольцера. Изложение курса базируется на первом, так как он принят в судостроительной промышленности. Метод Толле освещен весьма кратко, но в объеме, достаточном для выполнения элементарных расчетов. Метод Хольцера здесь вообще не рассматривается, так как он не получил широкого распространения в отечественной практике.

Первая глава учебника предназначена для усвоения общих понятий и, по существу, охватывает содержание всего курса, давая представление о проблеме в целом.

Во второй главе показано вычисление основных динамических характеристик элементов системы.



Третья глава посвящена расчету свободных колебаний линейных простых и разветвленных систем, которые обычно встречаются в судовых силовых установках с ДВС.

В четвертой главе на примере системы с одной степенью свободы изложена теория вынужденных колебаний.

В пятой и шестой главах приведен анализ возмущающих и демпфирующих моментов, наблюдающихся в судовых силовых установках.

Седьмая глава обеспечивает расчет вынужденных колебаний, что позволяет определять напряжения в валопроводе и ширину запретных зон.

Восьмая глава посвящена нелинейным колебаниям систем с одним нелинейным элементом, например, систем, включающих в себя муфты.

В девятой главе, в связи с вопросом о борьбе с крутильными колебаниями, изложены способы варьирования элементами системы и последовательностью вспышек. Кроме того, освещен вопрос об успокоителях колебаний. Особое внимание уделяется при этом силиконовому демпферу, который получает широкое распространение в настоящее время.

В десятой главе описаны тензометрирование и торсиографирование установок.

## ПОНЯТИЕ О СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

### § 1. Основные определения

*Крутильными* называют такие колебания системы, при которых все ее точки совершают движения переменного направления по дугам окружностей вокруг неподвижной оси.

*Свободными* называют колебания, совершающиеся исключительно под действием сил упругости деформирующихся элементов системы. Свободные крутильные колебания материальной системы совершаются под действием моментов упругих сил, возникающих в скручивающихся участках валопровода.

*Циклом* называется полная совокупность повторяющихся значений периодически изменяющейся величины.

*Периодом*  $T$  называется промежуток времени, необходимый для совершения одного полного цикла.

*Частотой* называется число циклов, совершающихся в единицу времени. Обычно частоту выражают числом циклов в секунду  $n_c$ . Единица частоты — *герц* — одно колебание в секунду.

$$n_c = \frac{1}{T} \text{ кол/сек. (герц)}. \quad (1.01)$$

В расчетах крутильных колебаний частоту принято выражать числом циклов в минуту  $N$

$$N = 60n_c = \frac{60}{T} \text{ кол/мин}, \quad (1.02)$$

или *круговой частотой*  $\omega$  — числом колебаний в  $2\pi$  секунд

$$\omega = 2\pi n_c = \frac{2\pi}{T} \text{ сек}^{-1}. \quad (1.03)$$

Так как в данном курсе  $n_c$  не встречается, то круговая частота  $\omega$  в последующем изложении называется просто *частотой*.

Подставив  $n_c$  из выражения (1.02) в выражение (1.03), находим соотношение

$$\omega = \frac{\pi N}{30}, \quad N = \frac{30}{\pi} \omega = 9,55\omega \text{ кол/мин}. \quad (1.04)$$

Угловое перемещение некоторой массы (или угловая деформация некоторого соединения) валопровода при крутильных колебаниях, отсчитываемое от его равновесного положения (при отсутствии



колебаний), называется *фазой* колебания и обозначается символом  $\varphi$ .

*Начальной фазой* называется фаза в момент начала отсчета времени, она обозначается символом  $\psi$ .

*Амплитудой*  $A$  называется наибольшее угловое перемещение данной массы (или сечения валопровода) от равновесного положения, т. е.  $A = \varphi_{\max}$ .

Фазы, начальные фазы и амплитуды при крутильных колебаниях измеряются в радианах.

Напомним, что *обобщенными координатами* называются величины, заданием которых определяется положение системы со всеми ее точками, а *числом степеней свободы* называется число независимых обобщенных координат.

## § 2. Свободные крутильные колебания системы с одной степенью свободы

Анализ свободных колебаний является существенной частью расчета установки на крутильные колебания, с его помощью устанавливаются не только резонансные режимы работы агрегата, но определяются формы колебаний, необходимые для определения амплитуд и напряжений при вынужденных колебаниях, расчет которых обычно является конечной целью исследования.

Рассмотрим систему (рис. 1, а), состоящую из вертикально расположенного вала с жестко заделанным верхним концом. На другом конце закреплена масса в виде диска, имеющего центр тяжести, лежащий на оси вала. При этом ось вала является главной центральной осью инерции диска.

Для упрощения задачи условимся считать, что:

а) вал обладает линейными упругими свойствами, но не имеет массы;

б) диск обладает массой, но является абсолютно жестким;

в) трение в системе отсутствует.

Будем рассматривать только крутильные колебания диска вокруг его главной центральной оси инерции. Другие возможные движения этой системы, например, качания в плоскости, проходящей через упомянутую ось (поперечные колебания) или перемещения массы вдоль этой оси (продольные колебания) здесь не рассматриваются. При таких оговорках можно считать, что система обладает одной степенью свободы, так как положение всех ее точек определяется одной обобщенной координатой — углом поворота диска  $\varphi$ .

Для того чтобы возбудить движение системы, к диску необходимо приложить некоторый действующий в плоскости этого диска момент. При этом диск выйдет из своего равновесного положения и отклонится на некоторый угол  $\varphi_{\max} = O'OB = A$ . В скрученном валу возникает упругий момент и, вследствие этого, некоторый запас потенциальной энергии  $\Pi$ . Если приложенный момент мгновенно

снять, то диск начнет движение, возвращаясь к своему равновесному положению. Потенциальная энергия при этом уменьшается, а кинетическая  $T$  увеличивается. Максимум кинетической энергии имеет место в тот момент, когда диск проходит через свое равновесное положение (точка  $O'$ ), а потенциальная энергия к этому времени будет израсходована. Дальнейшее движение диска совершается по инерции, т. е. за счет расхода кинетической энергии. Так как в принятой условной системе нет никаких потерь, то крайнего положения диск достигнет тогда, когда вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную, что наступит в точке  $B'$ . При этом диск отклонится на угол, равный углу первоначальной закрутки ( $\angle B'OO' = \angle O'OB$ ). Это имеет место потому, что потенциальная энергия системы определяется величиной деформации упругого элемента, а так как в крайних положениях запас потенциальной энергии одинаков, то одинаковыми должны быть и деформации.

Дальнейшее движение диска происходит уже в обратном направлении по пути  $B'B$ . Система возвращается в исходное положение. При этом завершается первый цикл. Так как при отсутствии потерь в точке  $B$  восстанавливаются все первоначальные условия, то следующие циклы должны точно повторять описанный.

Составим дифференциальное уравнение движения диска.

Угловое перемещение массы — обобщенная координата системы  $\varphi$  — после приложения к диску внешнего момента  $M$  кгсм определяется законом Гука

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_p} \text{ рад.}, \quad (1.05)$$

где  $l$  — длина вала, см;

$G$  — модуль упругости материала вала при сдвиге, кг/см<sup>2</sup>;

$J_p$  — полярный момент инерции сечения вала, см<sup>4</sup>.

Упругие свойства вала зависят от трех параметров, которые можно выразить новым параметром, называемым *податливостью* (на скручивание),

$$e = \frac{l}{GJ_p} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (1.06)$$

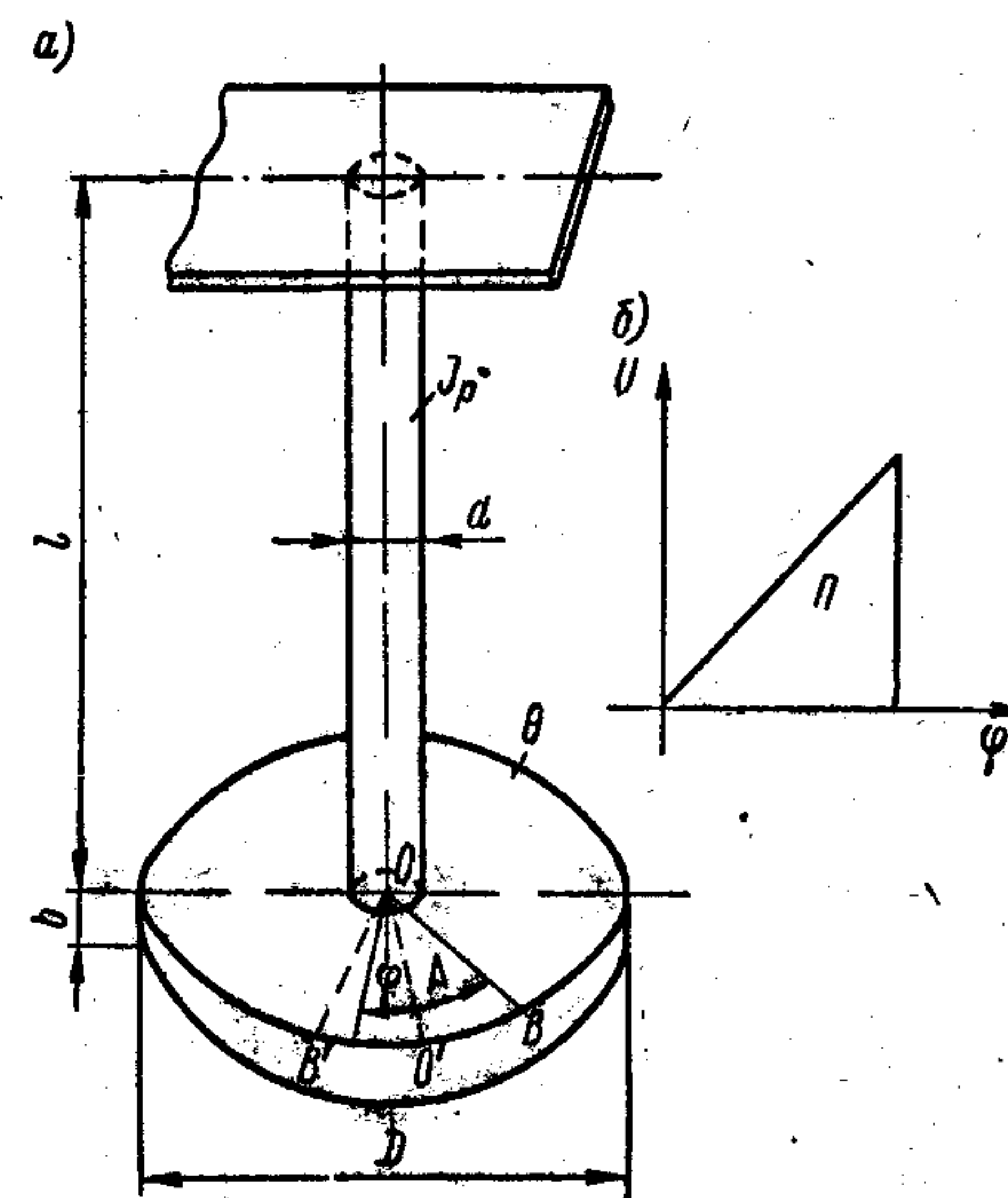


Рис. 1. Система с одной степенью свободы (крутильный маятник).



Если в выражение (1.05) вместо внешнего момента  $M$  ввести равный ему по абсолютной величине момент упругих сил, возникающих в валу при его скручивании — эластический момент  $U$  —, то получим широко используемые в дальнейшем зависимости

$$\varphi = eU \text{ рад.}; \quad U = \frac{\varphi}{e} \text{ кгсм}; \quad e = \frac{\varphi}{U} \text{ кг}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (1.07)$$

Последнее из этих выражений позволяет определить податливость как угловую деформацию вала (соединения), в котором возникает эластический момент равный единице (один килограммо-сантиметр) или, проще, как отношение угловой деформации соединения к возникающему в нем моменту упругих сил.

Диск характеризуется моментом инерции массы  $\theta$  кгсмсек<sup>2</sup>.

Если после приложения внешнего момента  $M$  последний будет мгновенно снят, система останется предоставленной действию сил упругости, и в ней возникнут крутильные колебания.

Дифференциальное уравнение движения системы найдем двумя способами: с помощью уравнения Лагранжа и на основании закона сохранения энергии.

С п о с о б 1. Имея в виду, что система имеет одну степень свободы и в качестве обобщенной координаты выступает угол  $\varphi$ , уравнение Лагранжа для свободных колебаний систем без трения можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.08)$$

где  $T$  — кинетическая энергия;

$\Pi$  — потенциальная энергия;

$\dot{\varphi}$  — обобщенная скорость.

Учитывая эластический момент по формуле (1.07) составляем выражения для потенциальной и кинетической энергии системы

$$\Pi = \frac{U\varphi}{2} = \frac{\varphi^2}{2e} \quad \text{и} \quad T = \frac{\theta\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (1.09)$$

Величина потенциальной энергии на графике  $U = f(\varphi)$  определяется площадью треугольника (рис. 1, б).

Найдем частные производные, входящие в уравнение Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \theta\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\varphi}{e}$$

и подставим их в уравнение (1.08).

$$\frac{d}{dt} \theta\dot{\varphi} - 0 + \frac{\varphi}{e} = 0.$$

В окончательном виде получим дифференциальное уравнение движения диска

$$\theta\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = 0. \quad (1.10)$$

С п о с о б 2. К аналогичному результату можно прийти, пользуясь законом сохранения энергии. Так как в процессе движения системы сопротивлений (рассеяния энергии) нет, то при любом значении обобщенной координаты  $\varphi$  сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, т. е.

$$\Pi + T = \text{const}. \quad (1.11)$$

Заимствуя соответствующие выражения из (1.09) записываем

$$\frac{\theta\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2e} = \text{const}.$$

Дифференцируя полученное равенство, придем к тому же уравнению (1.10).

Выражение (1.10) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решая его, найдем закон движения диска.

Поделим обе части уравнения (1.10) на  $\theta$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{\theta e} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (1.12)$$

Коэффициент при  $\varphi$ , замененный символом  $\omega$ , является квадратом круговой частоты, его размерность

$$\omega^2 = \frac{1}{\theta e} \text{ кгсм/кгсмсек}^2 \text{ (сек.}^{-2}\text{)}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\theta e}} \text{ сек.}^{-1}. \quad (1.13)$$

Составим характеристическое уравнение

$$z^2 + \omega^2 = 0. \quad (1.14)$$

Корни характеристического уравнения —  $z_1 = i\omega$  и  $z_2 = -i\omega$ .  
Общее решение уравнения (1.12)

$$\varphi = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, \quad (1.15)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Введем новые постоянные параметры

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = -\arctg \frac{c_2}{c_1}.$$

Произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  могут быть выражены через  $A$  и  $\varepsilon$  путем совместного решения принятых зависимостей

$$\left. \begin{aligned} c_1^2 + c_2^2 &= A^2 \\ \frac{c_2}{c_1} &= -\text{tg } \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad c_1 = A \cos \varepsilon; \quad c_2 = -A \sin \varepsilon.$$

Подставляя их в выражение (1.15), находим

$$\varphi = A \cos \varepsilon \sin \omega t - A \sin \varepsilon \cos \omega t = A \sin (\omega t - \varepsilon). \quad (1.16)$$



Полученная гармоническая функция характеризуется тремя постоянными параметрами: амплитудой  $A$ , начальной фазой  $\epsilon$  и круговой частотой  $\omega$ . Время  $t$  является независимой переменной.

Исследуя характер движения системы, последовательно берем первую и вторую производные от функции (1.16) и получаем выражения для скорости и ускорения диска

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= A\omega \cos(\omega t - \epsilon); \\ \ddot{\varphi} &= -A\omega^2 \sin(\omega t - \epsilon) = -\varphi\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

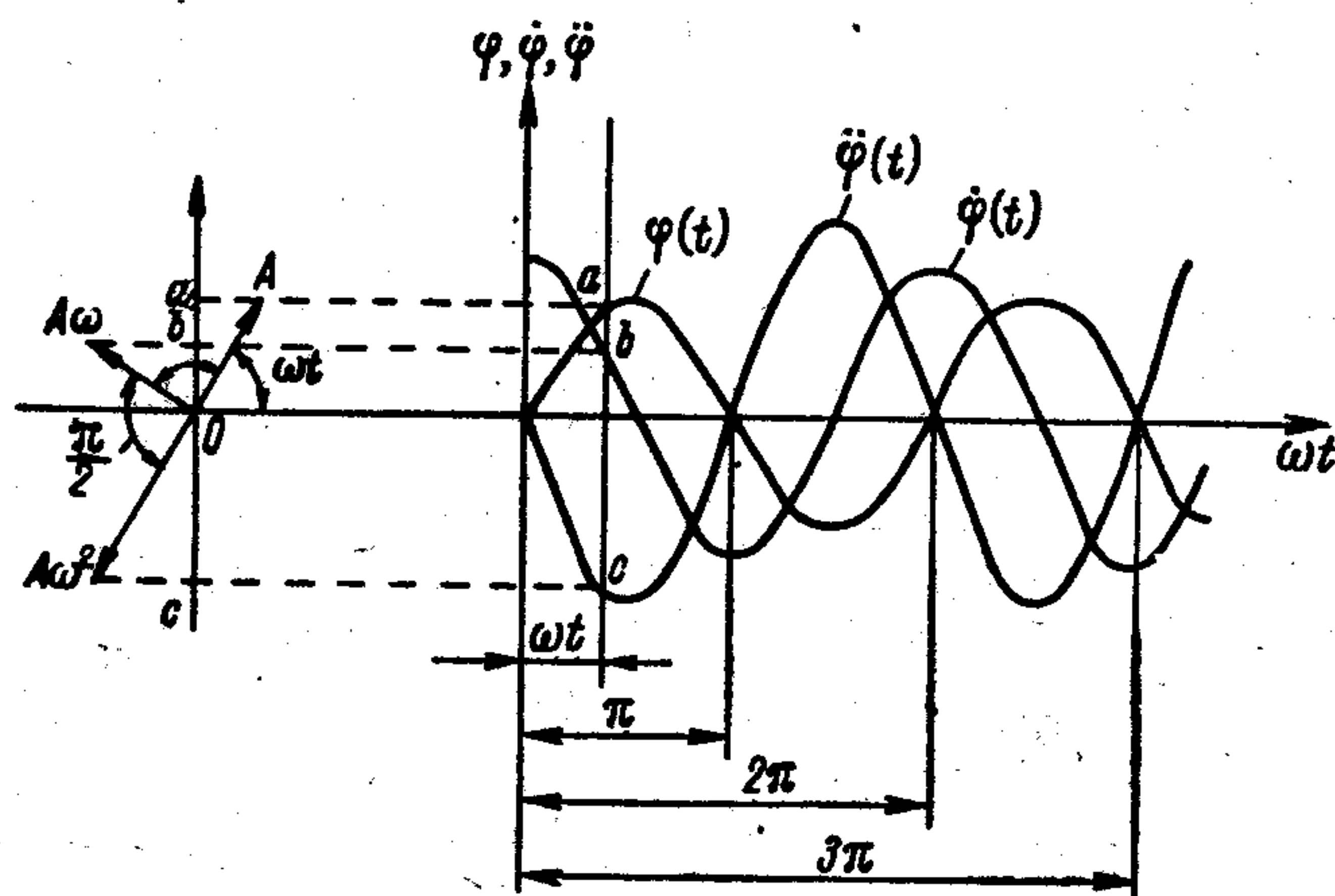


Рис. 2. Графики гармонического колебания.

Если наблюдение движения начать с момента, когда система проходит через свое равновесное положение, то начальная фаза  $\epsilon$  окажется равной нулю, при этом выражения (1.16) и (1.17) примут вид

$$\varphi = A \sin \omega t; \quad \dot{\varphi} = A\omega \cos \omega t; \quad \ddot{\varphi} = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (1.18)$$

Графически характер движения представляется в виде гармонических кривых (синусоид), показанных на рис. 2.

Из рис. 2 и выражения (1.18) видно, что при гармоническом колебании ускорение пропорционально отклонению массы от среднего положения. Это объясняется тем, что ускорение всегда пропорционально действующей силе, а сила (в данном случае эластический момент) здесь пропорциональна углу закручивания (деформации). Таким образом гармонический закон колебательного движения есть следствие того, что силы упругости пропорциональны деформации упругих элементов.

Попутно сделаем замечание, что если в какой-либо системе силы упругости не пропорциональны деформации (например, случай, когда в систему включена муфта с нелинейной характеристикой), колебания уже не могут быть гармоническими, а будут нелинейными.

Как видно из рис. 2, где дана векторная интерпретация гармонического колебания, за период  $T$  радиус  $A$  совершит полный оборот ( $2\pi$ ), следовательно,

$$\omega T = 2\pi. \quad (1.19)$$

Из выражений (1.13) и (1.06)

$$\omega^2 = \frac{1}{\theta e} \quad \text{и} \quad e = \frac{l}{GJ_p}$$

можно получить еще одну формулу для определения круговой частоты

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\theta e}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{\theta l}} \text{ сек}^{-1}. \quad (1.20)$$

Кроме того, на основании (1.03) и (1.20) находим формулу, позволяющую определить период свободных колебаний системы с одной, степенью свободы (одномассовой системы)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta l}{GJ_p}} \text{ сек.} \quad (1.21)$$

Формулы для получения частоты свободных колебаний не содержат в себе ни времени, ни амплитуды. Это показывает, что частота исследуемых колебаний при любом первоначальном возбуждении данной системы остается постоянной. Следует также сделать вывод, что частота (и период) свободных колебаний определяются параметрами самой системы: величиной массы и податливостью упругого элемента, которая зависит от свойств материала и формы упругого элемента.

Рассматривая формулы (1.20) и (1.21), можно сделать еще одно существенное замечание: *если в данной системе момент инерции массы или податливость будут увеличены, то частота свободных колебаний уменьшится, а их период возрастет.*

Как увидим из последующей части курса, подобное свойство распространяется и на более сложные многомассовые системы.

### § 3. Особенности главных колебаний. Сложение колебаний

Если начальные условия были выбраны так, что система совершает только одно колебательное движение с определенной частотой, такое движение системы называют *главным видом свободных колебаний*.

Главные колебания определяются по одновременному наличию определенных свойств:

1) главные колебания есть колебания гармонические, т. е. движение каждой точки системы подчиняется закону синуса или косинуса;



- 2) каждая точка системы движется по траектории, проходящей через равновесное положение;
- 3) амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий;
- 4) частота, период и отношения перемещений отдельных масс к перемещению какой-либо одной из них от начальных условий не зависят;

5) все точки системы одновременно проходят через свои равновесные положения и одновременно достигают крайних положений.

В последующем курсе будем изучать колебательные явления в валопроводах, выделяя из них главные колебания, которые подчиняются перечисленным выше пяти условиям.

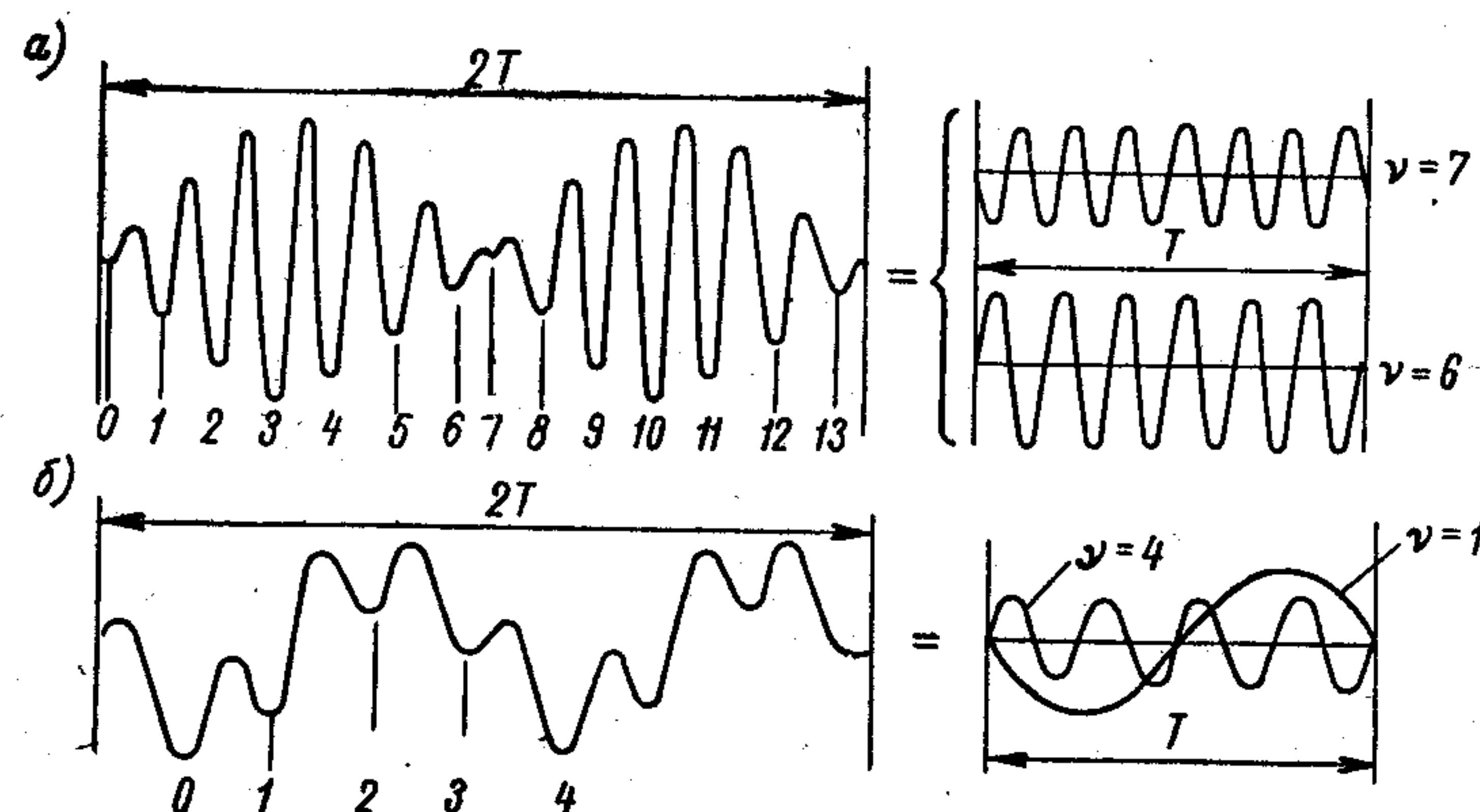


Рис. 3. Сложение главных колебаний: а — суммарное движение системы при колебаниях с порядками  $\nu = 6$  и  $\nu = 7$ ; б — то же с порядками  $\nu = 1$  и  $\nu = 4$ .

Практически почти не встречается случаев, когда в валопроводе наблюдается только одно главное колебание. Обычно упругая система одновременно участвует в нескольких колебаниях, каждое из которых будем анализировать отдельно от других. Это правомерно вследствие возможности самостоятельного существования главных колебаний и позволяет значительно упростить решение поставленной задачи.

Если система одновременно участвует в двух главных колебаниях, то могут встретиться три случая:

а) колебания одинаковой частоты — в этом случае получается одно главное колебание, амплитуда которого равна геометрической сумме векторов, характеризующих каждое из составляющих колебаний;

б) колебания по частоте отличаются одно от другого незначительно (рис. 3, а) — в этом случае наблюдается эффект биения, т. е. получается такое колебание, при котором амплитуда перио-

дически возрастает и уменьшается. Период биения может быть определен по формуле ( $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты составляющих колебаний)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \text{ сек.}; \quad (1.22)$$

в) колебания (рис. 3, б) по частоте значительно отличаются одно от другого; в этом случае получается явление модуляции с основным «несущим» колебанием низкой частоты и «обертоном» высшей частоты.

Все эти частные случаи так называемых полигармонических свободных колебаний встречаются только в многомассовых системах.

#### § 4. Крутильно-колеблющиеся системы

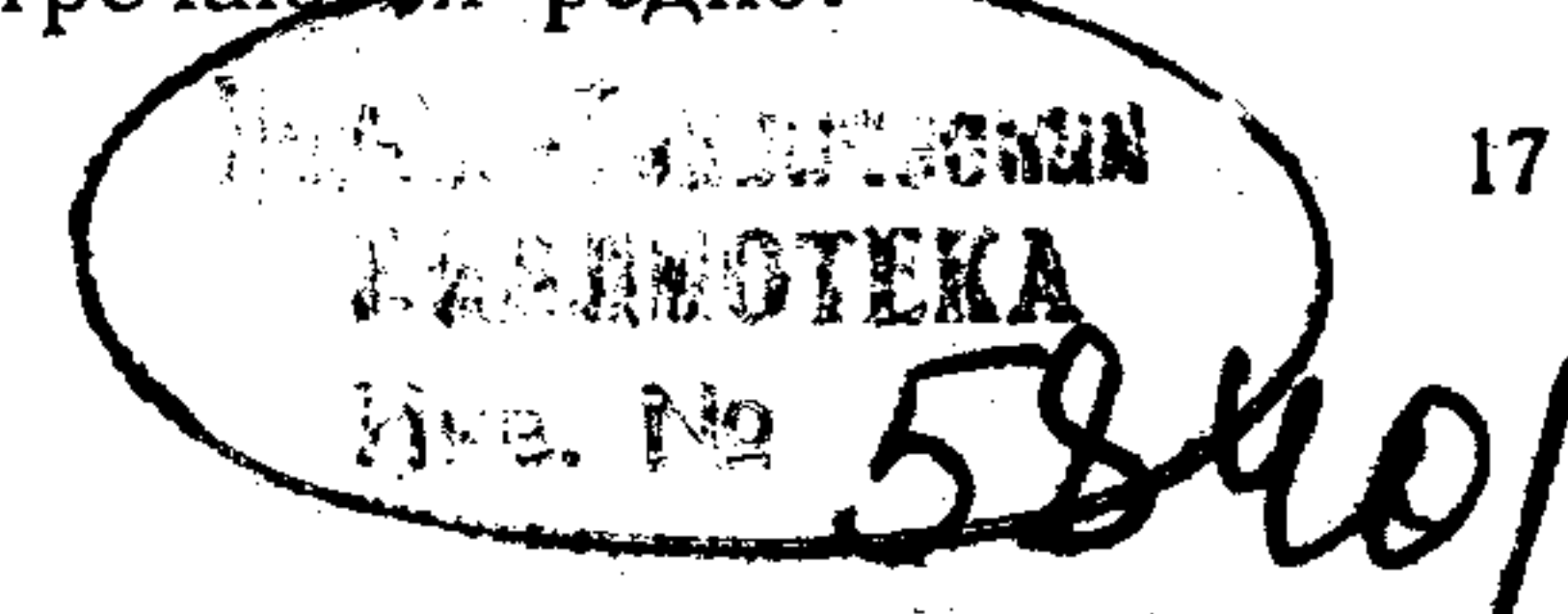
В технике встречаются колебательные системы различных видов. Рассмотрим некоторые их особенности.

*Распределенные и дискретные системы.* В распределенных системах каждый элемент характеризуется двумя свойствами — инерционностью и упругостью, а в дискретных — только одним из них. Все реальные системы являются распределенными, но при анализе каждую систему (если это возможно) стремятся привести к дискретному виду, пренебрегая менее существенным свойством каждого элемента.

В системах, приведенных к дискретному виду, массы мыслятся сосредоточенными и характеризуются только свойствами им моментами инерции ( $\theta$  кгсмсек<sup>2</sup>). Участки системы, осуществляющие упругую связь между массами (соединения), характеризуются только податливостями ( $e$  кг<sup>-1</sup>см<sup>-1</sup>).

Дискретная система условно изображается в виде «крутильной схемы», где массы изображаются кружками, площадь которых примерно пропорциональна их моментам инерции, а упругие связи — соединения — отрезками прямой, которые точно пропорциональны их податливостям. Порядковый номер массы указывается в индексе ( $y$ ). Индекс при символе податливости участка, расположенного между смежными массами, указывает на номера этих масс ( $y, y + 1$ ). На рис. 4, а представлена крутильная схема дискретной шестимассовой системы.

В данном курсе рассматриваются только *цепные системы*, представляющие собой последовательное соединение элементов, взаимодействия которых и действие возмущающих моментов происходят только в направлении перемещения этих элементов (моменты упругих сил в соединениях, возмущающие моменты от шатуна и прочие действуют всегда в параллельных плоскостях). Цепные системы разделяются на *простые* и *разветвленные*. В каждой из этих групп встречаются *разомкнутые* и *кольцевые*. Их особенности ясны из рис. 4. Более сложные схемы встречаются редко.





Системы с редукцией отличаются той особенностью, что перемещения некоторых масс (или групп масс) происходят в определенное число раз медленнее (или быстрее), чем у остальных. Находящийся в этой системе редуктор (или мультипликатор) встречается в виде зубчатых, ременных или иных передач.

В курсе рассматриваются в основном линейные системы, включающие в себя соединения с линейной характеристикой, т. е., которые можно считать подчиняющимися закону Гука. Все остальные системы являются нелинейными.

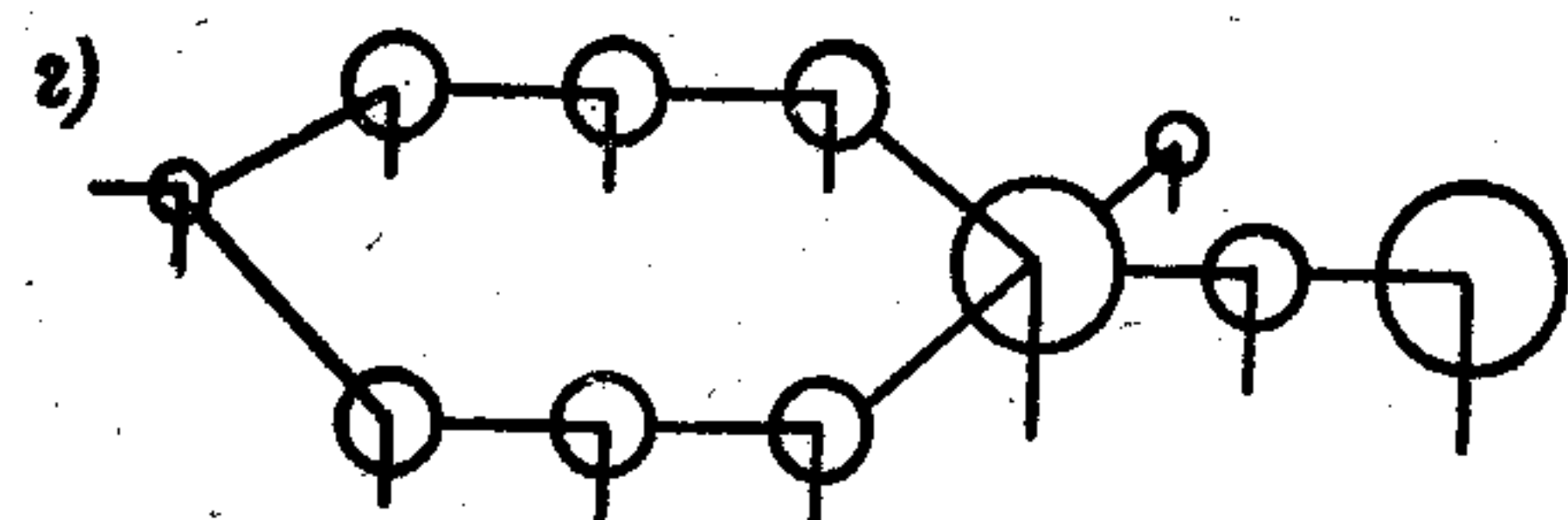
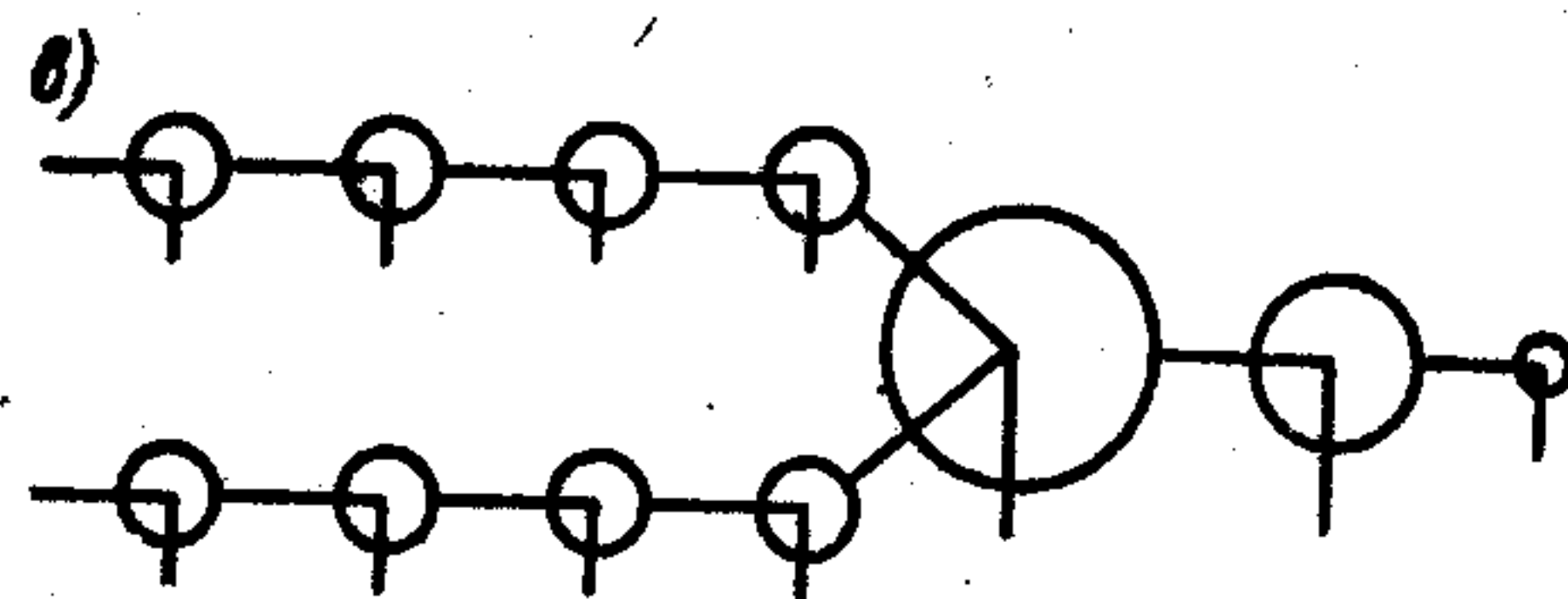
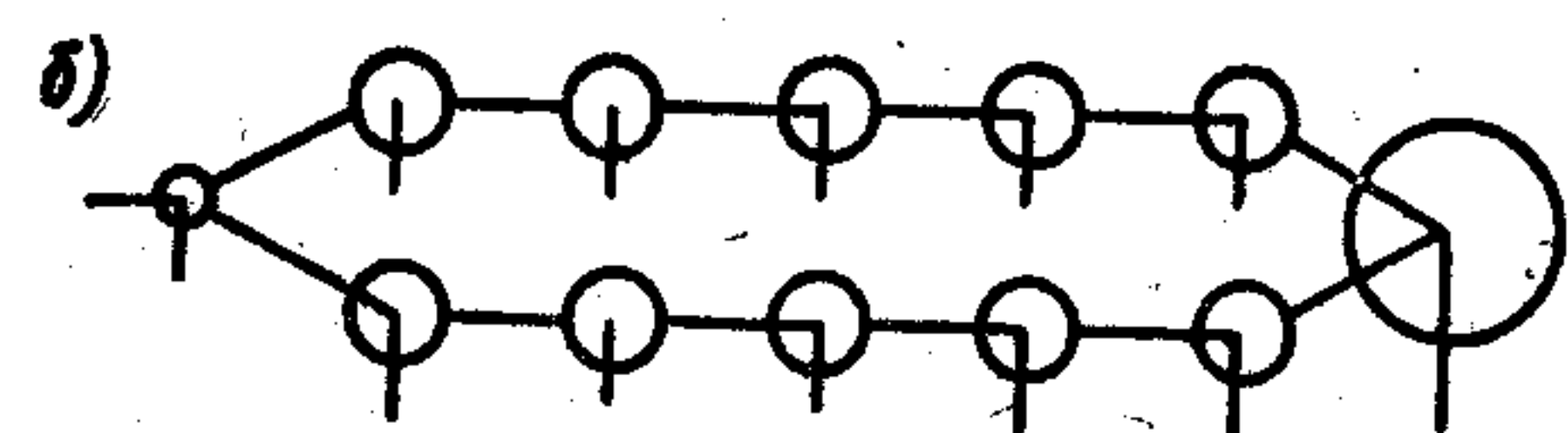
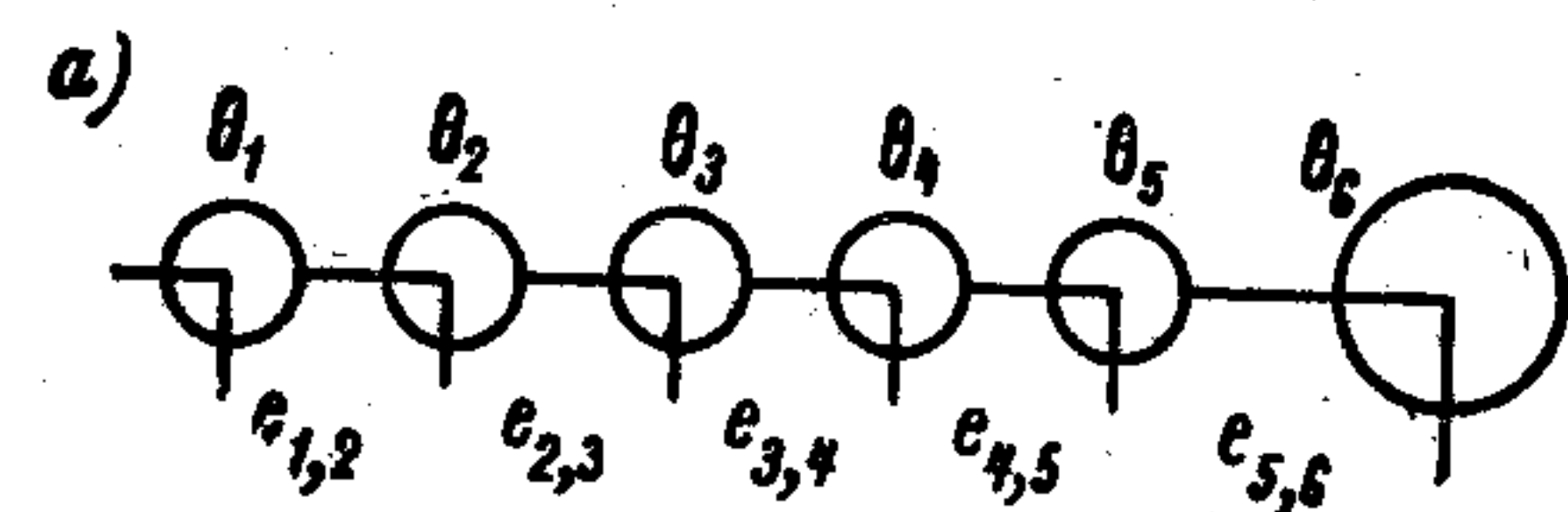


Рис. 4. Виды цепных систем: а — простая разомкнутая; б — простая кольцевая; в — разветвленная разомкнутая; г — разветвленная кольцевая.

дисками (рис. 4, а). Принимая, что каждый участок вала между массами представляет собой упругую связь между ними, необходимо допустить, что в общем случае каждая из масс (дисков) может совершать особое, отличное от других масс, движение. Так как положение каждого диска в процессе крутильных колебаний может быть определено с помощью одной обобщенной координаты, движение всей системы будет описываться уравнениями, содержащими в себе обобщенные координаты, число которых равно числу содержащихся в ней сосредоточенных масс. Следовательно, число степеней свободы в подобных системах равно числу масс.

Величина трений, способствующих уменьшению амплитуд колебаний системы, может существенно влиять на характер ее движения [25] и [26]. Здесь рассматриваются системы, в которых трение столь мало, что им можно пренебречь, и системы с малым трением, в которых оно вызывает ослабление колебаний, но не искажает основных динамических свойств системы, например, формы колебаний (т. е. соотношения между амплитудами отдельных масс), свойственной такой же системе без трения.

Величина трений, способствующих уменьшению амплитуд колебаний системы, может существенно влиять на характер ее движения [25] и [26]. Здесь рассматриваются системы, в которых трение столь мало, что им можно пренебречь, и системы с малым трением, в которых оно вызывает ослабление колебаний, но не искажает основных динамических свойств системы, например, формы колебаний (т. е. соотношения между амплитудами отдельных масс), свойственной такой же системе без трения.

### § 5. Колебательные движения системы с несколькими степенями свободы

Представим себе некоторую дискретную систему — вал с закрепленными на нем

На рис. 5, а представлена покоящаяся трехмассовая система, у которой средний диск имеет момент инерции в два раза больший, чем у каждого из крайних. Соединения одинаковы. На дисках нанесены риски, которые располагаются в вертикальной плоскости, проходящей через ось вала.

Если к двум крайним массам приложить моменты противоположных знаков, а затем мгновенно их снять, система придет в колебательное движение. При этом крайние массы в каждый данный момент будут отклоняться в противоположные стороны, а средняя будет находиться в покое, так как система симметрична (рис. 5, б).

Амплитуды — максимальные угловые отклонения масс — можно отметить на специальной, расположенной ниже диаграмме, в виде пропорциональных им ординат, знаки которых соответствуют направлениям отклонений масс в данный момент времени. Соединив концы этих ординат, получим форму колебаний в виде прямой, пересекающей ось диаграммы в месте расположения средней массы. Через промежуток времени, равный половине периода, каждая из крайних масс, отклонится в противоположную сторону, но линия (пунктир), соединяющая концы ординат, по-прежнему будет пересекать ось в той же точке.

Сечение упругой связи вала, остающееся неподвижным в процессе колебаний, называется *узлом*.

*Формой колебаний* называется фиксированное взаимное расположение масс системы в их предельно-крайних отклонениях от среднего равновесного положения. Формы колебаний различаются по числу узлов.

В описанной форме колебаний имеется только один узел, а поэтому она называется *одноузловой*.

Теперь создадим другие начальные условия: приложим к крайним массам одинаковые моменты одного знака, а к средней массе приложим момент, равный их сумме, но противоположного знака (рис. 5, в). После того как моменты сняты, система также придет в колебательное движение, но в каждый данный момент обе крайние

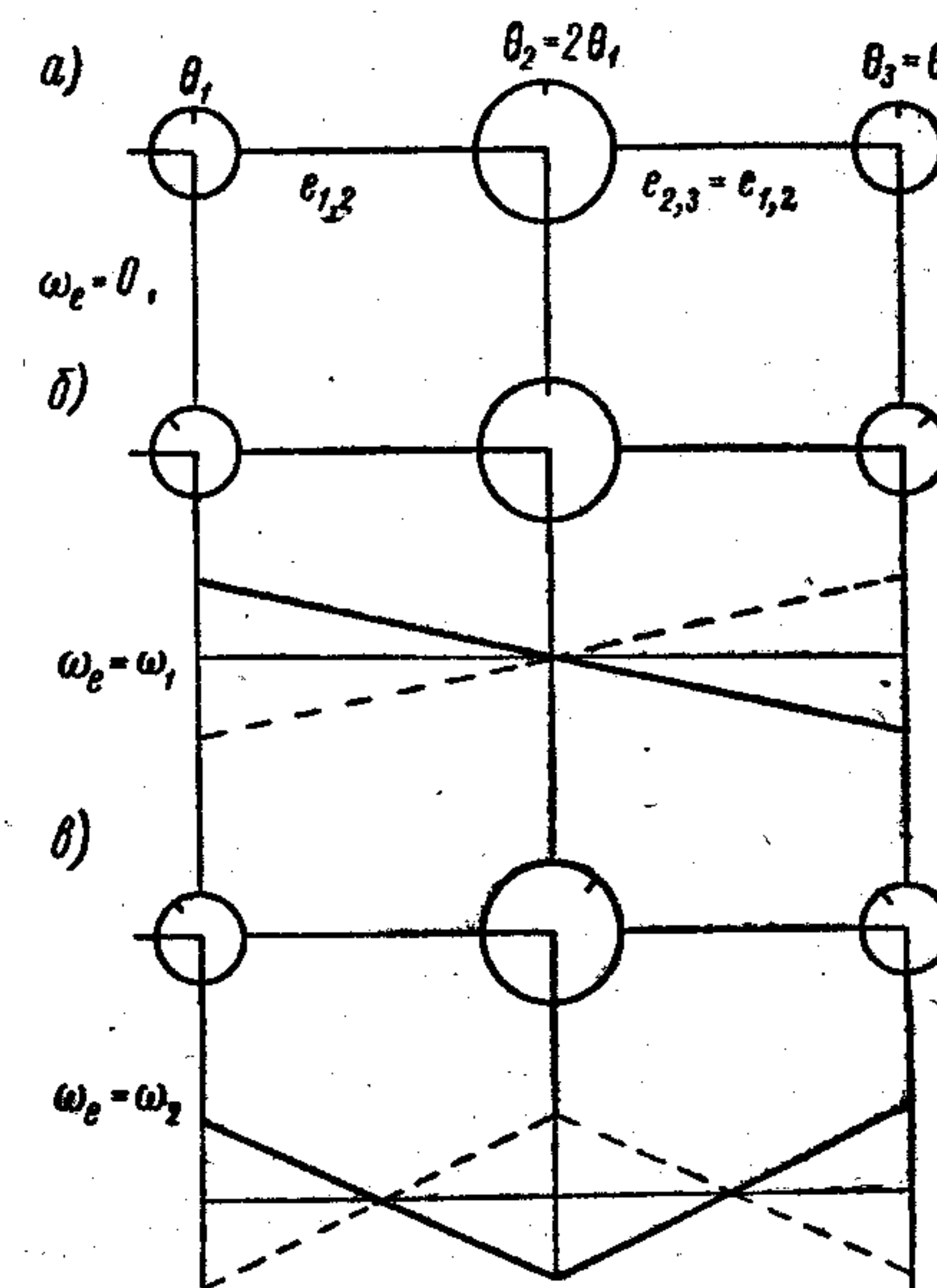


Рис. 5. Формы колебаний: а — покоящаяся система; б — одноузловая; в — двухузловая.



массы будут отклоняться в сторону, противоположную отклонению средней массы. При этом, как показывает расположенная ниже диаграмма — форма колебаний — в системе обнаруживаются уже два узла.

Такая форма колебаний называется *двухузловой*.

Для данной системы с тремя сосредоточенными массами возможны только одноузловая и двухузловая формы колебаний. В дискретных системах узлы могут иметь место на каждом соединении, а в частном случае — между ними, т. е. в месте расположения массы, поэтому максимально возможное число форм свободных колебаний равно числу соединений.

Каждой форме колебаний соответствует определенная частота колебаний; чем больше число узлов, тем выше частота колебаний системы. Каждое из описанных колебаний является главным колебанием системы.

Если частоту свободных колебаний одноузловой формы обозначить  $\omega_{e1}$ , а частоту свободных колебаний двухузловой формы  $\omega_{e2}$ , то  $\omega_{e2} > \omega_{e1}$  или вообще  $\omega_{en+1} > \omega_{en}$ .

Для систем с распределенными массами, например, для цилиндрического вала с постоянным сечением, возможно бесконечно большое число форм колебаний и, соответственно, бесконечно большое число узлов.

Если вал вращается и в то же время в нем наблюдаются свободные крутильные колебания, то на частоты колебаний вращение вала влияния не оказывает. Графически это представлено ниже на рис. 6, а. Каждая из горизонтальных линий выражает частоту  $\omega_e$  одной из форм свободных колебаний, свойственных данной системе.

Обе формы колебаний могут существовать одновременно, при таких условиях колебания называют *полигармоническими*.

## § 6. Понятие о возмущающих моментах. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания возникают в упругой системе под влиянием так называемых возмущающих моментов.

В установках ДВС основным видом возмущающих моментов являются моменты тангенциальных сил от давления газов в цилиндрах. О возмущающих моментах другой физической природы, которые также имеют место в установках с ДВС, сказано ниже.

Возмущающие моменты от сил давления газов действуют в системе непосредственно на кривошипы вала двигателя. Каждый из этих моментов является переменным по величине и задается в виде тангенциальной диаграммы. Это весьма сложная функция от угла поворота кривошипа; для использования в расчете ее разлагают в ряд Фурье.

Таким образом, возмущающие моменты (любого происхождения) могут быть представлены в следующем общем виде

$$M = M_{cp} + M_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + M_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \dots$$

$$\dots = M_{cp} + \sum_{v=1}^{\infty} M_v \sin(v\Omega t + \psi_v) = M_{cp} + \sum_{v=1}^{\infty} M_v^*, \quad (1.23)$$

где  $M_v^*$  — текущее значение гармонической составляющей;  
 $M_{cp}$  — средний крутящий момент (колебаний не возбуждает);

$M_v$ ,  $\omega_v$ ,  $\psi_v$  — амплитуда, частота и начальная фаза момента.

Порядком ( $v$ ) гармонической составляющей в области крутильных колебаний принято называть отношение периода одного оборота коленчатого вала  $T$  к периоду данной гармоники  $T_v$ ,

$$v = \frac{T}{T_v} = \frac{\omega_v}{\Omega} = \frac{N_v}{n}. \quad (1.24)$$

Последние равенства основаны на выражениях (1.02) и (1.03).

Символом  $\Omega$  здесь обозначена угловая скорость коленчатого вала, которая по отношению к числу оборотов вала  $n$  играет такую же роль, как  $\omega_v$  (выражающая при графической интерпретации колебания угловую скорость радиуса-вектора) по отношению к числу колебаний в минуту  $N_v$  [см. формулу (1.04)]

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} \text{ сек.}^{-1}.$$

Подставив последнее выражение в (1.24), найдем

$$\omega_v = v \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi N_v}{30} = v\Omega \text{ сек.}^{-1}.$$

Таким образом, частота любой гармонической составляющей пропорциональна порядку и числу оборотов вала двигателя, что представлено на рис. 6, б (лучами  $\omega_{v1}$  и  $\omega_{v2}$ ).

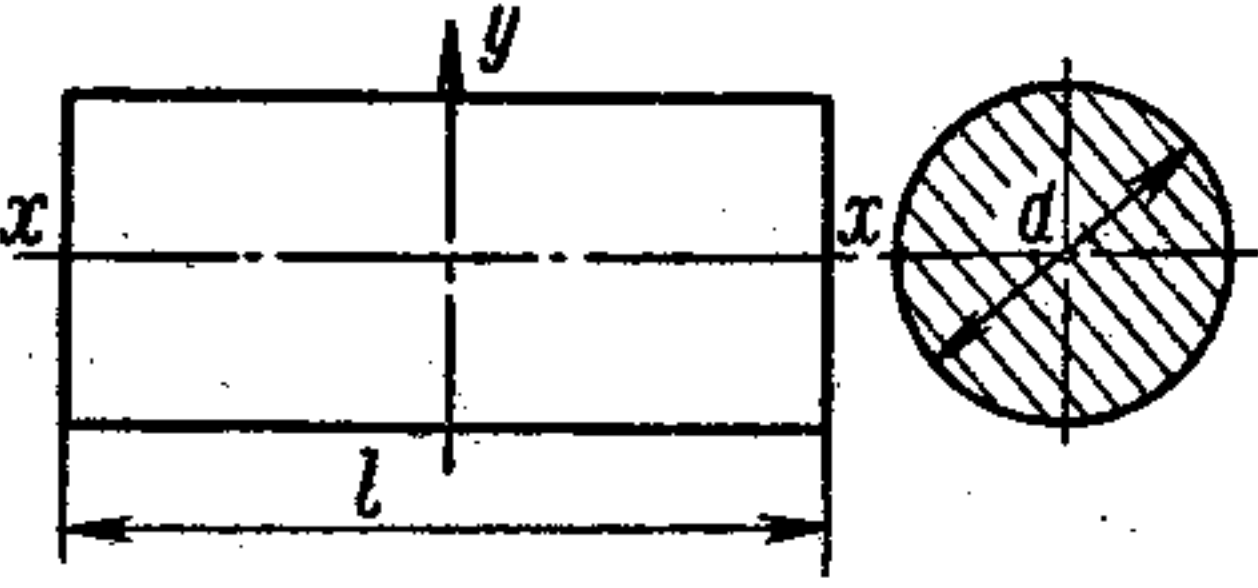
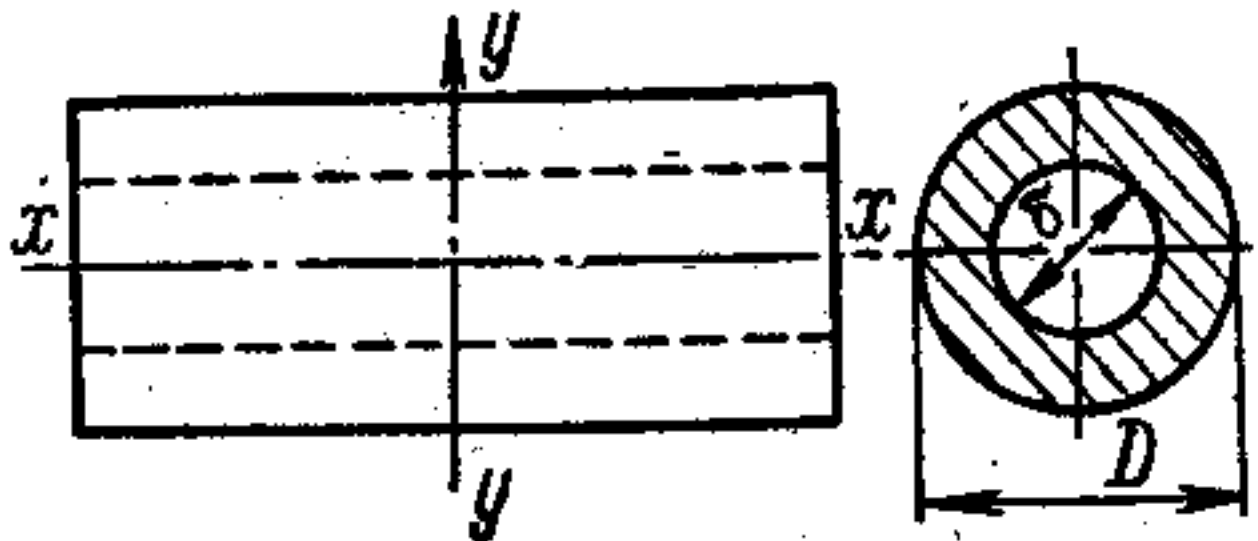
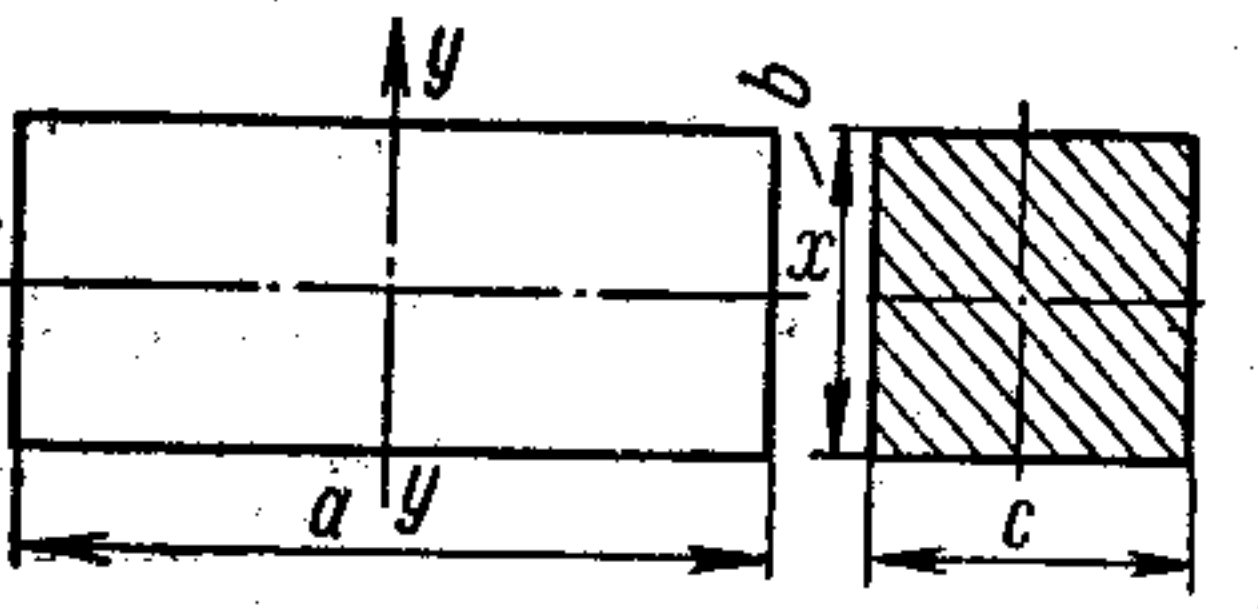
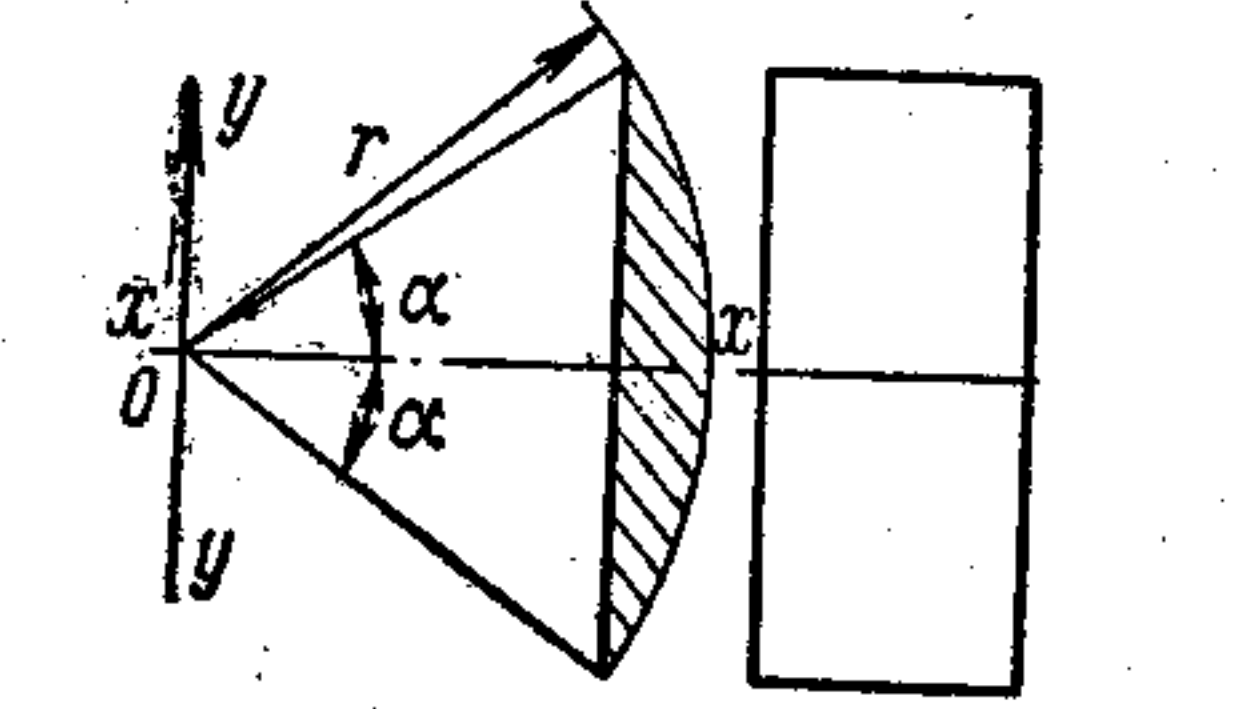
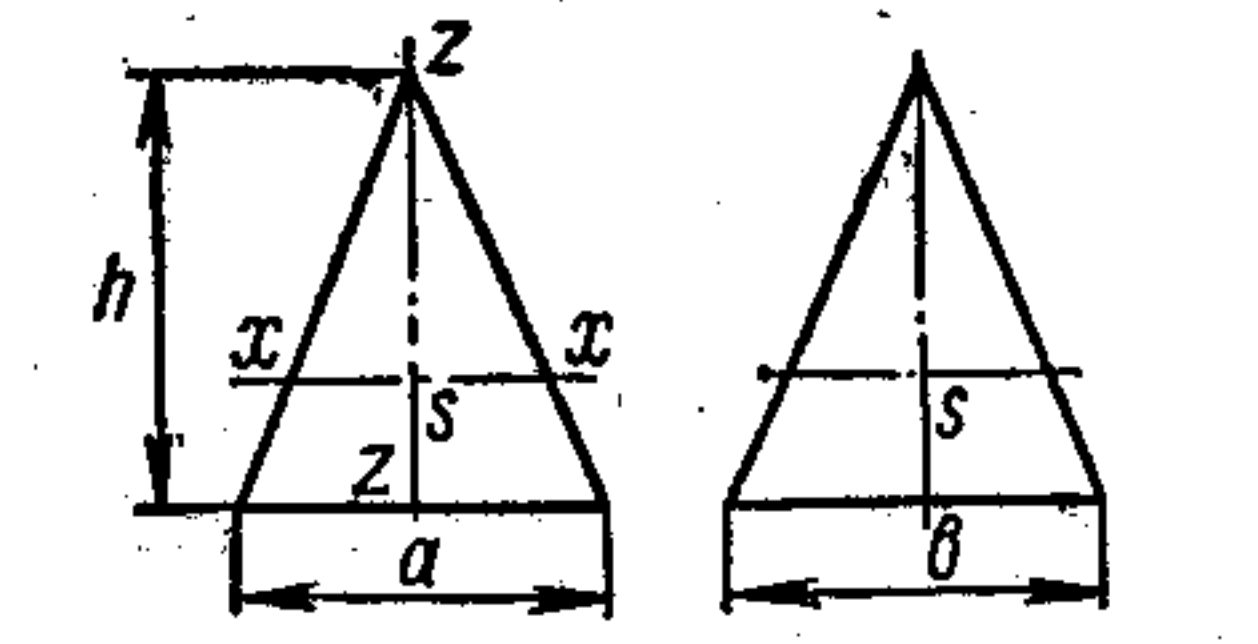
Вынужденные колебания имеют частоту наиболее сильных гармоник возмущающих моментов. Во всех последующих выводах будем встречаться с полигармоническим возбуждением вида (1.23). Находя, как здесь описано, гармонические возмущающие моменты, будем рассматривать поведение системы при воздействии каждого из них в отдельности. На основании таких частных расчетов делается заключение об их суммарном эффекте.

## § 7. Резонансные колебания. Кривые резонанса. Запретные зоны

Вынужденные колебания возникают в результате действия возмущающих моментов и моментов сил сопротивления на упругую материальную систему.



Таблица 1

Эскиз	Формула момента инерции $m$ — масса; $\theta$ — момент инерции
	Прямой круглый цилиндр $\theta_x = \frac{m}{8} d^2$ $\theta_y = \frac{m}{12} (0,75d^2 + l^2)$
	Полый цилиндр $\theta_x = \frac{m}{8} (D^2 + d^2)$ $\theta_y = \frac{m}{12} (0,75D^2 + 0,75d^2 + l^2)$
	Параллелепипед $\theta_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$ $\theta_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2)$
	Круговой сегмент $\theta_z = m \frac{r^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$
	Прямоугольная пирамида $\theta_x = \frac{m}{20} (b^2 + 0,75h^2)$

насаженной на вал, подвергающийся расчету, в предположении полного отсутствия упругих свойств данной части системы

$$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\dot{\varphi}_y}{\dot{\varphi}_y} \quad (2.01)$$

Динамическая эквивалентность действительной (расположенной после редуктора) и приведенной (редуцированной) масс с моментами инерции соответственно  $\theta'_y$  и  $\theta_y$  определяется равенством их кинетических энергий

$$\frac{\theta_y \Omega^2}{2} = \frac{\theta'_y \omega^2}{2},$$

откуда

$$\theta_y = \theta'_y \left( \frac{\omega}{\Omega} \right)^2 = \theta'_y i^2. \quad (2.02)$$

Таким образом, приведенный момент инерции массы будет меньше действительного, если масса расположена после редуктора, и больше действительного, если масса находится после мультипликатора.

Если передача двухступенчатая, подобный расчет повторяется дважды, т. е. действительную массу умножают еще на квадрат передаточного числа второй ступени [20, стр. 162].

**3. Приведенная масса кривошипно-шатунного механизма (КШМ).** Приведенная масса деталей КШМ зависит от величины вращающихся  $M_R$  и поступательно-движущихся  $M_S$  масс. Ее кинетическая энергия  $T$  также должна быть равна суммарной кинетической энергии масс механизма. Однако точной эквивалентности здесь соблюсти не удастся, так как непостоянство скорости поршня и присоединяемых к нему масс обуславливает переменную величину запасаемой ими кинетической энергии. Действительно, в положениях мертвых точек эта энергия равна нулю, а при тех положениях механизма, когда скорость поршня будет наибольшей, достигает максимума.

Среднее за цикл значение кинетической энергии  $T_{\text{пдм}}$  поступательно-движущихся масс находим посредством интеграла

$$T_{\text{пдм}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_S V^2}{2} d\alpha \approx \frac{M_S R^2 \Omega^2}{4}. \quad (2.03)$$

Подробный вывод см. [20, стр. 87].

Приравняв выражения для кинетических энергий приведенной массы и масс деталей КШМ,

$$\frac{\theta_{\text{КШМ}} \Omega^2}{2} = \frac{\theta_0 \Omega^2}{2} + \frac{M_R (R\Omega)^2}{2} + \frac{M_S R^2 \Omega^2}{4},$$



находим момент инерции приведенной массы кривошипно-шатунного механизма

$$\theta_{\text{кшм}} = \theta_0 + R^2 (M_R + 0,5M_s). \quad (2.04)$$

В последних зависимостях  $M_R$  — приведенная к оси мотылевой шейки масса неуравновешенных вращающихся деталей, а  $\theta_0$  — момент инерции уравновешенных вращающихся деталей (рамовых шеек вала и соответствующих частей шеек).

Путем несложных преобразований [29, стр. 23] последняя формула приводится к виду

$$\theta_{\text{кшм}} = \theta_{\text{кол}} + \frac{R^2}{1960} [G_{\text{п}} + (1 + k) G_{\text{ш}}], \quad (2.05)$$

где  $\theta_{\text{кол}}$  — момент инерции массы колена,  $G_{\text{п}}$  — вес поршня, штока и крейцкопфа, а  $G_{\text{ш}}$  — вес шатуна.

Коэффициент  $k$  представляет собой долю массы шатуна, отнесенную к его нижней головке (отношение расстояния от центра тяжести шатуна до оси поршневого подшипника ко всей длине шатуна).

Для определения коэффициента  $k$  рекомендуется эмпирическая формула

$$k \approx 0,8 \frac{(0,001n)^2 + 0,3}{(0,001n)^2 + 0,5}, \quad (2.06)$$

где  $n$  — максимальное число оборотов вала двигателя.

Для V- и W-образных, а также звездообразных двигателей момент инерции КШМ может быть подсчитан по формуле

$$\theta_{\text{кшм}} \approx \theta_{\text{кол}} + \frac{R^2}{1960} \left\{ \sum_{i=1}^z P_{\text{ш}i} + (1 + k) G_{\text{ш}} + \sum_{i=1}^{z-1} \left[ 1 + \left( \frac{a_i}{b_i} \right)^2 k \right] G_{\text{ш}i} \right\}, \quad (2.07)$$

где все символы сохраняют значения, указанные к формуле (2.05), индекс  $i$  относится к номеру цилиндра,  $a_i$  и  $b_i$  — радиус прицепа и длина прицепного шатуна, а  $z$  — число цилиндров.

Приближенное значение момента инерции КШМ для одновальных двигателей может быть ориентировочно найдено по эмпирической формуле [56, стр. 34], [20, стр. 88]

$$\theta_{\text{кшм}} \approx \frac{1,25 \cdot 10^{-5} R^3 D}{1,4D \sqrt{b} + R} (k_x D \sqrt{b} + Hd), \quad (2.08)$$

где  $D$  и  $d$  — диаметры цилиндра и шейки коленчатого вала;

$H$  и  $R$  — расстояние между цилиндрами и радиус кривошипа;

$b$  — число полостей цилиндров, приходящихся на одно колено;

$k_x$  — коэффициент, учитывающий длину шатуна  $L$  и тип двигателя  $b$ ;

при наличии чугунных и силуминовых поршней соответственно (если  $1,2 < \frac{L}{\sqrt{b}} < 3,8$ )

$$k_x = k_q = 0,25L + 0,6D \sqrt{b}; \quad k_x = k_c = 0,38L - 0,17D \sqrt{b}.$$

Для расчета момента инерции колена  $\theta_{\text{кшм}}$  применяются графоаналитические или графические способы, например, основанный на методе средних ординат [56, стр. 25].

4. Момент инерции гребного винта. Момент инерции гребного винта существенно (на 20—40%) увеличивается за счет массы увлекаемой им воды. Если момент инерции самого винта и присоединенной к нему воды обозначить соответственно  $\theta_m$  и  $\theta_v$ , во все расчеты вводится величина [56, стр. 35]

$$\theta = \theta_m + \theta_v = k\theta_m, \quad (2.09)$$

которую впредь будем называть полным моментом инерции винта

$$k = 1,2 \div 1,4.$$

Момент инерции самого винта  $\theta_m$  находят каким-либо графоаналитическим или графическим способом. Особенно удобен расчет, основанный на методе средних ординат, не требующий применения планиметра [56, стр. 26].

Для приближенного определения  $\theta_m$  может быть использована эмпирическая формула Л. М. Кутузова — ее средняя погрешность для винтов нормального типа оценивается в 10%, а для специальных достигает 50%

$$\theta_m \approx 28 \cdot 10^{-8} \gamma D^5 a (a + 3). \quad (2.10)$$

Такого же происхождения формула Л. М. Кутузова и М. В. Яковлевой позволяет приближенно оценить момент инерции присоединенной к винту воды

$$\theta_v \approx 2,15 \cdot 10^{-8} D^5 \left\{ \frac{a}{b} + 366 \cdot 10^{-4} \left( \frac{90}{z(\lambda_p^2 + 9,7)} - \frac{n_v}{aN} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( h + \frac{h^2}{10} - \lambda_p \right) \right\}. \quad (2.11)$$

Здесь  $a = \frac{A}{A_d}$  и  $h = \frac{H}{D}$  — дисковое и шаговое отношения винта;

$$b = \left( 1 + \frac{z}{9a} \right) \left( 1 + \frac{3,8}{h^2} \right);$$

$D$  и  $z$  — диаметр винта и число его лопастей;

$\gamma$  — удельный вес материала винта;

$N$  и  $n_v$  — частота колебаний винта и число его оборотов;

$\lambda_p \approx h - 0,3$  — относительная поступь винта.



Для винтов с регулируемым шагом по этим формулам находят момент инерции винта при максимальном угле атаки лопастей. При флюгерном положении лопастей  $\theta_b = 0$ . На швартовых режимах  $\lambda_p = 0$ .

**5. Момент инерции гидромуфты.** Моменты инерции каждой чаши гидромуфт находят отдельно указанным выше графическим способом. При этом рабочая жидкость учитывается в находящихся в этих чашах, количествах, как жесткое тело.

**6. Экспериментальное определение моментов инерции деталей.** Для деталей, центр тяжести которых совпадает с осью вращения, например, гребных винтов, чаш гидромуфт, маховиков, определение моментов инерции производится известными методами бифилярного подвеса. Этот метод пригоден и для коленчатых валов, если они отбалансированы статически и динамически.

Для деталей несимметричной формы (шатуну, коленчатые валы, имеющие статический или динамический небаланс) применяется метод качаний. Описание этих методов имеется в [56, стр. 28], [66, стр. 233] и пр.

## § 11. Определение упругих свойств соединений

Упругие свойства соединения — участка валопровода между сосредоточенными массами — будем характеризовать его податливостью. Как уже указывалось (§ 2), податливостью (на кручение) называется отношение угловой деформации соединения ( $\varphi_{y+1} - \varphi_y$ ) к возникающему в нем эластическому моменту — моменту упругих сил ( $U_{y,y+1}$ ). Податливость соединения  $e_{y,y+1}$  в многомассовых системах указывается с индексами ( $y, y+1$ ), соответствующими номерам тех масс, между которыми это соединение размещается в системе,

$$e_{y,y+1} = \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{U_{y,y+1}} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (2.12)$$

Как видно из определения, податливость выражается величиной, обратной жесткости  $c$ ,

$$c_{y,y+1} = \frac{1}{e_{y,y+1}}.$$

Податливость валопровода равна сумме податливостей его частей

$$e_{1,n} = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}, \quad (2.13)$$

что не следует понимать формально, так как переходы от каждого участка вала к смежному, который отличается от него геометрическими размерами, обычно вносят существенные поправки.

На основании формулы (1.06) податливость пропорциональна длине соединения, обратно пропорциональна полярному моменту инерции его сечения и модулю сдвига материала, из которого это соединение выполнено.

В табл. 2 приведены модули сдвига некоторых материалов, из которых изготавливаются валы, и численные значения коэффициентов  $32/\pi G$ , входящих в указанные ниже расчетные формулы.

Таблица 2

Модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент податливости некоторых материалов

Наименование материала	$E \text{ кг/см}^2$	$G \text{ кг/см}^2$	$\frac{32}{\pi G} \text{ см}^2/\text{кг}$
Сталь углеродистая	$2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$1,26 \cdot 10^{-5}$
Чугун с глобулярным графитом	$1,8 \cdot 10^6$	$7,4 \cdot 10^5$	$1,38 \cdot 10^{-5}$
Чугун с пластинчатым графитом	$1,5 \cdot 10^6$	$6,5 \cdot 10^5$	$1,57 \cdot 10^{-5}$
Бронза	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	$2,43 \cdot 10^{-5}$
Алюминиевые сплавы (дюралюминий)	$0,7 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	$3,78 \cdot 10^{-5}$
Магниеые сплавы (электрон)	$0,45 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^5$	$5,66 \cdot 10^{-5}$
Резина	35	7	1,45

**Редуцированная податливость.** В случаях, когда система включает в себе преобразователь (мультипликатор или редуктор), часть ее, содержащую коленчатый вал, считают за основную. Оставшуюся часть, расположенную после преобразователя, заменяют динамически эквивалентной, что позволяет привести всю систему к виду обычной, безредукторной (рис. 7). Кинетическая энергия масс и потенциальная энергия соединений приведенной системы при этом должны оставаться такими же, как в действительной системе.

При приведении массы преобразователя к эквивалентной массе, расположенной на валу основной части системы, перемещение его ведомого колеса изменяется в  $i$  раз (в случае редуктора это перемещение увеличивается против действительного). В таком же отношении изменяются после приведения перемещения всех других масс, расположенных после преобразователя (при свободных колебаниях любой формы соотношения между амплитудами всех масс системы остаются постоянными). Отмечая действительные параметры системы после преобразователя значком', для системы, представленной на рис. 7, б, имеем:  $\varphi'_i = i\varphi_i$ ;  $\varphi'_{i+1} = i\varphi_{i+1}$ .



Потенциальная энергия  $\Pi'_{l, l+1}$  первого соединения после преобразователя, согласно (1.09), будет

$$\Pi'_{l, l+1} = \frac{(\varphi'_{l+1} - \varphi'_l)^2}{2e'_{l, l+1}} = \frac{i^2 (\varphi_{l+1} - \varphi_l)^2}{2e'_{l, l+1}}.$$

Податливость того же соединения  $e_{l, l+1}$  приведенной системы должна обеспечивать тот же запас потенциальной энергии, поэтому

$$\Pi_{l, l+1} = \Pi'_{l, l+1} = \frac{(\varphi_{l+1} - \varphi_l)^2}{2e_{l, l+1}}.$$

Отсюда находим величину редуцированной податливости

$$e_{l, l+1} = e'_{l, l+1} i^{-2}. \quad (2.14)$$

Таким образом, редуцированная податливость соединения после редуктора будет больше, а после мультипликатора — меньше действительной.

Приведем выводы формул для расчета податливостей некоторых соединений (в качестве примеров) и аналогичные расчетные формулы для специфических участков судовых валопроводов. Все размеры будем принимать в сантиметрах.

1. Сплошной круглый вал (см. табл. 1). На основании формулы (1.06) находим

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{l}{GJ_p} \\ J_p &= \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned} \right\} e = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{l}{d^4}. \quad (2.15)$$

2. Круглый вал с концентрическим сверлением (см. рис. 8). Момент инерции кольцевого сечения будет

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - \delta^4).$$

Подставляя его в формулу (2.15), получаем

$$e = \frac{l}{GJ_p} = \frac{32l}{\pi G (d^4 - \delta^4)} = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{l}{d^4} k_c, \quad (2.16)$$

где  $k_c$  — коэффициент сверления

$$k_c = \frac{1}{1 - \left(\frac{\delta}{d}\right)^4}, \quad (2.17)$$

который может быть подсчитан или найден по номограмме (рис. 8).

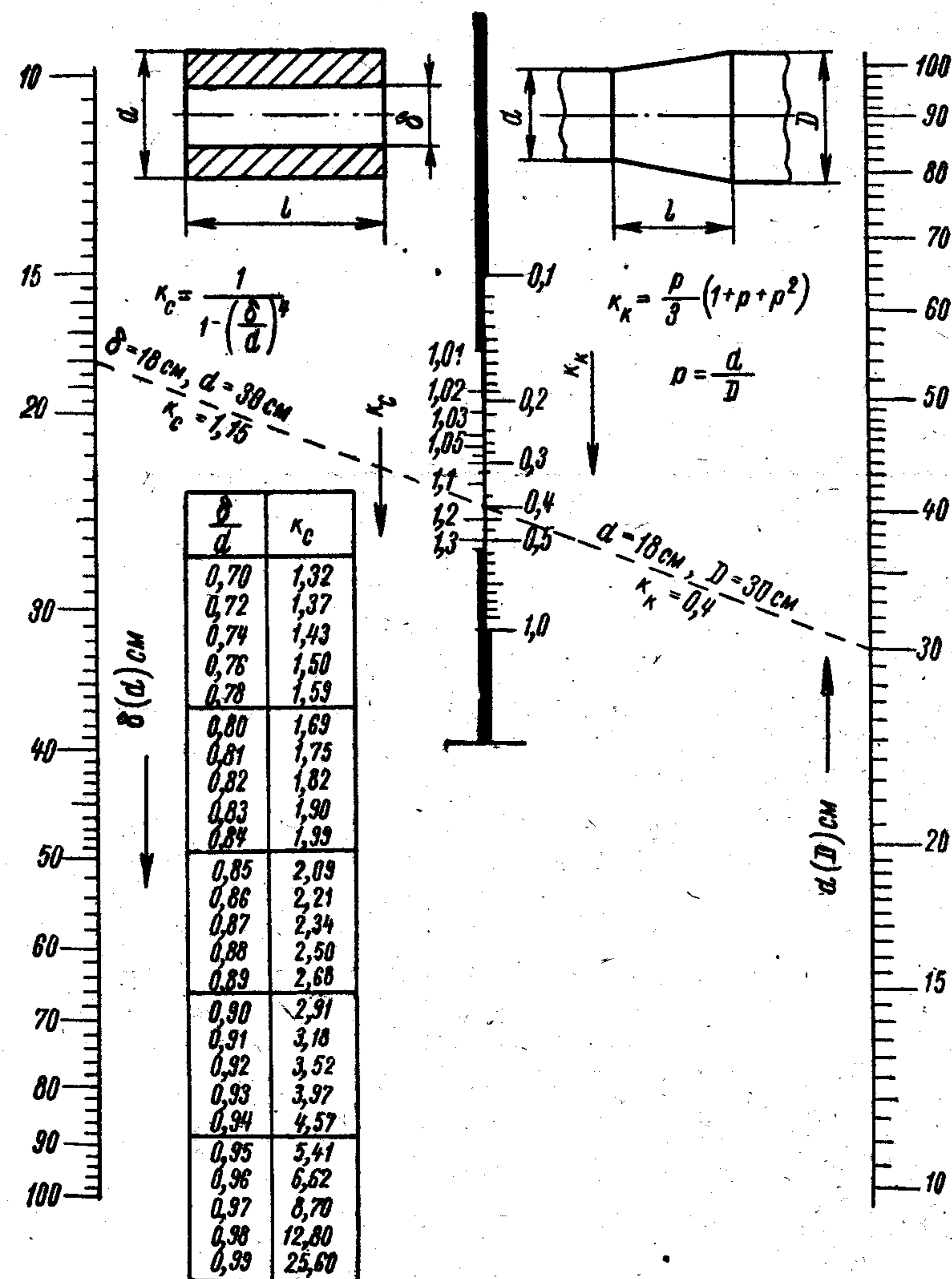


Рис. 8. Номограмма для определения податливостей цилиндрического и конического валов.

3. Конический вал (рис. 9). Конический вал можно рассматривать как ступенчатый, состоящий из бесконечно большого числа цилиндрических участков длиной  $dx$  и диаметром  $d_x = d + \frac{1}{l}(D - d)x$ .

Податливость каждого участка на основании (2.15)

$$de = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{dx}{d_x^4},$$



а всего конуса, после некоторых преобразований [29, стр. 8],

$$e = \int_0^l de = \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{l}{d^4} k_k, \quad (2.18)$$

где коэффициент

$$k_k = \frac{d}{3D} \left( 1 + \frac{d}{D} + \frac{d^2}{D^2} \right) \quad (2.19)$$

может быть найден по номограмме (рис. 8).

При наличии сверления в формулу (2.18) добавляется множитель  $k_c$ .

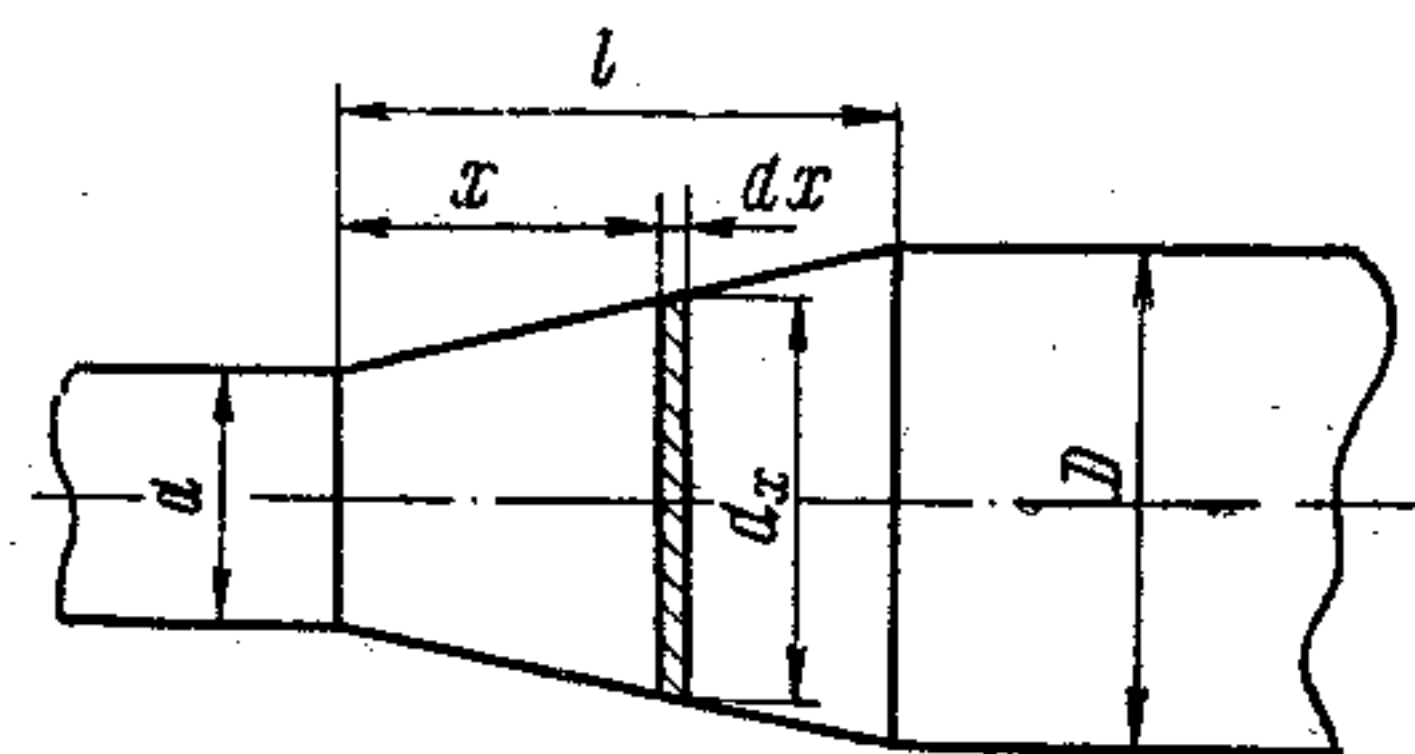


Рис. 9. К определению податливости конического вала.

**4. Цилиндрический вал произвольного сечения.** Податливость вала с сечением симметричным относительно оси вращения может быть приближенно найдена на основании формулы Сен-Венана [56, стр. 41]

$$e \approx \frac{32}{\pi G} \cdot \frac{4J_p l}{F^4}, \quad (2.20)$$

где  $J_p$  и  $F$  — полярный момент инерции сечения относительно центра тяжести и площадь сечения.

жести и площадь сечения.

**5. Ступенчатый вал (рис. 10).** Податливость ступенчатого вала может существенно отличаться от суммы податливостей его частей. При малом радиусе галтели, когда  $d_2 \gg d_1$ , значительная часть материала выступающей части вала с большим диаметром (непосредственно у перехода) не деформируется. Это способствует увеличению суммарной податливости соединения. Портер [74] считает, что такой же эффект имеет место при увеличении длины вала с меньшим диаметром на величину  $\lambda$  и при укорочении на такую же величину его оставшейся части. При этом

$$e = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1 + \lambda}{d_1^4} + \frac{l_2 - \lambda}{d_2^4} \right) = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4} + x \right). \quad (2.21)$$

Полученная поправка  $x$  (при  $d_2 > d_1$  и  $d_2 \gg d_1$ ) может быть найдена из приближенной зависимости

$$x = \lambda \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) \approx \frac{\lambda}{d_1^4} = \frac{\lambda}{d_1} \cdot \frac{1}{d_1^3}, \quad (2.22)$$

а отношение  $\lambda/d_1$  — из графика на рис. 10.

При большом радиусе галтели, когда  $r > (0,2 \div 0,3) d_1$ , встречаемся с противоположным эффектом. Податливость части вала меньшего диаметра уменьшается за счет увеличения его сечений в пределах галтели, что эквивалентно уменьшению его длины на величину  $\lambda$  за счет соответствующего удлинения части вала с большим диаметром. Расчет суммарной податливости участка произ-

водится здесь по той же формуле, но поправки  $\lambda$  и  $x$  оказываются со знаками минус.

При наличии центрального сверления в формулу (2.21) добавляется множитель  $k_c$  (2.17).

Гребни упорных подшипников учитываются аналогичным образом, но, если ширина гребня менее двух десятых диаметра вала, то его влиянием на податливость участка можно пренебречь.

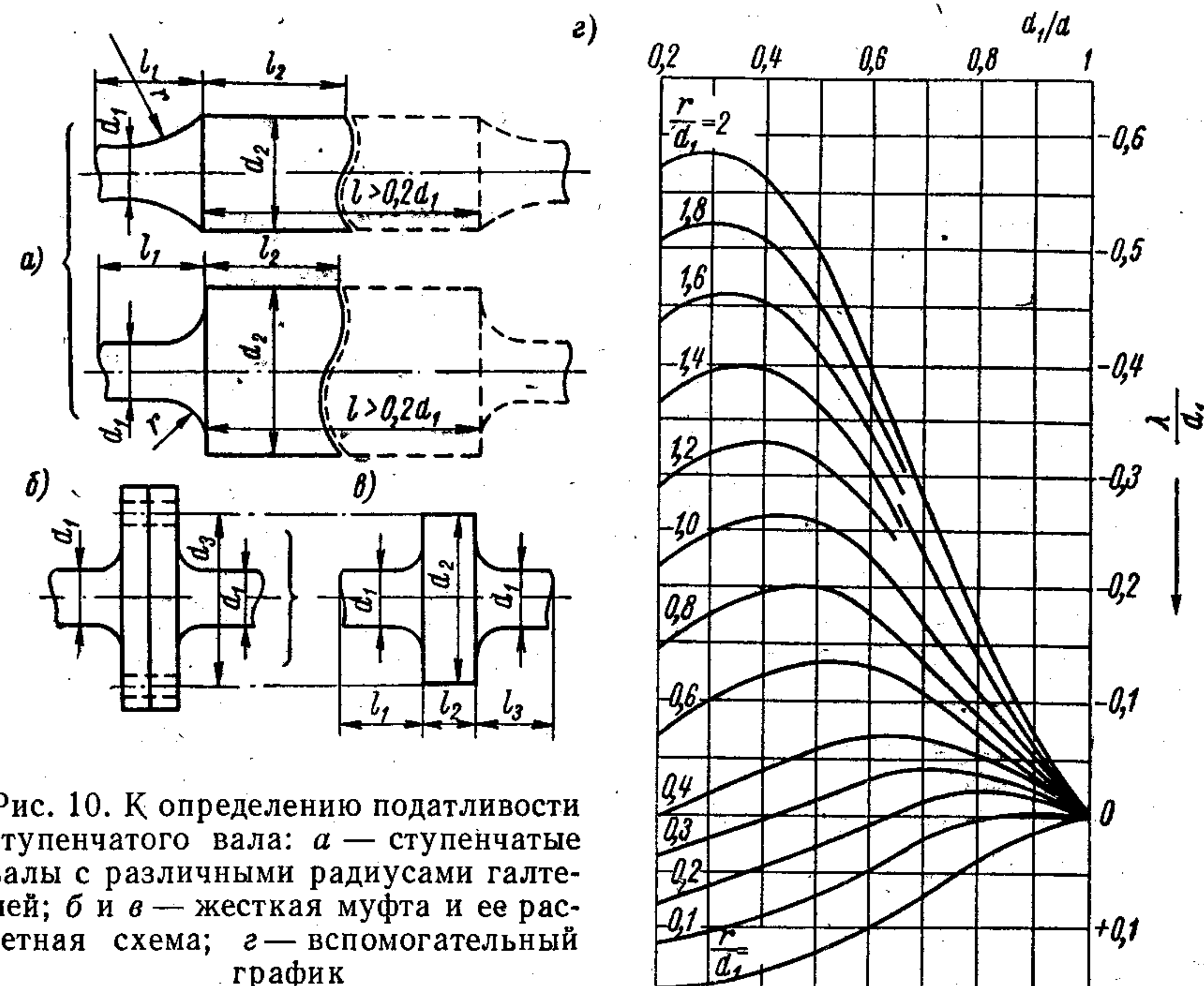


Рис. 10. К определению податливости ступенчатого вала: а — ступенчатые валы с различными радиусами галтелей; б и в — жесткая муфта и ее расчетная схема; г — вспомогательный график

**6. Соединения валов (рис. 10).** Податливость фланца, откованного вместе с валом, находится как для ступенчатого соединения (2.21), но вместо  $d_2$  принимается диаметр окружности, на которой размещаются соединительные болты. При этом необходимо учесть влияние галтели.

Если фланец укреплен на валу без шпонки посредством прессовой, горячей или гидропрессовой посадки, то податливость соединения оценивается также по формуле для ступенчатого вала, но поправка  $x$  [при  $r < (0,2 \div 0,3) d_1$ ] принимается увеличенной в полтора раза. В случаях, когда валы соединяются продольно-свертной муфтой или ступица фланца предусматривает шпонку при плотной посадке, та же поправка увеличивается в два раза. Для шлицевого и шпоночного соединений со скользящей посадкой  $x$  увеличивается в четыре раза (при этом  $\lambda$  достигает половины диаметра вала).



Отношение  $\lambda/d_1$  для различных случаев находится из графика (рис. 10).

7. Стальной вал с бронзовой облицовкой (рис. 11). Дейдвудные валы обычно снабжаются насаженной с горячей посадкой бронзовой облицовкой, которая деформируется вместе с валом как одно целое. Модуль сдвига для бронзы приближенно считаем в два раза меньшим, чем для стали (табл. 2)  $G_{бр} \approx 0,5 G_{ст}$ . Это не вносит существенной погрешности, так как толщина облицовки невелика. Как вал, так и облицовка в общем случае имеют кольцевые сечения, поэтому податливость каждого из них  $e_{ст}$  и  $e_{бр}$  находится по формуле (2.16) с учетом коэффициентов сверления  $k_c$  и  $k_{сбр}$

$$k_c = \left[1 - \left(\frac{\delta}{d}\right)^4\right]^{-1} \text{ и } k_{сбр} = \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]^{-1}.$$

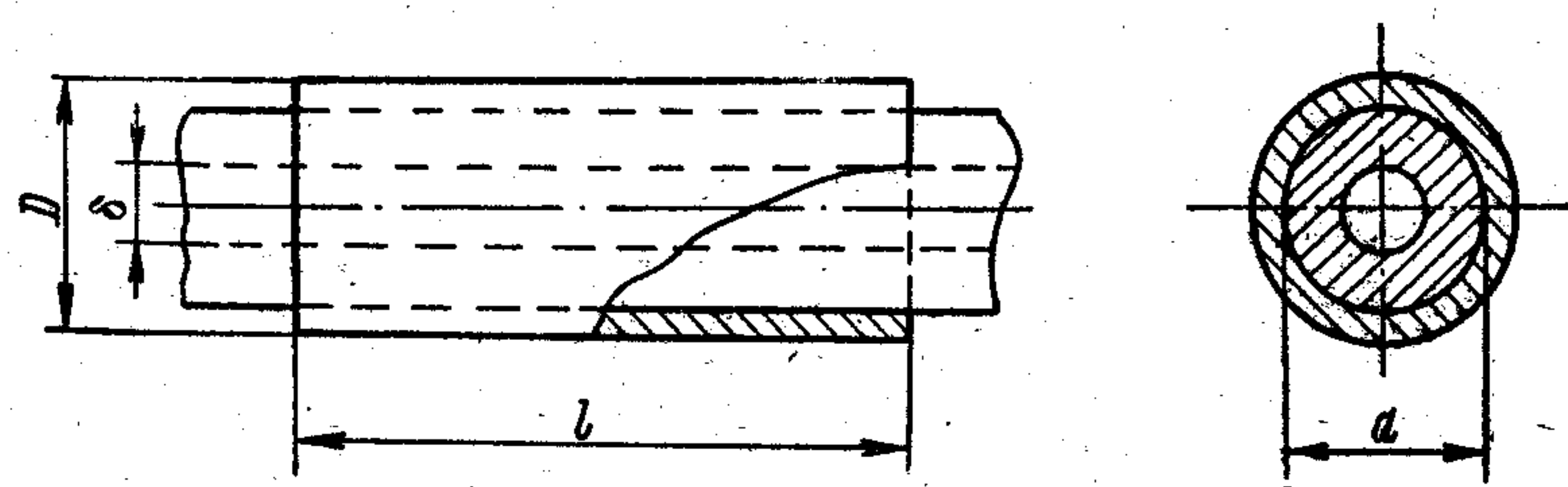


Рис. 11. Дейдвудный вал.

При имеющейся здесь параллельной работе двух деталей податливость вала с облицовкой  $e_{об}$  находим на основании формулы ( $l$  — длина облицованного вала)

$$\frac{1}{e_{об}} = \frac{1}{e_{ст}} + \frac{1}{e_{бр}} = \frac{\pi G_{ст} d^4}{32 l k_c} + \frac{\pi G_{бр} D^4}{32 l k_{сбр}} = \frac{\pi G_{ст} d^4}{32 l} \left[ \frac{1}{k_c} + \frac{1}{2 k_{сбр}} \left(\frac{D}{d}\right)^4 \right],$$

или

$$e_{об} = \frac{32}{\pi G_{ст}} \cdot \frac{l}{d^4} k_{об}, \quad (2.23)$$

где  $k_{об}$  — коэффициент облицовки (обратная величина выражения в квадратных скобках);

$$k_{об} = \frac{1}{\frac{1}{k_c} + \frac{1}{2 k_{сбр}} \left(\frac{D}{d}\right)^4} = \frac{2}{1 - 2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^4 + \left(\frac{D}{d}\right)^4}. \quad (2.24)$$

8. Колено вала. Угловая деформация колена при крутильных колебаниях происходит за счет скручивания шеек и изгиба щек в плоскости, перпендикулярной к оси вала. Определение податливости колена как суммы податливостей его упомянутых элементов не может дать удовлетворительного результата вследствие сложности учета влияния переходов (от шеек к щекам) и сложности учета эффекта «защемления». Поясним последнее.

Если к рамовым шейкам какого-либо колена приложить скручивающие это колено моменты разных знаков, то оси рамовых шеек разойдутся на некоторую величину (допускаемую зазорами в рамовых подшипниках). В этом легко убедиться, согнув проволоку по форме колена и деформировав ее указанным способом. Податливость такой модели на скручивание имеет определенную величину. Если смещение шеек устранить, восстановив их соосность, то для этого потребуется приложить дополнительные силы. Следовательно, жесткость колена с соосными (защемленными) шейками будет больше, а податливость меньше, чем при отсутствии защемления. Практически податливость каждого колена зависит от зазора в подшипнике и упругих свойств последнего.

Из сказанного следует, что аналитическое определение податливости колена является весьма сложным, а экспериментальное следует выполнять на валах, уложенных в подшипники, т. е. в реальных условиях их работы.

Приведенные ниже эмпирические формулы содержат в себе по три члена. Нетрудно заметить, что два из них характеризуют податливость шеек на скручивание, один — изгиб щек.

Формула Зиманенко [18] для валов дизелей самых разнообразных типов (символы указаны на рис. 12)

$$e = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1^2 + 0,6 h d_1}{x_1 l_1} + \frac{4 l_2 R + b_0 d_1}{5 x_2 R} + \frac{R}{h b_0^3} \sqrt{\frac{R}{d_2}} \right), \quad (2.25)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — вычисляются по формуле одного вида  $x_i = d_i^4 - \delta_i^4$  (член, характерный для полярного момента инерции кольцевого сечения);

$b_0$  — ширина щеки в сечении, находящемся на середине расстояния между осями рамовых и шатунных шеек.

Формула Коломенского завода [56, стр. 51] преимущественно для валов судовых дизелей средней мощности

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[ \frac{l_1}{x_1} + \frac{l_2}{x_2} + \frac{0,9 R}{h b_0^3} \left( 1 + \frac{0,64}{R^2} \sqrt{\frac{x_1 x_2}{R^2}} \right) \right], \quad (2.26)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  имеют указанные выше значения, а эквивалентная ширина щеки  $b_0$  находится с помощью графика на рис. 12.

Формула Зульцера [29, стр. 17] преимущественно для валов судовых дизелей средней и большой мощности (в частности, малооборотных с составными валами)

$$e = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1 + 0,4 d_1}{x_1} + \frac{l_2 + 0,4 d_2}{x_2} + \frac{0,8 y}{h b_0^3} \right), \quad (2.27)$$

где

$$y = R - \frac{4}{3\pi} \frac{d_2^3 - \delta_2^3}{d_2^2 - \delta_2^2}.$$



Формула Тимошенко [56, стр. 51] дана автором в двух выражениях — с учетом и без учета заземления — определяющих границы, в пределах которых находится истинная податливость колена. Этой формулой удобно пользоваться для оценки изменения податли-

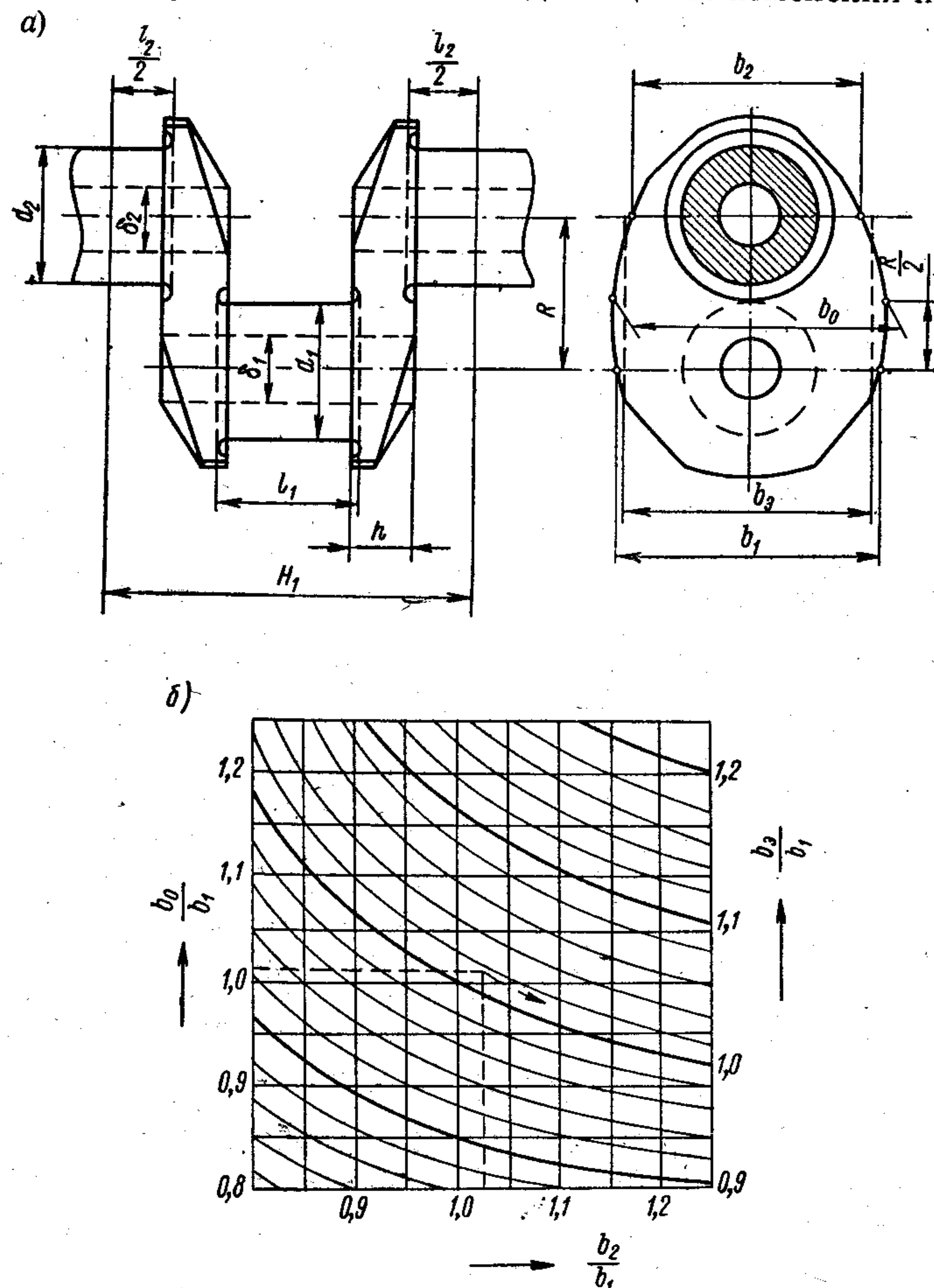


Рис. 12. Эскиз колена вала (а) и номограмма для определения эквивалентной ширины его щек (б).

вости колена вследствие изменения масляного зазора в подшипниках.

Формула Терских [56, стр. 53] служит для грубо-ориентировочной оценки податливости валов разнообразных дизелей в случаях, когда все необходимые размеры вала неизвестны

$$e \approx \frac{9,4}{G} \frac{H + 0,5R}{x_{cp}}; \quad (2.28)$$

$x_{cp}$  здесь находится аналогично  $x_i$  на основании средних значений диаметров шеек и отверстий в них.

Следует отметить, что наибольшее число конструктивных параметров колена учитывает формула ВЈСЕРА [73] и [56].

**9. Муфты.** Характеристикой муфты называется зависимость возникающего в ней упругого момента от деформации.

Линейность характеристики муфты обуславливается линейностью характеристик упругих элементов, схемой передачи усилий, а также отсутствием предварительных затягов (или зазоров) и ударов об ограничитель. Если эти условия не соблюдаются, но часть характеристики муфты имеет линейный участок и на эксплуатационных режимах установки муфта работает в пределах этого участка, то она может считаться линейной. Податливость муфты зависит от ее конструкции. В качестве примера найдем податливость муфты с цилиндрическими пружинами (рис. 13).

Жесткость каждой пружины  $c$  находится по известной формуле

$$c = \frac{P}{f} = \frac{G\delta^4}{8nd^3} \text{ кг/см},$$

Рис. 13. Эскиз муфты с цилиндрическими пружинами.

где  $P$  и  $f$  — усилие, передаваемое каждой пружиной, и соответствующая ее деформация;

$d$  и  $\delta$  — средний диаметр пружины и диаметр проволоки;

$n$  — число рабочих витков.

Найдем деформацию пружины под действием силы  $P$

$$f = \frac{8nd^3}{G\delta^4} P.$$

Дальнейший расчет производим на основании формулы (1.07)

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\varphi}{U} \\ U &= PmR \\ \varphi &= \frac{f}{R} \end{aligned} \right\} e = \frac{f}{PmR^2} = \frac{8nd^3P}{G\delta^4PmR^2} = \frac{8nd^3}{G\delta^4mR^2}, \quad (2.29)$$

где при вычислении эластического момента  $U$  предусмотрено усилие от всех  $m$  пружин, расположенных на радиусе  $R$ .

Для муфт с нелинейной характеристикой податливость оказывается зависящей от среднего крутящего момента  $M_{cp}$ , передаваемого муфтой на каждом расчетном режиме,

$$e = \left( \frac{d\varphi}{dU} \right)_{U=M_{cp}} = f(M_{cp}). \quad (2.30)$$



На основании соответствующих графиков для этих муфт находятся аналитические выражения эластического момента и податливость (гл. 8), которые вводятся в расчет нелинейных колебаний системы.

**10. Передачи зубчатые, электрические и гидравлические.** Существенной особенностью зубчатых соединений является наличие зазора между зубцами, который обуславливает нелинейность их характеристик. Однако в большинстве случаев амплитуда  $F$  эластического момента при колебаниях не превосходит среднего крутящего момента  $M_{cp}$ . При этом  $M_{cp} + F > M_{cp} - F > 0$ , что обуславливает отсутствие перекадки зазора между зубцами. С другой стороны, деформация изгиба зубцов ( $\delta$ ) выражается сотыми или тысячными долями миллиметра. Податливость зубчатого колеса (или пары сцепляющихся колес) рассчитывается по той же формуле  $e = \varphi/U$ , но в числитель входит величина  $\delta/R$ , которая близка к нулю. Все сказанное позволяет считать податливость зубчатого зацепления равной нулю. Некоторая податливость в передачах может быть обусловлена нежесткостью самих колес (при наличии спиц), а в зубчатых муфтах — нежесткостью втулки муфты. Ременная передача также рассматривается как упругая связь [56].

Электрическая связь между ротором генератора и электрической сетью при постоянном токе эквивалентна некоторой податливости, которая может быть принята равной бесконечности, то же имеет место при включении в систему валопровода электроиндукционной или гидравлической муфты. Части системы, связанные такими соединениями в отношении крутильных колебаний, можно считать изолированными одна от другой.

При переменном токе между электрической машиной и сетью имеет место синхронизирующий момент, эквивалентный некоторой податливости [56, стр. 56].

**11. Экспериментальное определение податливостей.** Экспериментальное определение податливостей применяется для соединений сложной формы. Для этого деталь нагружают скручивающим моментом и посредством какого-либо устройства фиксируют ее угловую деформацию. Зависимость  $e = f(\varphi, M)$  изображается на графике ( $\varphi - M$ ). Так как данные, соответствующие процессам нагружения и разгрузки, не совпадают, то на этом графике получается замкнутая кривая — петля гистерезиса. Каждому значению  $M$  здесь отвечают два значения  $\varphi$ . Отложив на том же графике точки  $\varphi_{cp} = \frac{1}{2}(\varphi_{max} + \varphi_{min})$ , через них проводят кривую, которая (для линейных соединений) оказывается близкой к прямой. Тангенс угла наклона этой линии к координатной оси  $M$  выражает податливость соединения (рис. 14, в).

Если исследуемая деталь невелика, то опыт выполняют на испытательной машине. При значительных размерах детали нагрузка осуществляется специальным устройством (рис. 14, а). Нетрудно

видеть, что здесь деталь нагружается только скручивающим моментом. Устройство, показанное на рис. 14, б, обуславливает нагружение детали не только скручивающим моментом, но и моментом  $Pl$ , изгибающим ось вала, что вносит некоторые искажения показаний. Регистрация угла скручивания производится с помощью индикаторов или оптическим способом по углу отклонения луча, отраженного от зеркальца, укрепленного на детали.

Так как деформации коленчатого вала при описанном статическом испытании и в условиях действительной работы несколько

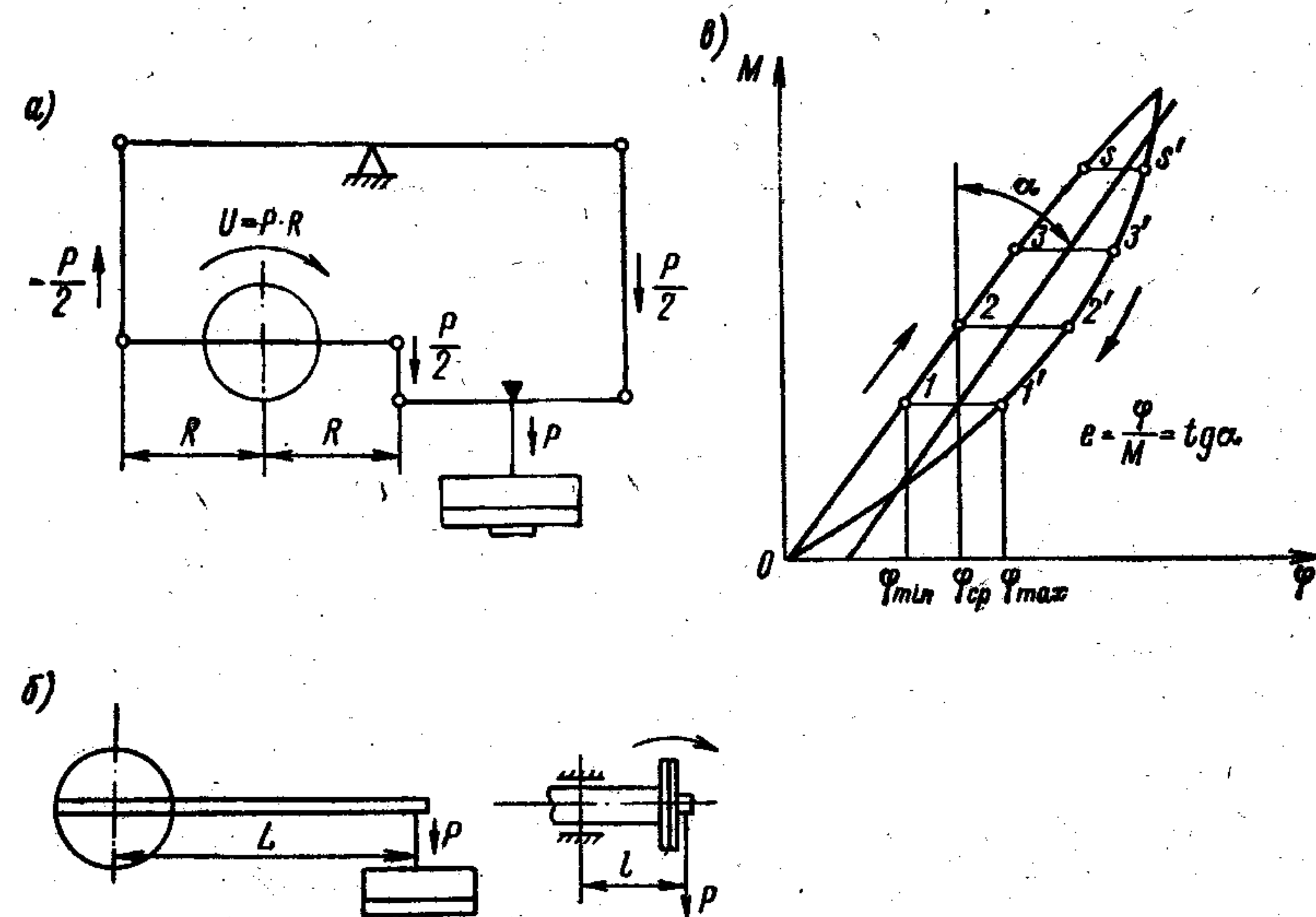


Рис. 14. К экспериментальному определению податливости соединений: а и б — схемы нагружения; в — результаты экспериментальных замеров и их обработка.

отличаются, то экспериментальное определение податливости целесообразнее выполнять с помощью торсиографирования. Для этого выбирают наиболее простую установку двигателя, для которой моменты инерции масс и податливости соединений (за исключением колена) можно найти с достаточной степенью точности. Торсиографирование позволяет найти частоту свободных колебаний этой системы. Последующий пересчет дает возможность найти податливость колена вала.

**Пример 1.** Определение податливости колена вала двигателя 6ДР 30/50. Эскиз колена дан на рис. 15.

Необходимые для расчета размеры укажем непосредственно под соответствующими им символами (в см):

$R$	$d_2$	$d_1$	$l_2$	$l_1$	$h$	$b_0$	$H$
25	22	20	14	15	9,5	40	48



Расчет выполняем по формуле (2.27), так как конструктивные формы вала близки к тем, которые исследовались Зульцером при выводе этой формулы.

1. Предварительно находим:

$$\frac{32}{\pi G} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ кгГ}^{-1} \text{ см}^2 \text{ (табл. 2);}$$

$$x_1 = d_1^4 = 20^4 = 16 \cdot 10^4 \text{ см}^4; \quad x_2 = d_2^4 = 22^4 = 23,4 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$y = R - \frac{4}{3\pi} \frac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2} = R - \frac{4d_2}{3\pi} = 25 - \frac{4 \cdot 22}{3 \cdot 3,14} = 15,67 \text{ см.}$$

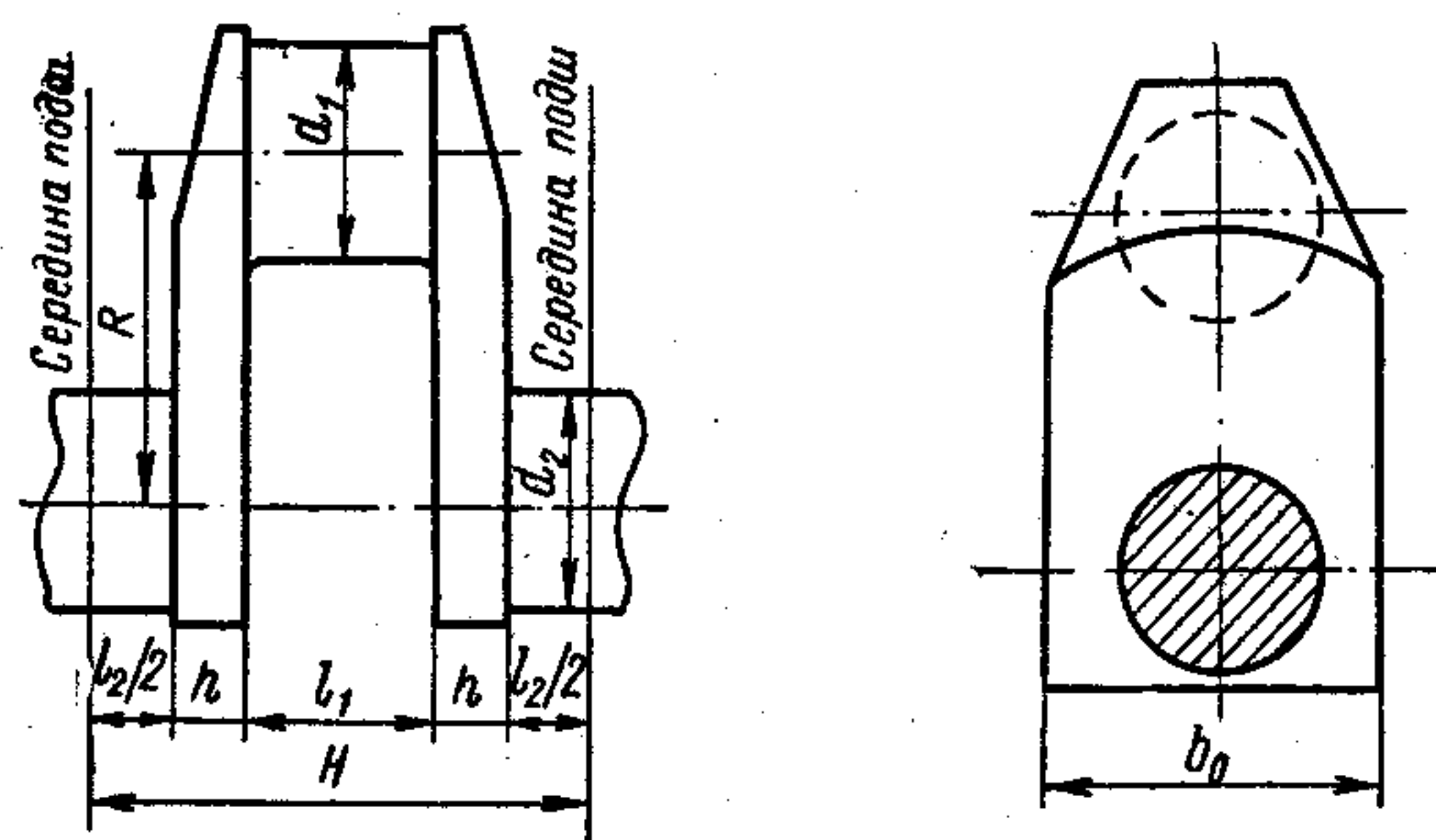


Рис. 15. Эскиз колена вала (к примеру 1).

2. Податливость колена (2.27)

$$e = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1 + 0,4d_1}{x_1} + \frac{l_2 + 0,4d_2}{x_2} + \frac{0,8y}{hb_0^3} \right) =$$

$$= 1,26 \cdot 10^{-5} \left( \frac{15 + 0,4 \cdot 20}{16 \cdot 10^4} + \frac{14 + 0,4 \cdot 22}{23,4 \cdot 10^4} + \frac{0,8 \cdot 15,67}{9,5 \cdot 40^3} \right) =$$

$$= 3,27 \cdot 10^{-9} \text{ кгГ}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

3. Податливость колена по ориентировочной формуле Терских (2.28)

$$e \approx \frac{9,4}{G} \cdot \frac{H + 0,5R}{x_{\text{ср}}} = \frac{9,4}{8,1 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{48 + 0,5 \cdot 25}{21^4} = 3,02 \cdot 10^{-9} \text{ кгГ}^{-1} \text{ см}^{-1},$$

что отличается от полученного по более точной формуле на

$$\frac{3,27 - 3,02}{3,27} \cdot 100 = 7,6\%.$$

**Пример 2.** Определение полного момента инерции массы стального гребного винта при колебаниях шестого порядка.

Данные винта указаны с обозначениями, отвечающими формулам (2.10) и (2.11),

$$D = 1,92 \text{ м}; \quad z = 4;$$

$$h = \frac{H}{D} = 0,585; \quad \gamma = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3;$$

$$a = \frac{A}{A_d} = 0,506; \quad \frac{n_B}{N} = \frac{1}{v} = \frac{1}{6}.$$

1. Момент инерции гребного винта без учета массы воды (2.10)

$$\theta_M \approx 2,8 \cdot 10^{-8} \gamma D^5 a (a + 3) = 2,8 \cdot 10^{-8} \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} \times$$

$$\times 192^5 \cdot 0,506 (0,506 + 3) = 1030 \text{ кгГсмсек}^2.$$

2. Момент инерции массы присоединенной к винту воды (2.11)

$$\theta_B \approx 2,15 \cdot 10^{-8} D^5 \left\{ \frac{a}{b} + 366 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{90}{z(\lambda_p^2 + 9,7)} - \frac{n_B}{aN} \right] \left( h + \frac{h^2}{10} - \lambda_p \right) \right\};$$

относительная поступь винта  $\lambda_p = h - 0,3 = 0,585 - 0,3 = 0,285$ ;

$$\theta_B \approx 2,15 \cdot 10^{-8} \cdot 192^5 \left\{ \frac{0,506}{3,97} + 366 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{90}{4(0,285^2 + 9,7)} - \frac{1}{0,506 \cdot 6} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left( 0,585 + \frac{0,585^2}{10} - 0,285 \right) \right\} = 258,5 \text{ кгГсмсек}^2.$$

3. Полный момент гребного винта

$$\theta = \theta_M + \theta_B = 1030 + 258,5 = 1288,5 \text{ кгГсмсек}^2.$$



Допустим, что в данной системе, состоящей из  $p$  сосредоточенных масс, возбуждены некоторые колебания. При отсутствии внешних и внутренних сопротивлений амплитуды колебаний этих масс будут постоянными.

В рассмотренной выше (§ 2) системе с одной степенью свободы (рис. 1) колебательное движение массы описывалось уравнением

$$\theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\varphi}{e} = 0,$$

где первый член (произведение момента инерции массы на угловое ускорение) выражал инерционный момент, а второй член  $\varphi/e = U$  — эластический момент. В многомассовой системе (рис. 16, а), заключающей в себе  $p$  масс, которая имеет  $p$  степеней свободы, инерционные моменты ( $R_y$ ) будут в каждой массе. Согласно закону Ньютона эти моменты пропорциональны массе и ускорению тела и направлены в сторону, противоположную ускорению. В каждом соединении будет действовать эластический момент ( $U_{y, y+1}$ ) (рис. 16, б).

Инерционный и эластический моменты выражаются зависимостями

$$\left. \begin{aligned} R_y &= -\theta_y \frac{d^2 \varphi_y}{dt^2} = -\theta_y \varphi_y''; \\ U_{y, y+1} &= \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{e_{y, y+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.01)$$

Пользуясь этими выражениями, составим уравнение равновесия для некоторой промежуточной массы с номером  $y$ .

$$-U_{y-1, y} + R_y + U_{y, y+1} = 0. \quad (3.02)$$

Эластические моменты приняты здесь с разными знаками из следующих соображений.

Допустим, что в смежных соединениях действуют моменты, скручивающие их в одном направлении, как показано на рис. 16, б.

Рассекая соединения, каждый из этих моментов представим действующим на массы справа и слева от сечения, как показано на рис. 16, в. Отсюда видно, что по отношению к массе  $\theta_y$  момент  $U_{y-1, y}$  должен быть принят с обратным знаком.

Перепишем выражение (3.02) с учетом (3.01)

$$\theta_y \varphi_y'' + \frac{\varphi_y - \varphi_{y-1}}{e_{y-1, y}} - \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{e_{y, y+1}} = 0 \quad (3.03)$$

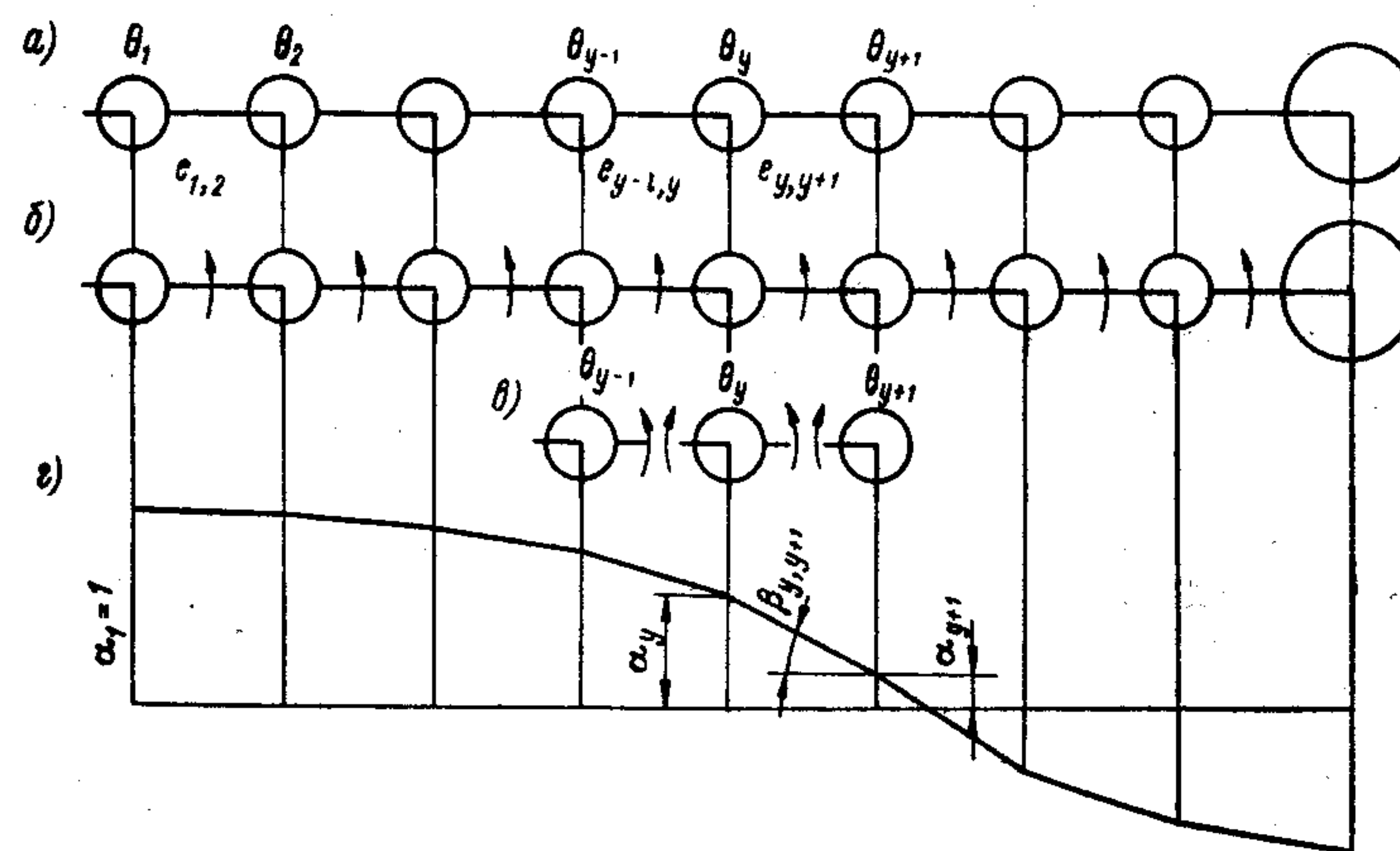


Рис. 16. Схема дискретной многомассовой системы: *а* — схема системы; *б* и *в* — действие эластических моментов; *г* — форма свободных колебаний.

и, полагая  $y = 1, 2, \dots, p-1, p$ , составим систему дифференциальных уравнений

[illegible]

В первом и последнем уравнениях по одному члену обратилось в нуль, так как на крайние массы действуют эластические моменты только с одной стороны.



Первое из этих уравнений позволяет найти перемещение второй массы

$$\varphi_2 = \varphi_1 + e_{1,2} \theta_1 \varphi_1''.$$

Подставляя значение  $\varphi_2$  во второе выражение, находим

$$\varphi_3 = \varphi_2 + e_{2,3} \sum_{i=1}^2 \theta_i \varphi_i''.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi_y = \varphi_{y-1} + e_{y-1,y} \sum_{i=1}^{y-1} \theta_i \varphi_i'' \quad (3.05)$$

Кроме того, перемещение любой массы, путем несложных преобразований этих соотношений, может быть выражено через перемещение первой массы. Обозначив номер производной верхним индексом, получим

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= f_1(\varphi_1, \varphi_1^{II}); \quad \varphi_3 = f_2(\varphi_1, \varphi_1^{II}, \varphi_1^{IV}); \\ \varphi_4 &= f_3(\varphi_1, \varphi_1^{II}, \varphi_1^{IV}, \varphi_1^{VI}) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.06)$$

Номер высшей производной оказывается в два раза больше номера функции, а последний на единицу меньше номера той массы, перемещение которой выражено данным уравнением. Поэтому для перемещения последней массы с номером  $p$  получим выражение вида

$$\varphi_p = f_{p-1}(\varphi_1, \varphi_1^{II}, \varphi_1^{IV}, \dots, \varphi_1^{2p-2}). \quad (3.07)$$

Возвращаясь к системе уравнений (3.04), подставим в последнее из них  $\varphi_y$  из зависимостей вида (3.06). При этом номер высшей производной будет на две единицы больше, чем у  $\varphi_p$ , т. е.  $2p$  (см. 3.07).

Объединяя члены, содержащие одинаковые производные  $\varphi$ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение порядка  $2p$

$$B_p \varphi_1^{(2p)} + B_{p-1} \varphi_1^{(2p-2)} + B_{p-2} \varphi_1^{(2p-4)} + \dots + B_2 \varphi_1^{(4)} + B_1 \varphi_1^{(2)} = 0, \quad (3.08)$$

где номера производных указаны в верхних индексах.

Постоянные коэффициенты этого уравнения положительны и представляют собой, как видно из (3.06), некоторые функции  $\theta$  и  $e$ . Наличие только четных номеров производных здесь очевидно.

Характеристическое уравнение ( $2p$ -й степени) имеет вид

$$B_p x^{(2p)} + B_{p-1} x^{(2p-2)} + \dots + B_2 x^{(4)} + B_1 x^{(2)} = 0; \quad (3.09)$$

его корни — мнимые, из которых одна пара равна нулю,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= i\omega_1; & x_3 &= i\omega_2; & \dots & x_{2p-1} &= 0; \\ x_2 &= -i\omega_1; & x_4 &= -i\omega_2; & \dots & x_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (3.08) будет

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t} + C_3 e^{x_3 t} + C_4 e^{x_4 t} + \dots \\ &\dots C_{2p-3} e^{x_{2p-3} t} + C_{2p-2} e^{x_{2p-2} t} * \end{aligned} \quad (3.10')$$

Постоянные представляются здесь комплексными числами. Общий интеграл содержит  $p-1$  пар членов. Выберем одну из этих пар, обозначим ее  $L_y$  и преобразуем на основании формул Эйлера

$$\begin{aligned} L_y &= C_y e^{x_y t} + C_{y+1} e^{x_{y+1} t} = C_y e^{i\omega_y t} + C_{y+1} e^{-i\omega_y t}; \\ e^{i\omega_y t} &= \cos \omega_y t + i \sin \omega_y t; \quad e^{-i\omega_y t} = \cos \omega_y t - i \sin \omega_y t. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_y &= C_y (\cos \omega_y t + i \sin \omega_y t) + C_{y+1} (\cos \omega_y t - i \sin \omega_y t) = \\ &= (C_y + C_{y+1}) \cos \omega_y t + (C_y - C_{y+1}) i \sin \omega_y t. \end{aligned}$$

Из коэффициентов составим выражение

$$A_y = \sqrt{(C_y + C_{y+1})^2 + (C_y - C_{y+1})^2}$$

и вынесем его за скобки

$$L_y = A_y \left( \frac{C_y + C_{y+1}}{A_y} \cos \omega_y t + \frac{C_y - C_{y+1}}{A_y} i \sin \omega_y t \right). \quad (3.11)$$

Коэффициенты  $C_y$  и  $C_{y+1}$  в общем случае являются сопряженными комплексными числами. Их сумма — величина вещественная, а разность — мнимая. Однако в том члене, где есть такая разность, присутствует множитель  $i$ , поэтому оба коэффициента при тригонометрических функциях будут вещественными.

Каждый из коэффициентов, очевидно, меньше единицы, а сумма квадратов их равна единице; это позволяет подобрать такой угол  $\xi_y$ , при котором

$$\frac{C_y + C_{y+1}}{A_y} = \sin \xi_y \quad \text{и} \quad \frac{C_y - C_{y+1}}{A_y} = \cos \xi_y.$$

После подстановки этих функций в (3.11) находим

$$L_y = A_y (\sin \xi_y \cos \omega_y t + \cos \xi_y \sin \omega_y t) = A_y \sin (\omega_y t + \xi_y). \quad (3.12)$$

Таким образом каждая пара членов общего интеграла (3.10) представляет собой некоторую гармоническую функцию с амплитудой  $A_y$  и начальной фазой  $\xi_y$ .

\* Два члена, обусловленные нулевыми корнями, не характеризуют колебания, а потому опущены.



Распространяя приведенное преобразование на каждую пару членов (3.10'), находим уравнение движения первой массы

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \xi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \xi_2) + \dots \\ & \dots + A_1^{(p-1)} \sin(\omega_{p-1} t + \xi_{p-1}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как, согласно зависимости (3.07), перемещение любой массы может быть выражено через перемещение первой массы  $\varphi_1$ , то для всех других масс можно получить аналогичные формулы. В каждую из них войдут те же тригонометрические функции

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \xi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \xi_2) + \dots \\ &\dots + A_1^{(p-1)} \sin(\omega_{p-1} t + \xi_{p-1}); \\ \varphi_2 &= A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \xi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \xi_2) + \dots \\ &\dots + A_2^{(p-1)} \sin(\omega_{p-1} t + \xi_{p-1}) \\ &\dots \\ &\dots \\ \varphi_p &= A_p^{(1)} \sin(\omega_1 t + \xi_1) + A_p^{(2)} \sin(\omega_2 t + \xi_2) + \dots \\ &\dots + A_p^{(p-1)} \sin(\omega_{p-1} t + \xi_{p-1}). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Нижний индекс при  $A$  указывает здесь на номер массы, а верхний на номер гармонической составляющей (порядок гармоника). При рассмотрении стай

При рассмотрении этой системы уравнений можно сделать ряд заключений.

- 1. Каждая масса совершает сложное полигармоническое движение, т. е. одновременно участвует в нескольких главных колебаниях.

2. Каждый вертикальный столбец системы уравнений описывает одно главное колебание всей механической системы. Эти главные колебания отличаются одно от другого частотами и начальными фазами. Так как каждой частоте свободных колебаний соответствует определенное число узлов, можно сделать заключение, что вся система одновременно участвует в одноузловой, двухузловой, трехузловой . . . и  $(p-1)$ -узловой формах колебаний.

3. Полное число форм колебаний на единицу меньше числа масс, что является закономерным, так как в процессе вывода два корня (3.10) характеристического уравнения, обуславливающие существование одного главного колебания, равны нулю.

Каждое главное колебание может быть возбуждено в системе и может существовать самостоятельно. Поэтому, вместо того, чтобы решать всю систему уравнений в целом, можно рассматривать каждое главное колебание отдельно. Это достигается тем, что в расчет вводят только те члены правой части системы уравнений (3.14), которые содержат одинаковую частоту, т. е. только члены одного столбца, характеризующие одну из форм колебаний.

После исследования одной формы колебаний переходят к рассмотрению других форм. Заключение о суммарном эффекте колебаний системы со всеми формами (которые могут иметь существенное значение) делается на основании упомянутых частных исследований каждой формы.

Практический интерес представляют только низшие формы колебаний: одноузловая, двухузловая и, реже, трехузловая. Четырех- и пятиузловые формы колебаний представляется необходимым исследовать только в исключительных случаях, когда система имеет очень большое число масс (более 15—20).

Покажем теперь связь между амплитудами свободных колебаний какой-либо формы. Так как последующие рассуждения применимы к любому главному колебанию, то рассмотрим один из столбцов системы уравнений (3.14) и запишем его без индексов, указывающих на номер формы колебаний. Рядом поместим зависимости вида (3.05) для перемещений тех же масс

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\omega t + \xi); & \varphi_2 &= \varphi_1 + e_{1,2} \theta_1 \varphi_1''; \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\omega t + \xi); & \varphi_3 &= \varphi_2 + e_{2,3} \sum_{y=1}^2 \theta_y \varphi_y''; \\ \varphi_3 &= A_3 \sin(\omega t + \xi); & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \varphi_p &= A_p \sin(\omega t + \xi); & \varphi_p &= \varphi_{p-1} + e_{p-1,p} \sum_{y=1}^{p-1} \theta_y \varphi_y''. \end{aligned}$$

Теперь подставим значения  $\varphi$  из левого столбца в первую зависимость правого столбца

$$A_2 \sin(\omega t + \xi) = A_1 \sin(\omega t + \xi) + e_{1,2} \theta_1 [A_1 \sin(\omega t + \xi)]'';$$

$$A_2 \sin(\omega t + \xi) = A_1 \sin(\omega t + \xi) + e_{1,2} \theta_1 \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \xi).$$

Поделив обе части полученного равенства на тригонометрический член, получим выражение для амплитуды колебаний второй массы. Под ним запишем аналогичные выражения, найденные путем таких же преобразований для амплитуд всех остальных масс системы

[illegible]



$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1; \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \alpha_3 = \frac{A_3}{A_1}; \quad \dots \quad \alpha_p = \frac{A_p}{A_1}. \quad (3.16)$$
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1; \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - e_{1, 2}\omega^{\theta_1}\alpha_1; \\ \alpha_3 &= \alpha_2 - e_{2, 3}\omega^2\sum_{y=1}^2\theta_y\alpha_y; \\ &\dots\dots\dots(3.17) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_p &= \alpha_{p-1} - e_{p-1, p}\omega^2\sum_{v=1}^{p-1}\theta_v\alpha_v. \end{aligned}$$

Абсолютные значения амплитуд зависят от начальных условий, но ими не задавались. Определенные значения амплитуд имеются также при вынужденных колебаниях, но для этого нужно ввести в расчет возмущающие моменты и демпфирующие сопротивления — это является особой задачей.

После выполнения расчета свободных колебаний появляется возможность:

- Имея в виду, что форма резонансных колебаний совпадает с формой свободных колебаний системы, получаем возможность сделать

Поясним теперь, как можно обнаружить наибольшие скручивающие моменты. Составим выражение для тангенса угла наклона отрезка кривой формы колебаний к оси абсцисс

$$\operatorname{tg} \beta_{y, y+1} = \frac{a_{y+1} - a_y}{e_{y, y+1}}.$$

$$\operatorname{tg} \beta_{y, y+1} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{A_{y+1} - A_y}{e_{y, y+1}} = \frac{1}{A_1} (U_{y, y+1})_{\max}. \quad (3.18)$$

### § 13. Переход к безразмерной системе

При использовании абсолютной системы, когда приходится оперировать с именованными величинами, расчеты усложняются тем обстоятельством, что входящие в них параметры оказываются значительно отличающимися друг от друга по величине. Например, податливости участков валопровода выражаются числами порядка  $10^{-8} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$ , а часто встречающиеся величины  $\theta \omega^2$  выражаются числами порядка  $10^8 \text{ кг см}$ . При введении безразмерных величин все числа оказываются одинакового порядка.

Безразмерная система, предложенная В. П. Терских, отличается цельностью, обеспечивающей полную идентичность всех аналитических зависимостей одинакового назначения. Иными словами, любая формула, записанная в абсолютных величинах, может быть переписана в безразмерных величинах путем простой замены символов, без введения каких-либо дополнительных коэффициентов.



Безразмерные параметры получают из абсолютных посредством трех заранее выбранных величин, называемых постоянными системы. В качестве постоянных выбираются:

$\theta_0$  — приведенный момент инерции масс кривошипно-шатунного механизма  $\theta_0 = \theta_{\text{кшм}}$  (см. § 10);

$e_0$  — податливость одного колена вала (см. § 11);

$A_R$  — амплитуда резонансных колебаний одной из масс системы.

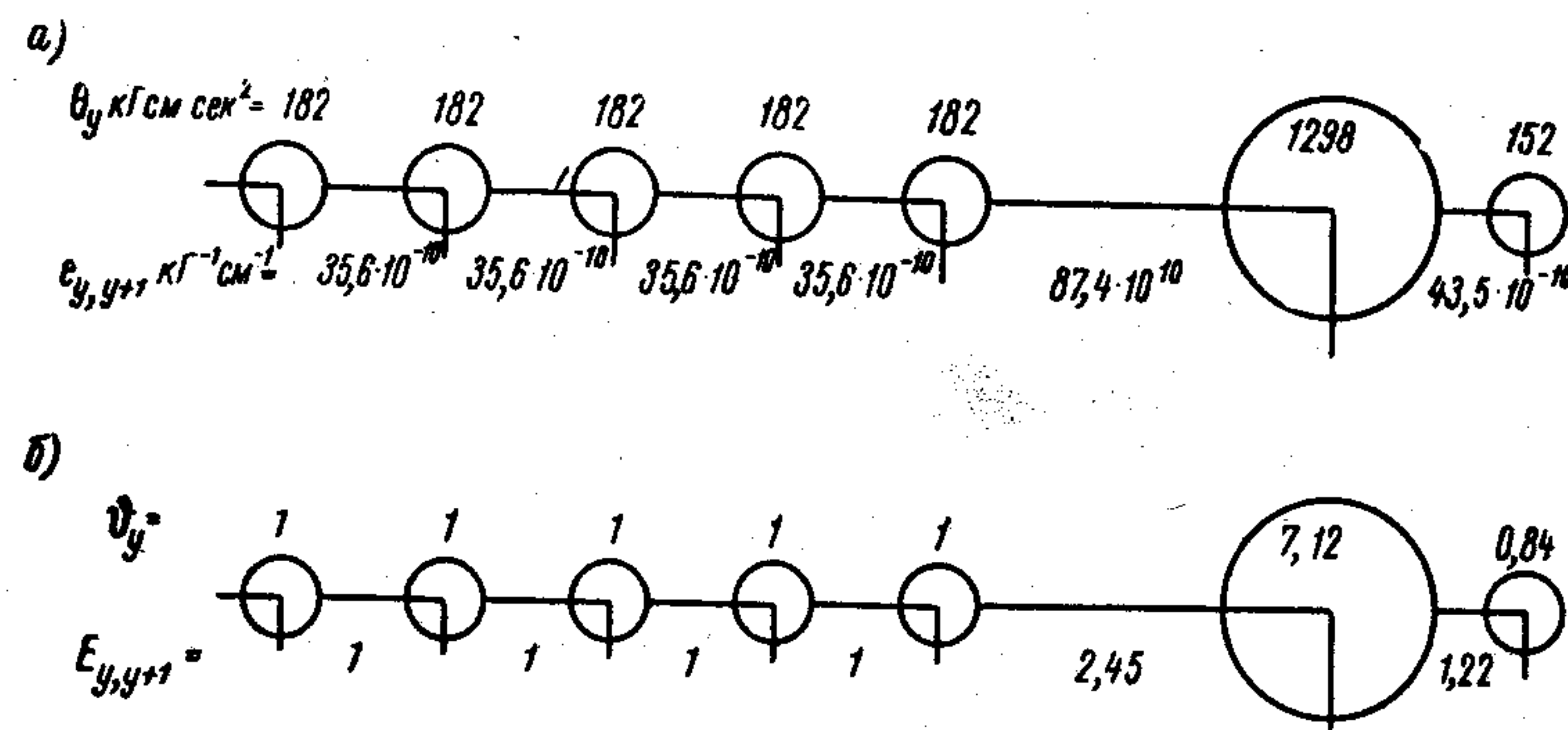


Рис. 17. Крутильная схема системы: а — действительная; б — безразмерная.

1. Безразмерная масса, точнее — безразмерный момент инерции массы с номером  $y$  — обозначается  $\vartheta_y$

$$\vartheta_y = \frac{\theta_y}{\theta_0}. \quad (3.19)$$

2. Безразмерная податливость соединения между массами с номерами  $y$  и  $y+1$  обозначается символом  $E_{y,y+1}$

$$E_{y,y+1} = \frac{e_{y,y+1}}{e_0}. \quad (3.20)$$

3. Безразмерная амплитуда — понятие, требующее особых пояснений.

Как описывалось выше, для получения безразмерных величин, характеризующих массы и податливости, выбираются вполне определенные постоянные той же физической природы. Единственным условием, определяющим целесообразность выбора этих постоянных, является требование, чтобы они были именно той величиной, которая чаще других встречается в данной системе. Только в этом случае большая часть масс и податливостей выражается простейшими числами — единицами. Поэтому величины безразмерных масс и податливостей остаются неизменными на протяжении всего расчета.

Амплитуды перемещений масс данной системы всегда различны по величине, поэтому указанный принцип выбора постоянной осуществлен не может быть. Целесообразность выбора постоянной (некоторой амплитуды) для получения безразмерных амплитуд зависит от особенностей системы и от способа выполнения расчета на отдельных его этапах. При этом на одном этапе расчета в качестве постоянной выбирается амплитуда колебаний первой массы, а на другом этапе — амплитуда той или иной промежуточной массы. Таким образом численное значение безразмерных амплитуд зависит не только от формы колебаний, но и от того, амплитуду какой массы мы выберем в качестве постоянной системы.

С другой стороны следует иметь в виду, что свободные колебания системы без демпфирующих сопротивлений представляют собой абстракцию и не имеют места в реальных системах. Абсолютная величина амплитуд свободных колебаний зависит от возбуждающего их импульса и никакой роли в расчетах не играет. Амплитуда же резонансных колебаний наблюдается в действительности; при установившемся движении системы она имеет вполне определенную величину (нахождение которой часто служит целью расчета). Формы резонансных колебаний практически совпадают с формами главных свободных колебаний. Поэтому в качестве постоянных целесообразно принимать амплитуды некоторых масс при резонансных колебаниях, несмотря на то, что их величина определяется значительно позже, только в конце расчета.

Изложенное позволяет дать определение: *безразмерными амплитудами* называются числа, пропорциональные действительным амплитудам перемещений масс в рассматриваемом главном колебании системы. Из сказанного также следует, что безразмерные амплитуды в одинаковой степени характеризуют как резонансные, так и свободные колебания системы.

Действительная амплитуда резонансных колебаний  $k$ -й массы обозначается  $A_{kR}$ , а безразмерная —  $\alpha_k$ .

На основании приведенного определения, для некоторой формы колебаний запишем

$$\frac{A_{1R}}{\alpha_1} = \frac{A_{2R}}{\alpha_2} = \dots = \frac{A_{kR}}{\alpha_k} = \dots = \frac{A_{tR}}{\alpha_t} = \dots = \frac{A_{pR}}{\alpha_p}. \quad (3.21)$$

Численные значения безразмерных амплитуд при этом могут быть различными: если их одновременно удвоить или утроить, то равенства сохраняются. Любая действительная амплитуда может быть найдена на основании какого-либо из этих равенств, например,

$$\frac{A_{yR}}{\alpha_y} = \frac{A_{tR}}{\alpha_t}; \quad A_{yR} = \alpha_y \left( \frac{A_{tR}}{\alpha_t} \right), \quad (3.22)$$

что справедливо, независимо от того, какая из амплитуд принята за постоянную.



Множитель, заключенный в скобки, как и любое из отношений (3.21), представляет собой масштабный фактор, численная величина которого может быть найдена только из последующего расчета резонансных колебаний.

Если двигатель находится в начале системы, то за постоянную обычно принимается амплитуда первой массы  $A_{1R}$  (см. 3.16), при этом

$$\alpha_1 = \frac{A_{1R}}{A_{1R}} = 1; \quad A_{yR} = \alpha_y A_{1R}. \quad (3.23)$$

Сопоставляя это выражение с зависимостью (3.22), из которой оно получено, замечаем, что в этом случае

$$\left( \frac{A_{tR}}{\alpha_t} \right)_{\alpha_t=1} = A_{1R}. \quad (3.24)$$

Если за постоянную принимается амплитуда некоторой  $k$ -й массы, то

$$\left( \frac{A_{tR}}{\alpha_t} \right)_{\alpha_k=1} = A_{kR}; \quad A_{yR} = \alpha_y A_{kR}. \quad (3.25)$$

Масштабные факторы в выражениях (3.24) и (3.25) приведены с указаниями амплитуды, принятой за единицу при их вычислении. Подобные пояснения приводятся только в случаях, когда их отсутствие может привести к неправильному пониманию формул.

Таким образом, масштабный фактор в общем случае, независимо от того, амплитуда какой массы выбрана в качестве постоянной системы, может записываться в одинаковом символическом виде.

Соотношения между безразмерными и аналогичными действительными параметрами выявляются с помощью одного и того же приема:

- выбирается символ для обозначения безразмерной величины;
- записывается какое-либо простейшее соотношение между параметрами системы в абсолютной и безразмерной формах;
- выражая соотношение, свойственное действительным параметрам, через постоянные системы, находят выражение для новой безразмерной величины.

4. *Безразмерная частота  $\sqrt{\Delta}$* . Во все дифференциальные уравнения входит квадрат безразмерной частоты, который при выбранном символе будет выражаться в простейшей форме ( $\Delta$ ).

Запишем известное выражение (1.13) в действительной и безразмерной формах (индексы при символах опускаем)

$$\omega^2 = \frac{1}{\theta_e} \quad \text{и} \quad (\sqrt{\Delta})^2 = \Delta = \frac{1}{\vartheta E}.$$

Подставляя в первое выражение (3.19) и (3.20) и учитывая вновь записанное, находим

$$\omega^2 = \frac{1}{\theta_e} = \frac{1}{\vartheta \theta_0 E e_0} = \frac{\Delta}{\theta_0 e_0}; \quad \Delta = \theta_0 e_0 \omega^2; \quad \sqrt{\Delta} = \omega \sqrt{\theta_0 e_0}. \quad (3.26)$$

Выразим число колебаний в минуту через безразмерную частоту. Из соотношений (1.04) и (3.26) находим

$$N = 9,55 \omega = 9,55 \sqrt{\frac{1}{\theta_0 e_0}} \cdot \sqrt{\Delta} = a \sqrt{\Delta},$$

где величина

$$a = 9,56 \sqrt{\frac{1}{\theta_0 e_0}} \text{ кол/мин} \quad (3.27)$$

называется *постоянной цилиндра*, так как ее численное значение находится в зависимости от постоянных системы  $\theta_0$  и  $e_0$ , в качестве которых обычно выбираются приведенный момент инерции движущихся масс одного цилиндра и податливость одного колена вала.

Полученное соотношение используется в двух видах

$$N = a \sqrt{\Delta} \quad \text{и} \quad \Delta = \left( \frac{N}{a} \right)^2. \quad (3.28)$$

5. *Безразмерное время  $\tau$* . Время  $t$  в аргументы гармоник всегда входит в произведении  $\omega t$ . Чтобы численное значение этой величины при переходе к безразмерной системе не изменилось, полагаем

$$\omega t = \tau \sqrt{\Delta},$$

откуда, на основании (3.26)

$$\tau = \frac{\omega t}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\omega t}{\omega \sqrt{\theta_0 e_0}} = \frac{t}{\sqrt{\theta_0 e_0}}; \quad t = \tau \sqrt{\theta_0 e_0}. \quad (3.29)$$

6. *Безразмерный момент внешних сил*. Амплитуда действительного момента внешних сил, приложенного к  $y$ -й массе, обозначается символом  $M_y$ . Для соответствующих безразмерных выражений этого момента используется тот же символ, представленный прямым шифром  $M$ . Принимая за единицу амплитуды момента такой момент  $M_0$ , который скручивает вал с податливостью  $e_0$  на угол равный единице (один радиан), на основании (1.07) запишем

$$M_0 e_0 = \varphi = 1, \quad \text{откуда} \quad M_0 = \frac{1}{e_0}.$$

Поделив действительный момент на  $M_0$ , находим

$$M_y = \frac{M_y}{M_0} = e_0 M_y. \quad (3.30)$$



7. Безразмерный и действительный эластические моменты и их амплитуды.

Как было показано выше (§ 11), текущее значение действительного эластического момента находится по формуле (2.12)

$$U_{y, y+1} = \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{e_{y, y+1}}, \quad \text{где } \varphi_y = A_y \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (3.31)$$

После замены  $\varphi_y$  и  $\varphi_{y+1}$  их развернутыми выражениями, находим

$$U_{y, y+1} = \frac{A_{y+1} - A_y}{e_{y, y+1}} \sin(\omega t + \varepsilon) = F_{y, y+1} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (3.31, a)$$

где  $F_{y, y+1}$  — действительная амплитуда эластического момента.

Выбрав для обозначения безразмерной амплитуды этого момента символ  $\delta_{y, y+1}$ , на основании принятой подстановки, запишем

$$F_{y, y+1} = \frac{A_{y+1} - A_y}{e_{y, y+1}} \quad \text{и} \quad \delta_{y, y+1} = \frac{a_{y+1} - a_y}{E_{y, y+1}}. \quad (3.32)$$

Числитель последнего выражения представляет собой разность безразмерных амплитуд, которые могут быть найдены из формы свободных колебаний данной частоты. Поэтому  $\delta_{y, y+1}$  представляет собой безразмерную амплитуду эластического момента, подсчитанную при частоте свободных колебаний данной формы. Ее численное значение при определенных заданных условиях зависит от того, какая из амплитуд принята в качестве постоянной системы.

Учитывая соображения, изложенные в п. 3, найдем соотношение между  $F_{y, y+1}$  и  $\delta_{y, y+1}$  при резонансных колебаниях. Для этого в первое из выражений (3.32) подставим значения  $A_{yR}$  из (3.22)

$$F_{y, y+1} = \frac{A_{y+1R} - A_{yR}}{e_{y, y+1}} = \frac{a_{y+1} - a_y}{e_0 E_{y, y+1}} \left( \frac{A_{tR}}{a_t} \right) = \frac{\delta_{y, y+1}}{e_0} \left( \frac{A_{tR}}{a_t} \right).$$

Такое выражение позволяет находить амплитуду эластического момента при амплитуде колебаний любой массы принятой за единицу, т. е.

$$F_{y, y+1} = \frac{\delta_{y, y+1}}{e_0} \left( \frac{A_{tR}}{a_t} \right). \quad (3.33)$$

Пользуясь соотношением (3.30), полученным для внешних моментов  $M$ , находим зависимость безразмерной амплитуды эластического момента при резонансных колебаниях  $F_{y, y+1}$  от безразмерной амплитуды эластического момента, подсчитанного при частоте свободных колебаний

$$F_{y, y+1} = e_0 F_{y, y+1} = \delta_{y, y+1} \left( \frac{A_{tR}}{a_t} \right). \quad (3.34)$$

Текущее значение безразмерного эластического момента  $U_{y, y+1} = e_0 U_{y, y+1}$  при резонансных колебаниях на основании (3.31, a), (3.34) будет

$$U_{y, y+1} = F_{y, y+1} \sin(\tau \sqrt{\Delta + \varepsilon}). \quad (3.35)$$

Главное колебание в безразмерной форме записывается по аналогии с (3.31), (безразмерное перемещение обозначается, как и действительное  $\varphi_y$ )

$$\varphi_y = \alpha_y \sin(\tau \sqrt{\Delta + \varepsilon_e}), \quad (3.36)$$

где индекс  $e$  указывает на форму колебания (число узлов).

Вторая производная перемещения, как пояснено в (1.17), может быть представлена выражением

$$\ddot{\varphi}_y = -\Delta \varphi_y. \quad (3.37)$$

**Инерционный момент.** Действительным инерционным моментом называют, присутствующий в дифференциальных уравнениях движения, член вида  $R_y = -\theta_y \ddot{\varphi}_y$ , представляющий собой произведение из момента инерции массы на ее угловое ускорение, взятое с обратным знаком. Полагая  $\ddot{\varphi}_y = -\omega^2 \varphi_y$  (1.17), этот момент можно представить в виде

$$R_y = -\theta_y \ddot{\varphi}_y = -\theta_y (-\omega^2 \varphi_y) = \theta_y \omega^2 \varphi_y.$$

Безразмерная величина инерционного момента должна выражаться аналогичной зависимостью. Используя (3.37), получим

$$R_y = -\theta_y \ddot{\varphi}_y = -\theta_y (-\Delta \varphi_y^*) = \theta_y \Delta \varphi_y^*, \quad (3.38)$$

где  $\varphi_y^* = \varphi_y / \varphi_0$  — безразмерное перемещение массы  $\varphi_y$ , найдено как отношение действительного перемещения этой массы  $\varphi_y$  к перемещению  $\varphi_0$  некоторой выбранной массы.

Заменяя безразмерные величины действительными, находим

$$R_y = \theta_y \Delta \varphi_y^* = \frac{\theta_y}{\theta_0} \theta_0 e_0 \omega^2 \frac{\varphi_y}{\varphi_0} = \theta_y \omega^2 \varphi_y \frac{e_0}{\varphi_0} = R_y \frac{e_0}{\varphi_0}. \quad (3.38, a)$$

**Стойкостью** массы называют произведение из момента инерции массы на квадрат частоты ее колебаний со знаком минус: в действительных величинах

$$H_y = -\theta_y \omega^2,$$

в безразмерных величинах

$$H_y = -\vartheta_y \Delta. \quad (3.39)$$

Стойкость массы можно рассматривать как коэффициент в выражении инерционного момента. Действительно, из (3.38) и (3.39) находим

$$R_y = -\theta_y \ddot{\varphi}_y = -\theta_y (-\Delta \varphi_y) = -(-\vartheta_y \Delta) \varphi_y = -H_y \varphi_y. \quad (3.40)$$



Для крайнего положения массы, когда  $(\varphi_y)_{\max} = \alpha_y$ , инерционный момент приобретает наибольшее значение

$$R_y = -H_y \alpha_y. \quad (3.40, a)$$

#### § 14. Составление частотного уравнения свободных колебаний

Для дискретных систем со сколь угодно большим, но конечным числом масс  $p$  уравнение, из которого определяется частота свободных колебаний системы, может быть составлено различными способами.

Здесь приводится вывод с помощью предварительно полученных уравнения моментов и уравнения деформаций. Все дальнейшие выводы даны в безразмерных величинах, но термин «безразмерный» для краткости часто опускается.

1. Уравнение моментов базируется на рассмотрении условия равновесия некоторой промежуточной массы  $\delta_y$  колеблющейся многомассовой системы (рис. 16, а).

Составим сумму амплитуд инерционного и эластических моментов, действующих с обеих сторон этой массы (рис. 16, в).

$$-\delta_{y-1, y} + R_y + \delta_{y, y+1} = 0.$$

Заимствуя значение  $R_y$  из (3.40, а), найдем

$$\begin{aligned} -\delta_{y-1, y} - H_y \alpha_y + \delta_{y, y+1} &= 0; \\ \delta_{y, y+1} &= \delta_{y-1, y} + H_y \alpha_y. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Полученное выражение называется *уравнением моментов*; оно показывает, что амплитуда эластического момента в некотором соединении системы равна таковой на предыдущем участке, сложенной с произведением из стойкости массы, расположенной между этими соединениями, на амплитуду ее колебаний.

2. Уравнение деформаций представляет собой зависимость между амплитудами двух смежных масс. Оно находится из выражения для безразмерной амплитуды эластического момента (3.32).

$$\begin{aligned} \delta_{y, y+1} &= \frac{\alpha_{y+1} - \alpha_y}{E_{y, y+1}}; \\ \alpha_{y+1} &= \alpha_y + \delta_{y, y+1} E_{y, y+1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Уравнение деформаций показывает, что амплитуда перемещения некоторой массы равна амплитуде предыдущей массы, сложенной с произведением эластического момента в соединении между ними на податливость этого соединения.

Перейдем к составлению частотного уравнения свободных колебаний.

Система уравнений (3.15) для  $p$ -массовой системы путем исключения переменных может быть преобразована в одно уравнение степени  $2p - 2$ . Однако алгебраическое решение уравнения выше четвертой степени невозможно. Поэтому корни данного уравнения находят методом подбора, что выполняется различными способами на базе исходной системы уравнений или после некоторых ее преобразований.

Составим систему уравнений для  $p$ -массовой крутильной схемы на основании полученных выше уравнения деформации (3.42) и уравнения моментов (3.41).

Записав эти уравнения и положив  $\alpha_1 = 1$  будем подставлять в них  $y = 0, y = 1, y = 2 \dots y = p$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{y+1} &= \alpha_y + \delta_{y, y+1} E_{y, y+1}; & \delta_{y, y+1} &= \delta_{y-1, y} + H_y \alpha_y; \\ \alpha_1 &= 1; & \delta_{1, 2} &= H_1 \alpha_1; \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \delta_{1, 2} E_{1, 2}; & \delta_{2, 3} &= \delta_{1, 2} + H_2 \alpha_2; \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \delta_{2, 3} E_{2, 3}; & \delta_{3, 4} &= \delta_{2, 3} + H_3 \alpha_3; \\ &\vdots & \vdots & \\ &\vdots & \vdots & \\ \alpha_p &= \alpha_{p-1} + \delta_{p-1, p} E_{p-1, p} & \delta_{p, p+1} &= \delta_{p-1, p} + H_p \alpha_p = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Последнее уравнение здесь записывается формально, так как участка  $p, p + 1$  в системе нет и соответствующий эластический момент  $\delta_{p, p+1}$  должен быть равен нулю, как не существующий.

Очевидно, что мы располагаем  $2p$  уравнениями и таким же числом неизвестных.

#### § 15. Частотное уравнение в форме Терсних

Введем понятия стойкостей и податливостей частей системы.

*Стойкостью части системы* называется отношение эластического момента в соединении к амплитуде колебаний массы, ограничивающей это соединение (ниже это понятие будет уточнено). Стойкость части системы обозначается символом, присвоенным стойкости этой массы с верхним индексом в круглых скобках. Найдем стойкости частей системы, для которой записаны уравнения (3.43),

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= \frac{\delta_{1, 2}}{\alpha_1} = \frac{H_1 \alpha_1}{\alpha_1} = H_1; \\ H_2^{(1)} &= \frac{\delta_{2, 3}}{\alpha_2} = \frac{\delta_{1, 2} + H_2 \alpha_2}{\alpha_2} = H_2 + \frac{\delta_{1, 2}}{\alpha_2} = H_2 + \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\delta_{1, 2}}}; \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$



$$*) H_{y-1}^{(1)} = \frac{\delta_{y-1, y}}{\alpha_{y-1}} = \frac{\delta_{y-2, y-1} + H_{y-1} \alpha_{y-1}}{\alpha_{y-1}} =$$

$$= H_{y-1} + \frac{1}{\frac{\alpha_{y-1}}{\delta_{y-2, y-1}}}; \quad (3.44)$$

$$**) H_y^{(1)} = \frac{\delta_{y, y+1}}{\alpha_y} = \frac{\delta_{y-1, y} + H_y \alpha_y}{\alpha_y} = H_y + \frac{1}{\frac{\alpha_y}{\delta_{y-1, y}}};$$

$$H_p^{(1)} = \frac{\delta_{p, p+1}}{\alpha_p} = \frac{\delta_{p-1, p} + H_p \alpha_p}{\alpha_p} = 0.$$

Здесь эластический момент  $\delta_{p, p+1}$ , как и в (3.43), равен нулю. Податливостью части системы называется отношение амплитуды любой массы системы к эластическому моменту на смежном с ней участке (точное определение будет дано ниже). Податливость части системы обозначается символом, приданным податливости того соединения, в котором имеет место упомянутый момент. Запишем ее выражение в общем виде

$$E_{y-1, y}^{(1)} = \frac{\alpha_y}{\delta_{y-1, y}} = \frac{\alpha_{y-1} + \delta_{y-1, y} E_{y-1, y}}{\delta_{y-1, y}} = E_{y-1, y} + \frac{1}{\frac{\delta_{y-1, y}}{\alpha_{y-1}}}.$$

Знаменатель последнего равенства можно заменить на основании уравнения, отмеченного \* в системе (3.44), тогда

$$E_{y-1, y}^{(1)} = \frac{\alpha_y}{\delta_{y-1, y}} = E_{y-1, y} + \frac{1}{H_{y-1}^{(1)}}. \quad (3.45)$$

Полученная зависимость позволяет представить стойкость части системы также в общем виде. На основании равенства отмеченного \*\* имеем

$$H_y^{(1)} = \frac{\delta_{y, y+1}}{\alpha_y} = H_y + \frac{1}{E_{y-1, y}^{(1)}}. \quad (3.46)$$

Частотное уравнение первого вида находим из последнего равенства (3.44);  $H_p^{(1)} = 0$ . Представив  $H_p^{(1)}$  в виде (3.46), заменим  $E_{p-1, p}^{(1)}$  на основании (3.45). Многократно повторяя замены стойко-

стей и податливостей частей системы, на основании двух последних формул найдем

$$H_p^{(1)} = H_p + \frac{1}{E_{p-1, p} + \frac{1}{H_{p-1} + \frac{1}{E_{p-2, p-1} + \dots + \frac{1}{H_1}}}} = 0. \quad (3.47)$$

После замены стойкостей масс их развернутым выражением (3.39) получим частотное уравнение первого вида в ином представлении

$$-\vartheta_p \Delta + \frac{1}{E_{p-1, p}} + \frac{1}{-\vartheta_{p-1} \Delta + \frac{1}{E_{p-2, p-1}} + \dots + \frac{1}{-\vartheta_1 \Delta}} = 0, \quad (3.48)$$

при этом разделительные линии дробей для удобства записи укорочены. Выражения (3.47) и (3.48) представляют собой частотные уравнения свободных колебаний  $p$ -массовой системы. Левая часть каждого уравнения обращается в нуль только в тех случаях, когда входящий в него квадрат безразмерной частоты  $\Delta$  соответствует какому-либо корню этого уравнения. Напомним, что это уравнение имеет  $p-1$  корней (§ 12), соответствующих частотам всех собственных этой системе форм свободных колебаний.

## § 16. Стойкости и податливости частей системы

В предыдущем параграфе были введены понятия и найдены выражения стойкости и податливости частей системы (3.46) и (3.45). Для некоторого сечения  $y = k$  и участка  $k-1, k$  соответственно имеем

$$H_k^{(1)} = \frac{\delta_{k, k+1}}{\alpha_k} = H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}}; \quad E_{k-1, k}^{(1)} = \frac{\alpha_k}{\delta_{k-1, k}} =$$

$$= E_{k-1, k} + \frac{1}{H_{k-1}^{(1)}}. \quad (3.49)$$

Последовательные подстановки на основании этих зависимостей, выполненные при составлении частотного уравнения (3.47),



позволяют привести эти выражения к развернутому виду: стойкость части системы от массы  $k$  до массы 1

$$H_k^{(1)} = H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}} + \frac{1}{H_{k-1}} + \dots + \frac{1}{H_1} \quad (3.50)$$

податливость части системы от соединения  $k, k+1$  до массы 1

$$E_{k-1, k}^{(1)} = E_{k-1, k} + \frac{1}{H_{k-1}} + \frac{1}{E_{k-2, k-1}} + \dots + \frac{1}{H_1} \quad (3.51)$$

Оба выражения имеют вид цепных дробей.

Первыми членами в них являются: в стойкости части системы — стойкость массы, а в податливости части системы — податливость соединения, которыми начинаются эти части.

Последними членами в обоих случаях является стойкость первой массы, номер которой указан в верхнем индексе, заключенном в круглые скобки ( $H_k^{(1)}$  и  $E_{k-1, k}^{(1)}$ ).

Последовательность символов, из которых составляется каждая цепная дробь, соответствует расположению элементов (масс и податливостей) в крутильной схеме *левее* того элемента, с которого начинается данная часть системы.

Каждая из этих функций содержит в себе стойкости отдельных масс ( $H_y = -\vartheta_y \Delta$ ), подсчитанные при некоторой частоте колебаний всей системы и податливости соединений, а потому выражает определенную динамическую характеристику системы в целом.

**Стойкость и податливость частей системы.** Каждое из этих понятий представляет собой целые рациональные функции относительно  $\Delta$ . В этом можно убедиться, выражая их через первичные параметры системы и  $\Delta$ . На основании (3.49) имеем

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(1)} &= \frac{\delta_{1,2}}{\alpha_1} = H_1 = \frac{-\vartheta_1 \Delta}{1}; & \alpha_1 &= 1; & \delta_{1,2} &= -\vartheta_1 \Delta; \\ E_{1,2}^{(1)} &= \frac{\alpha_2}{\delta_{1,2}} = E_{1,2} + \frac{1}{H_1^{(1)}} = E_{1,2} + \frac{1}{-\vartheta_1 \Delta} = \\ &= \frac{1 + E_{1,2} \delta_{1,2}}{\delta_{1,2}}; \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha_2 = 1 + E_{1,2} \delta_{1,2} = 1 - \vartheta_1 E_{1,2} \Delta; \quad (3.52)$$

$$H_2^{(1)} = \frac{\delta_{2,3}}{\alpha_2} + H_2 + \frac{1}{E_{1,2}^{(1)}} = H_2 + \frac{\delta_{1,2}}{\alpha_2} = \frac{\delta_{1,2} + H_2 \alpha_2}{\alpha_2};$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{1,2} + H_2 \alpha_2 = -(\vartheta_1 + \vartheta_2) \Delta + \vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2} \Delta^2;$$

$$E_{2,3}^{(1)} = \frac{\alpha_3}{\delta_{2,3}} = E_{2,3} + \frac{1}{H_2^{(1)}};$$

$$\alpha_3 = 1 - (\vartheta_1 E_{1,2} + \vartheta_1 E_{2,3} + \vartheta_2 E_{2,3}) \Delta + \vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2} E_{2,3} \Delta^2.$$

На основании обнаруженной закономерности выражений для  $\delta_{k,k+1}$  и  $\alpha_k$ , каждое из них может быть записано в виде

$$\delta_{k,k+1} = \delta_{k-1,k} - \vartheta_k \alpha_k \Delta = -a_1 \Delta + b_1 \Delta^2 - c_1 \Delta^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^k p_1 \Delta^k;$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + E_{k-1,k} \delta_{k-1,k} = 1 - a_2 \Delta + b_2 \Delta^2 - c_2 \Delta^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1} p_2 \Delta^{k-1}. \quad (3.53)$$

Отсюда убеждаемся, что  $\delta_{k,k+1}$  и  $\alpha_k$  в последних выражениях представляют собой целые рациональные функции от  $\Delta$  — полиномы, которые непрерывны при всех вещественных значениях  $\Delta$  в пределах  $\pm \infty$ . Отсюда следует, что таким же свойством должны обладать выраженные через них  $H_k^{(1)}$  и  $E_{k-1,k}^{(1)}$ .

Функции  $H_k^{(1)}$  и  $E_{k-1,k}^{(1)}$  в интервале  $-\infty < \Delta < +\infty$  не имеют неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ . В этом легко убедиться, так как  $\delta_{k,k+1}$  и  $\alpha_k$  ни при каком значении  $\Delta$  одновременно не могут обратиться в нули. Если положить  $\delta_{k,k+1} = \alpha_k = 0$ , то все зависимости вида (3.53) также обращаются в нули, но этого не может быть, так как  $\alpha_1 = 1 \neq 0$ .

Функция  $\delta_{k,k+1}$  имеет  $k$  корней. Такое же число тех же корней имеет функция  $H_k^{(1)}$ . Функции  $\alpha_k$  и  $E_{k-1,k}^{(1)}$  имеют по  $k-1$  одинаковых корней. В этом можно убедиться, так как эти функции попарно представлены в первых равенствах выражений (3.52) (одна в левой части, а другая — в числителе правой части).

Производные стойкостей частей систем всегда отрицательны, а производные податливостей частей систем всегда положительны.



Это можно показать последовательным дифференцированием их выражений. Производные берем по  $\Delta$  и находим их знаки:

$$\left. \begin{aligned} (H_1^{(1)})' &= (-\vartheta_1 \Delta)' = -\vartheta_1 < 0; \\ (E_{1,2}^{(1)})' &= \left( E_{1,2} + \frac{1}{H_1^{(1)}} \right)' = -\frac{(H_1^{(1)})'}{(H_1^{(1)})^2} = -\frac{-\vartheta_1}{(H_1^{(1)})^2} > 0; \\ (H_2^{(1)})' &= \left( H_2 + \frac{1}{E_{1,2}^{(1)}} \right)' = -\vartheta_2 - \frac{(E_{1,2}^{(1)})'}{(E_{1,2}^{(1)})^2} < 0; \\ (E_{2,3}^{(1)})' &= \left( E_{2,3} + \frac{1}{H_2^{(1)}} \right)' = -\frac{(H_2^{(1)})'}{(H_2^{(1)})^2} > 0 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Подобные вычисления производных могут быть продолжены с тем же результатом, показывающим, что стойкость каждой части системы на графике  $H_k^{(1)} = f(\Delta)$  представляется нисходящей кривой, а податливость каждой части системы на графике  $E_{k,k+1}^{(1)} = f_1(\Delta)$  — возрастающей кривой.

Если в процессе изменения  $\Delta$  функция  $E_{k-1,k}^{(1)} = \pm \delta$ , а  $\delta$  стремится к нулю, то

$$H_k^{(1)} = H_k + \frac{1}{E_{k-1,k}^{(1)}} = H_k + \frac{1}{\pm \delta} \rightarrow \infty,$$

т. е. функция  $H_k^{(1)}$  имеет разрывы непрерывности.

Таким образом, о стойкости части системы  $H_k^{(1)}$  мы располагаем рядом сведений:

- 1)  $H_k^{(1)}$  рациональна на всем диапазоне изменения  $\Delta$ ;
- 2) производная  $H_k^{(1)}$  всегда отрицательна;
- 3) функция  $H_k^{(1)}$  имеет  $k$  корней;
- 4) при определенных значениях  $\Delta$   $H_k^{(1)}$  обращается в  $\pm \infty$ .

Если для некоторой пятимассовой системы подсчитать численные значения функции  $H_5^{(1)}$  ( $k=5$ ) при постепенно возрастающем значении  $\Delta$  (от 0 до  $\infty$ ) и эти значения нанести на график  $H_k^{(1)} = f(\Delta)$ , то все указанные сведения подтверждаются. Такой график представлен на рис. 18, а. Для различных  $k$  характер кривых сохраняется.

Ниже для той же системы изображен график  $E_{4,5}^{(1)} = f_1(\Delta)$ , (рис. 18, б), который может быть также логически обоснован.

В обоих случаях средние кривые имеют характер тангенцид (но, конечно, не подчиняются закону тангенса), а крайние — характер гипербол. Крайние ветви слева характеризуют безузловые колебания (которые для нас интереса не представляют), последующие нумеруются (первая, вторая, ... четвертая).

Теперь рассмотрим стойкости и податливости *правых частей системы*, т. е. от выбранного элемента до последней массы с номером  $p$ . Они обозначаются теми же символами, но верхний индекс в круглых скобках заключает номер  $p$ , т. е.  $H_k^{(p)}$  и  $E_{k,k+1}^{(p)}$ .

Эластические моменты должны здесь учитываться с обратными знаками, так как они оказываются приложенными не справа, а слева от масс (см. рис. 16, в).

Податливость части системы от участка  $k, k+1$  до  $p$ -й массы находится аналогично (3.45), но эластический момент указывается для соединения, расположенного *справа* от массы с номером  $k$

$$\begin{aligned} E_{k,k+1}^{(p)} &= \frac{\alpha_k}{-\delta_{k,k+1}} = \\ &= -\frac{\alpha_k}{\delta_{k,k+1}}. \end{aligned}$$

Амплитуда  $\alpha_k$  должна быть выражена также через амплитуду  $\alpha_{k+1}$ -й массы, расположенной на *правом* конце участка  $k, k+1$ ; из уравнения деформаций (3.42) находим

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \alpha_k + \delta_{k,k+1} E_{k,k+1} \dots \\ \alpha_k &= \alpha_{k+1} - \delta_{k,k+1} E_{k,k+1}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

тогда

$$\begin{aligned} E_{k,k+1}^{(p)} &= -\frac{\alpha_k}{\delta_{k,k+1}} = \frac{-\alpha_{k+1} + \delta_{k,k+1} E_{k,k+1}}{\delta_{k,k+1}} = E_{k,k+1} + \\ &+ \frac{1}{-\frac{\delta_{k,k+1}}{\alpha_{k+1}}} = E_{k,k+1} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Знаменатель последней дроби представлен здесь новым символом, обозначающим стойкость части системы от  $k+1$ -й до  $p$ -й массы. Рассмотрим эту величину, учитывая, что эластический момент также должен быть выражен через смежный с ним, но расположенный *справа* от массы  $k+1$ .

На основании уравнения моментов (3.41) находим

$$\delta_{k,k+1} = \delta_{k-1,k} + H_k \alpha_k \dots \delta_{k+1,k+2} = \delta_{k,k+1} + H_{k+1} \alpha_{k+1}, \quad (3.57)$$

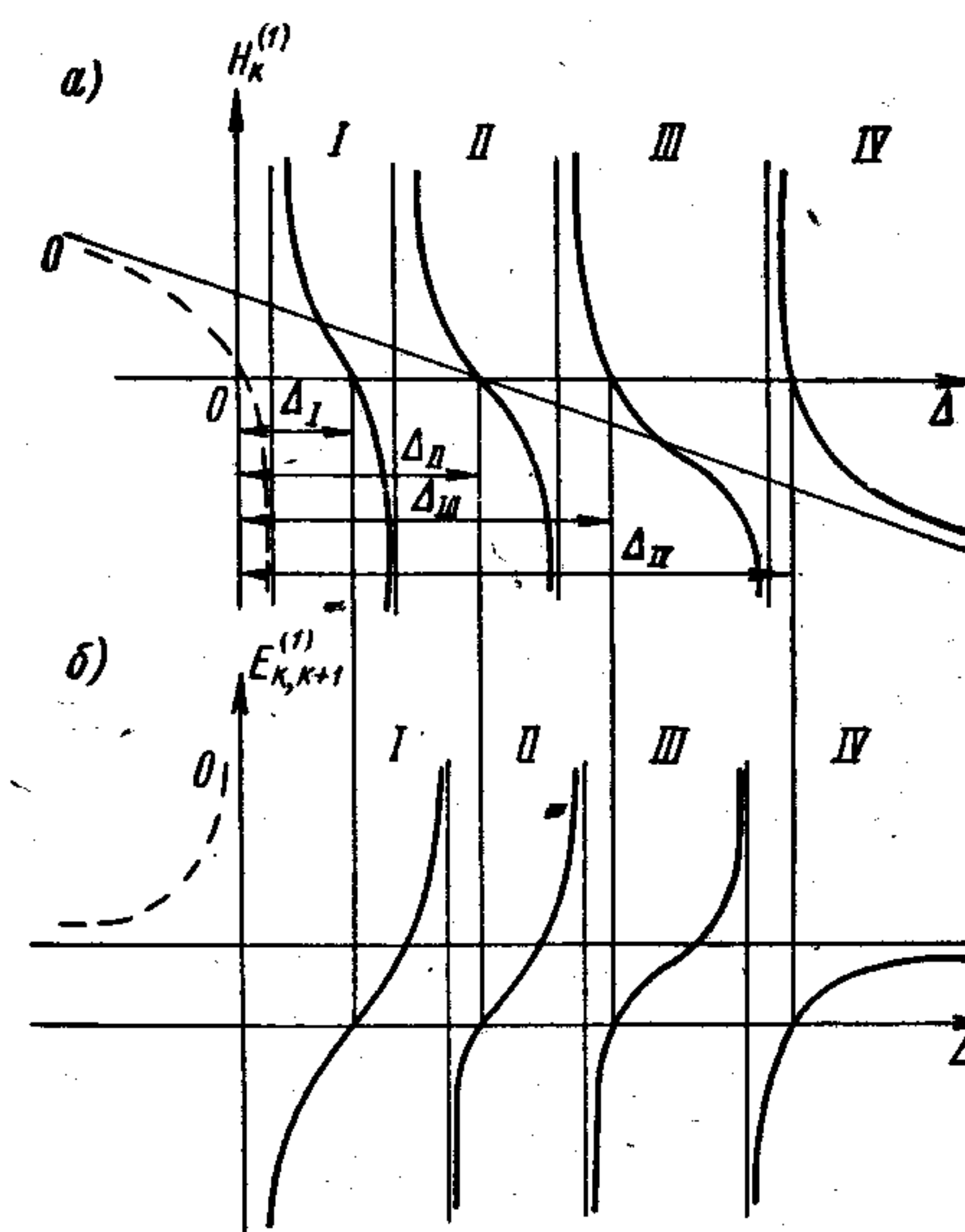


Рис. 18. Кривые стойкости и податливости частей системы.



тогда

$$H_{k+1}^{(p)} = -\frac{\delta_{k, k+1}}{a_{k+1}} = -\frac{\delta_{k+1, k+2} - H_{k+1} a_{k+1}}{a_{k+1}} =$$

$$= H_{k+1} + \frac{1}{\frac{a_{k+1}}{\delta_{k+1, k+2}}} = H_{k+1} + \frac{1}{E_{k+1, k+2}^{(p)}}. \quad (3.58)$$

Выражения для стойкостей и податливостей *правых* частей системы могут быть развернуты аналогично (3.50) и (3.51)

$$H_{k+1}^{(p)} = H_{k+1} + \frac{1}{E_{k+1, k+2}^{(p)}} + \frac{1}{H_{k+2} + \dots + \frac{1}{H_p}}; \quad (3.59)$$

$$E_{k, k+1}^{(p)} = E_{k, k+1} + \frac{1}{H_{k+1} + \frac{1}{E_{k+1, k+2}^{(p)}} + \dots + \frac{1}{H_p}} \quad (3.60)$$

Эти функции обладают свойствами, аналогичными указанным для стойкостей и податливостей левых частей системы.

### § 17. Виды частотного уравнения

В зависимости от условий задачи и некоторых особых требований частотные уравнения используются не только вида названного *первым* (3.47) или (4.38), но еще в трех выражениях.

*Второй вид* частотного уравнения получается из сопоставления выражений для стойкости частей системы (3.46) и (3.56)

$$H_k^{(1)} = \frac{\delta_{k, k+1}}{a_k} = H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}}, \quad \frac{\delta_{k, k+1}}{a_k} = -\frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} =$$

$$E_{k, k+1}^{(p)} = -\frac{a_k}{\delta_{k, k+1}} \quad \left. \vphantom{\frac{\delta_{k, k+1}}{a_k}} \right\} = H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}}.$$

Отсюда получаем

$$H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}} + \frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} = 0. \quad (3.61)$$

В развернутом выражении это уравнение может быть представлено так

$$H_k + \frac{1}{E_{k-1, k} + \frac{1}{H_{k-1} + \dots + \frac{1}{H_1}}} + \frac{1}{E_{k, k+1} + \frac{1}{H_{k+1} + \dots + \frac{1}{H_p}}} = 0. \quad (3.62)$$

*Третий вид* частотного уравнения может быть получен из второго простым преобразованием на базе тождества:

$$\text{если } A + B = 0, \text{ то } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 0$$

Перепишем уравнение (3.61) и воспользуемся этим тождеством

$$H_k^{(1)} + \frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} = 0 \dots \frac{1}{H_k^{(1)}} + E_{k, k+1}^{(p)} = 0.$$

Заменяя  $E_{k, k+1}^{(p)}$  на основании (3.56), получим

$$E_{k, k+1} + \frac{1}{H_k^{(1)}} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}} = 0. \quad (3.63)$$

Представим это уравнение в развернутом варианте

$$E_{k, k+1} + \frac{1}{H_k + \frac{1}{E_{k-1, k} + \dots + \frac{1}{H_1}}} + \frac{1}{H_{k+1} + \frac{1}{E_{k+1, k+2} + \dots + \frac{1}{H_p}}} = 0. \quad (3.64)$$

*Четвертый вид* частотного уравнения можно получить точно так же, как первый (3.47), если с начала вывода, данного в § 14, перенумеровать все массы в обратном порядке, т. е. назвать 1-ю —  $p$ -й, а  $p$ -ю — 1-й. В этом случае найдем

$$H_1^{(p)} = H_1 + \frac{1}{E_{1, 2} + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{E_{2, 3} + \dots + \frac{1}{H_p}}}} = 0. \quad (3.65)$$



Тот же результат можно получить путем последовательных преобразований (3.64) на основании использованного в данном параграфе тождества.

При составлении частотных уравнений первого и четвертого видов последовательность символов считывается с крутильной схемы системы. Для составления (записи) уравнений второго и третьего видов (3.61 — 3.62) или (3.63 — 3.64) удобно иметь перед

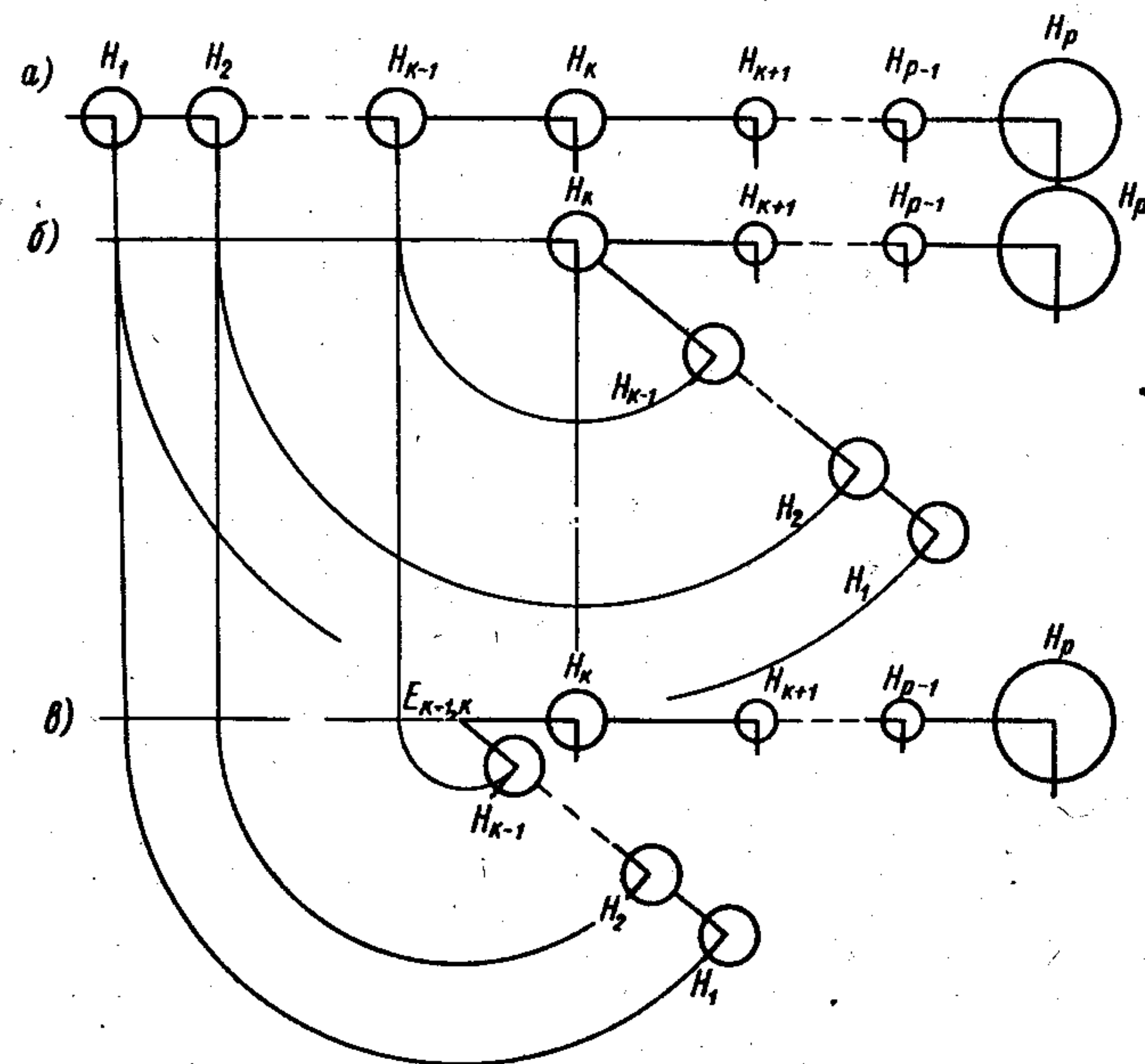


Рис. 19. Графическая интерпретация «надломов».

глазами условную графическую интерпретацию, показанную на рис. 19, а, б.

Рассматриваемая цепная система а) ниже (на позиции б) показана с надломом на массе  $k$ . Пользуясь этим изображением системы, уравнение (3.62) составляют так: записывают стойкость массы  $H_k$ , затем приписывают дробь с последовательностью членов, показанной на нижней ветке, и дробь с последовательностью членов, соответствующей горизонтальной ветке. Использование такой графической интерпретации послужило поводом назвать выражения (3.61 — 3.62) *уравнениями с «надломом» на  $k$ -й массе*.

«Надлом» на податливости, показанный на рис. 19, в служит для составления уравнений вида (3.63 — 3.64). Эти выражения называют частотными уравнениями с «надломом» на податливости (или с «надломом» в соединении)  $k, k + 1$ .

Частотное уравнение с «надломом» на  $k$ -й массе имеет вид

$$H_k^{(1)(p)} = 0; H_k^{(1)(p)} = H_k + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}} + \frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} = 0, \quad (3.66)$$

а частотное уравнение с «надломом» в соединении  $k, k + 1$  —

$$E_{k, k+1}^{(1)(p)} = 0; E_{k, k+1}^{(1)(p)} = E_{k, k+1} + \frac{1}{H_k^{(1)}} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}}. \quad (3.67)$$

Здесь введены новые понятия:

$H_k^{(1)(p)}$  — стойкость всей системы с «надломом» на  $k$ -й массе,

$E_{k, k+1}^{(1)(p)}$  — податливость всей системы с «надломом» в соединении  $k, k + 1$ .

В обоих случаях нижние индексы указывают на место «надлома» (они повторяются в первых членах развернутых выражений), а верхние указывают на номера масс, стойкостями которых заканчиваются цепные дроби.

Подробный анализ этих уравнений приведен в [54, стр. 46].

Здесь отметим лишь одно положение. Уравнение (3.66) можно представить в ином виде, разбив  $H_k$  на две части  $H_k^I$  и  $H_k^{II}$  (т. е.  $H_k = H_k^I + H_k^{II}$ ). Это позволяет рассматривать стойкость системы как сумму стойкостей двух ее частей.

$$H_k^{(1)(p)} = H_k^I + \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}} + H_k^{II} + \frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} = H_k^{(1)(I)} + H_k^{(1)(p)}.$$

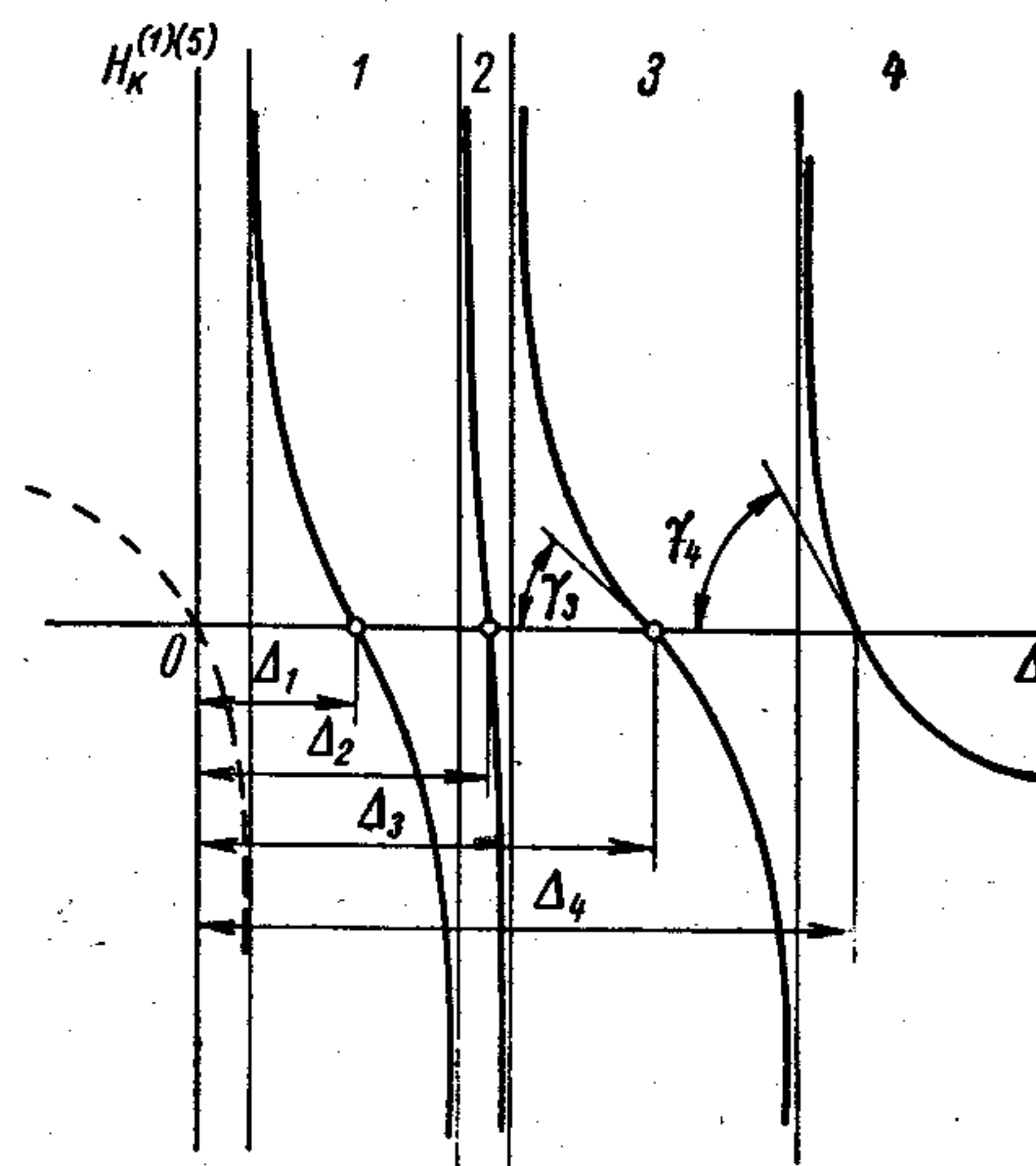


Рис. 20. Функция стойкости системы на  $k$ -й массе.

При таком представлении становится очевидным, что  $H_k^{(1)(p)} = f(\Delta)$  представится кривыми, аналогичными свойственным каждой из слагаемых функций. Число корней будет  $(k-1) + (p-k-1) + 1 = p-1$ , т. е. на единицу меньше числа масс (третий член записанного равенства  $(+1)$  записан по той причине, что в анализируемом выражении вместо одной массы показано две).

График функции  $H_k^{(1)(p)} = f(\Delta)$  представлен на рис. 20. Она обращается в нуль (кривые пересекаются с осью абсцисс) при значениях  $\Delta$ , соответствующих частотам свободных колебаний всех форм (одноузловой, двух-, трех- и четырехузловой).



## § 18. Вычисление безразмерных амплитуд колебаний масс и эластических моментов

Располагая численными значениями стойкостей частей системы, безразмерные амплитуды колебаний масс и эластических моментов в соединениях находят по простейшим формулам.

При расчете свободных колебаний амплитуда колебаний одной из масс задается равной единице.

Если вычисление производится по частотному уравнению первого вида (3.47), то принимаем  $\alpha_1 = 1$ , и на основании формул (3.45) и (3.46) находим

$$H_y^{(1)} = \frac{\delta_{y, y+1}}{\alpha_y} \dots \delta_{y, y+1} = \alpha_y H_y^{(1)}; \quad (3.68)$$

$$E_{y-1, y}^{(1)} = \frac{\alpha_y}{\delta_{y-1, y}} \dots \alpha_y = \delta_{y-1, y} E_{y-1, y}^{(1)}. \quad (3.69)$$

Применение этих формул показано в примере 2.

Если вычисление производится на основании частотного уравнения с надломом на  $k$ -й массе (3.61 — 3.62), то амплитуду той массы, на которой производится надлом, принимаем  $\alpha_k = 1$ . Тогда для левой части системы используются те же формулы, но с перестановкой членов и для убывающих индексов

$$\delta_{y-1, y} = \frac{\alpha_y}{E_{y-1, y}^{(1)}} \text{ и } \alpha_{y-1} = \frac{\delta_{y-1, y}}{H_{y-1}^{(1)}}. \quad (3.70)$$

Для правой части системы, начиная с  $\alpha_k$ , аналогичные формулы получаются из (3.56) и (3.58)

$$H_{y+1}^{(p)} = -\frac{\delta_{y, y+1}}{\alpha_{y+1}} \dots \alpha_{y+1} = \frac{-\delta_{y, y+1}}{H_{y+1}^{(p)}}; \quad (3.71)$$

$$E_{y, y+1}^{(p)} = -\frac{\alpha_y}{\delta_{y, y+1}} \dots \delta_{y, y+1} = \frac{-\alpha_y}{E_{y, y+1}^{(p)}}. \quad (3.72)$$

Применение этих формул показано в примере 3.

## § 19. Определение местонахождения узлов

До вычисления амплитуд и построения формы колебания установить местонахождение узлов (рис. 21, а—г) можно на основании сравнения величин безразмерной податливости данного участка и податливости части системы, найденной для того же соединения.

Запишем уравнение деформаций (3.42) и выражение (3.68) для амплитуды  $y+1$ -й массы и поделим их одно на другое

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{y+1} &= \alpha_y + \delta_{y, y+1} E_{y, y+1} \\ \alpha_{y+1} &= \delta_{y, y+1} E_{y, y+1}^{(1)} \end{aligned} \right\} \frac{\alpha_{y+1}}{\alpha_{y+1}} = \frac{\alpha_y}{\alpha_{y+1}} + \frac{\delta_{y, y+1} E_{y, y+1}}{\delta_{y, y+1} E_{y, y+1}^{(1)}},$$

откуда

$$\frac{\alpha_y}{\alpha_{y+1}} = 1 - \frac{E_{y, y+1}}{E_{y, y+1}^{(1)}}. \quad (3.73)$$

Анализируя полученное соотношение, рассмотрим три случая

$$\left. \begin{aligned} 1) E_{y, y+1} &= E_{y, y+1}^{(1)} \dots \frac{\alpha_y}{\alpha_{y+1}} = 1 - 1 = 0; \\ 2) E_{y, y+1} &> E_{y, y+1}^{(1)} > 0 \dots \frac{\alpha_y}{\alpha_{y+1}} < 0; \\ 3) E_{y, y+1} &< E_{y, y+1}^{(1)} \dots \frac{\alpha_y}{\alpha_{y+1}} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

Первый случай, очевидно, может иметь место только когда  $\alpha_y = 0$  (предположение, что  $\alpha_{y+1} = \infty$  лишено вероятности). Следовательно, узел находится в месте расположения  $y$ -й массы, (рис. 21, б).

Второй случай показывает, что амплитуды смежных масс имеют разные знаки, откуда следует, что узел находится в соединении между ними (рис. 21, в), т. е. на участке  $y, y+1$ .

Третий случай характеризует амплитуды как имеющие одинаковые знаки (рис. 21, г) и обуславливает отсутствие узла в соединении между ними.

Приведенное исследование выполнено на базе величин, характеризующих левую часть системы.

Для величин, свойственных правой части системы, эти признаки остаются в силе лишь с той разницей, что в выражениях (3.74) вместо  $E_{y, y+1}^{(1)}$  будет  $E_{y, y+1}^{(p)}$ .

В примерах 2 и 3 показано, как используются эти признаки в расчете свободных колебаний.

Итак, местонахождение узла определяется путем сопоставления величин  $E_{y, y+1}$  и  $E_{y, y+1}^{(1)}$ . В последующих вычислениях, выполняемых в табличной форме, они размещаются в вертикальных столбцах в последовательности (сверху — вниз) (табл. 3 и 4)

$$E_{y, y+1} + \frac{1}{H_{y+1}^{(1)}} = E_{y, y+1}^{(1)}. \quad (3.75)$$

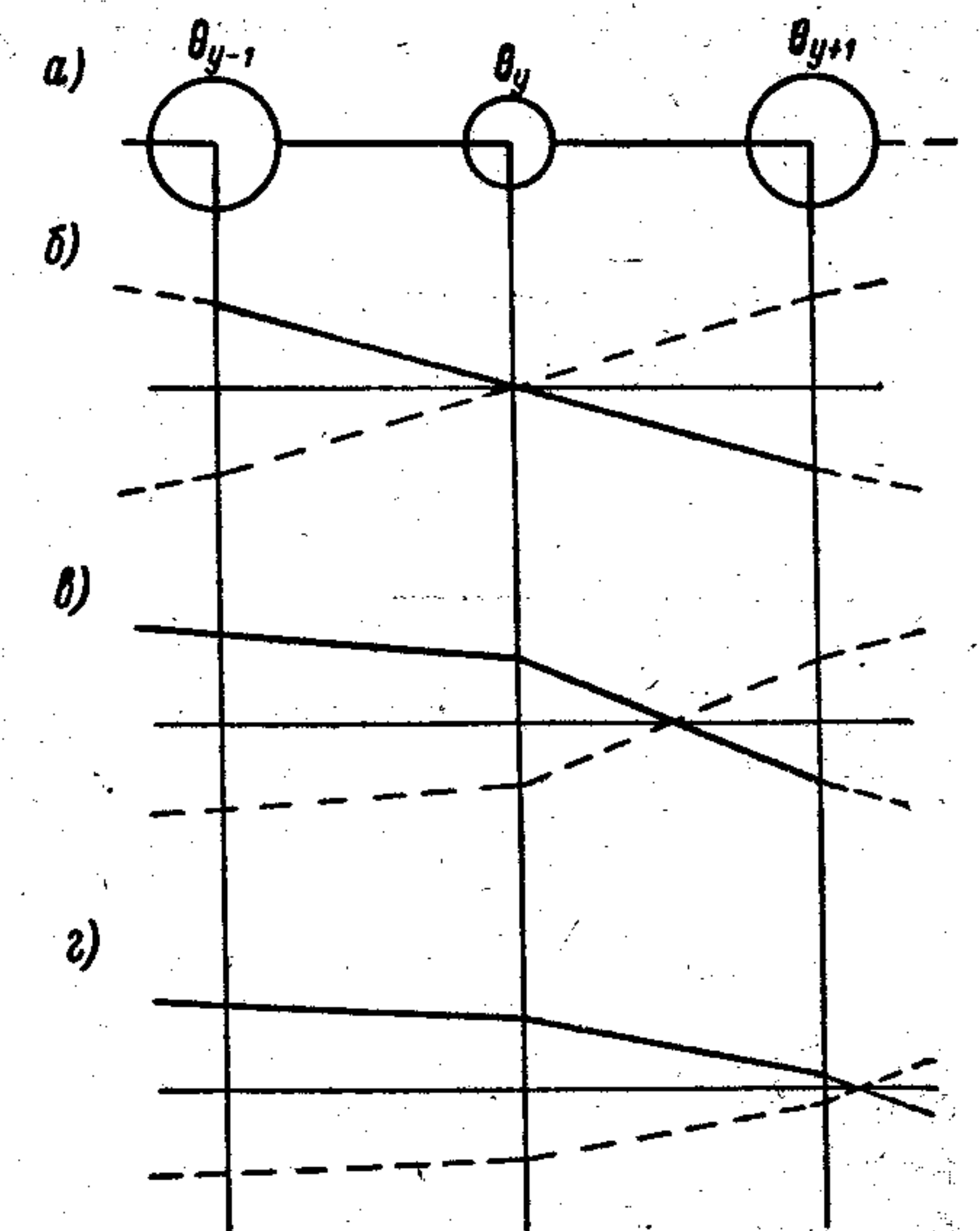


Рис. 21. К определению местонахождения узлов.



Когда  $E_{y, y+1} > 0(+)$ ,  $E_{y, y+1}^{(1)} > 0(+)$ , а  $E_{y, y+1} > E_{y, y+1}^{(1)}$ , то для обнаружения узла может служить формальный признак — чередование знаков  $+$  —  $+$  (по вертикали). Этот признак сохраняет свое значение во всех последующих расчетах как для левой, так и для правой частей системы.

## § 20. Расчет свободных колебаний в таблицах Терских без «надлома»

Как уже неоднократно указывалось, решение частотного уравнения для системы с числом масс более трех в общем виде оказывается чрезмерно сложным и на практике не применяется. В этих случаях расчет производится путем подбора корней (способ ложных решений). Некоторое, подобранное приближенно значение  $\Delta = \Delta_x$  подставляют в частотное уравнение и находят численное значение его левой части. Если в результате вычислений получается нуль, т. е. уравнение превращается в тождество ( $0 = 0$ ), то  $\Delta_x = \Delta_e$  и является одним из корней уравнения, соответствующим  $e$ -узловой форме свободных колебаний. Если этого не достигается, то задаются новым значением  $\Delta = \Delta_y$ . Вычисления повторяются до тех пор, пока результат одного из них не оказывается достаточно близким к нулю.

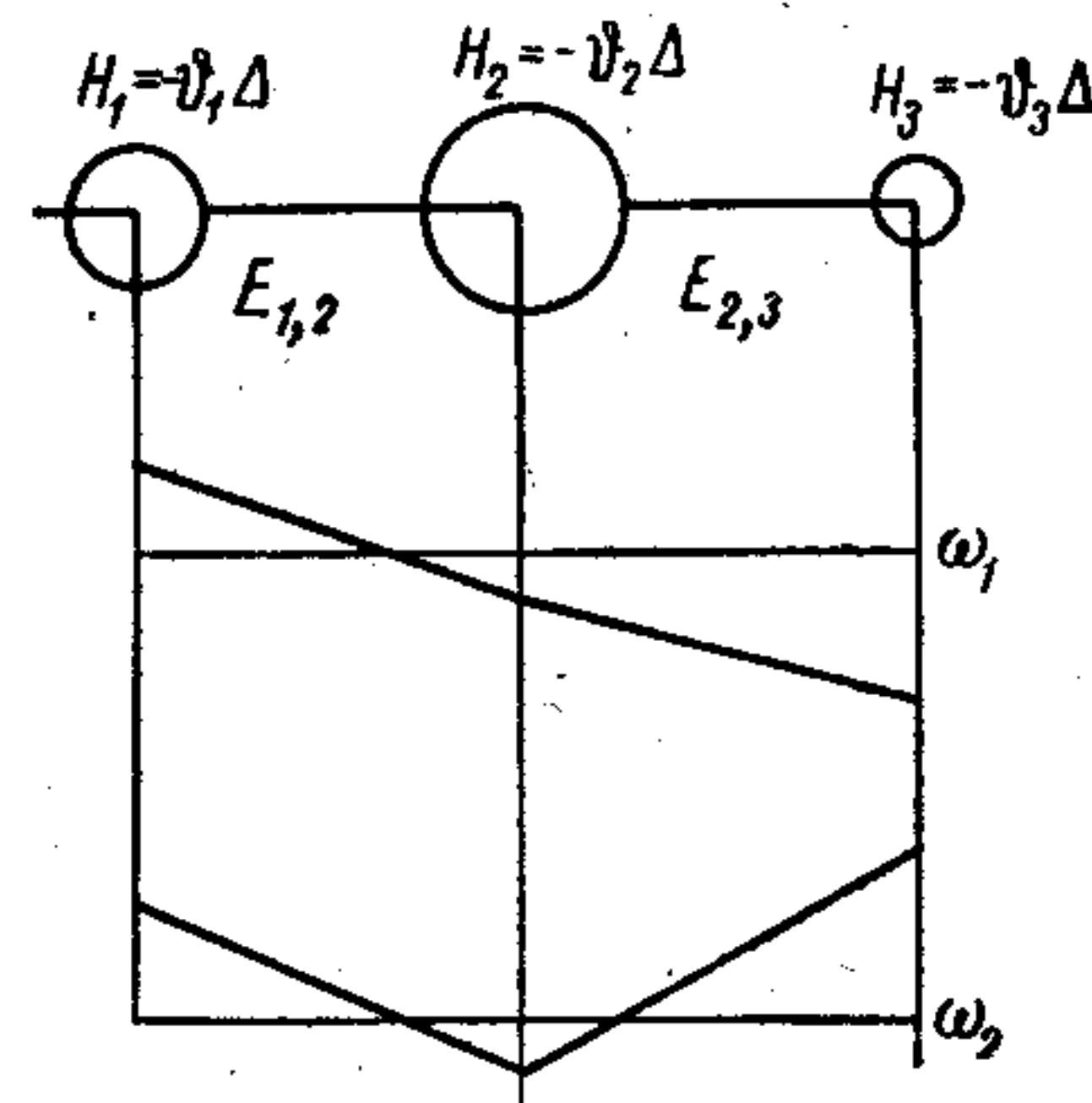


Рис. 22. Крутильная схема трехмассовой системы и формы ее свободных колебаний.

Опишем способ вычисления цепной дроби, соответствующей уравнению вида (3.47) для трехмассовой системы (рис. 22). Последующее покажет, что способ вычисления в таблице, предложенной Терских, без труда распространяется на систему со сколь угодно большим числом масс. Для удобства составления таблицы (только здесь) запишем это частотное уравнение на основании (3.47) и слева от него (символами  $E_{1,2}^{(1)}$ ,  $H_2^{(1)}$  и т. д.) обозначим знаменатели, представляющие собой податливости и стойкости частей системы.

$$H_3 + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{H_1}}}} = 0.$$

Таблица Терских составляется с числом столбцов, равным числу элементов системы. В данном случае: 3 (массы) + 2 (соединения) = 5 (столбцов). Во всех случаях для вычисления значения  $H_p^{(1)} = H_3^{(1)}$  достаточно иметь три строки. Только тогда, когда корень

Таблица 3

	1	2	3		
Параметры системы	$H_1 = -\vartheta_1 \Delta$	$E_{1,2}$	$H_2 = -\vartheta_2 \Delta$	$E_{2,3}$	$H_3 = -\vartheta_3 \Delta$
Обратные величины стойкостей и податливостей системы		$\frac{1}{H_1^{(1)}}$	$\frac{1}{E_{1,2}^{(1)}}$	$\frac{1}{H_2^{(1)}}$	$\frac{1}{E_{2,3}^{(1)}}$
Стойкости и податливости системы	$H_1^{(1)}$	$E_{1,2}^{(1)}$	$H_2^{(1)}$	$E_{2,3}^{(1)}$	$H_3^{(1)}$
Безразмерные амплитуды	$\alpha_1$		$\alpha_2$		$\alpha_3$
Безразмерные эластические моменты		$\delta_{1,2}$		$\delta_{2,3}$	

уже подобран (т. е. на последней таблице), добавляются еще две строки для подсчета амплитуд колебаний и эластических моментов. Здесь они приведены.

После разметки таблицы столбцы нумеруются, как показано в табл. 3. «Зарядка» таблицы заключается в заполнении ее первой строки, где (слева — направо) размещаются параметры системы в той последовательности, в какой даны в цепной дроби (снизу — вверх). При этом величины стойкостей  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  подсчитываются при ориентировочно заданном значении  $\Delta$  и размещаются в столбцах с соответствующими номерами.

Вычисление начинается с  $H_1^{(1)} = H_1$ . Обратная величина  $H_1^{(1)}$  (табл. 1) помещается под  $E_{1,2}$  и суммируется с ней (по вертикали), что позволяет найти  $E_{1,2}^{(1)}$ , как того требует цепная дробь. Обратная величина  $E_{1,2}^{(1)}$  переносится по стрелке в столбец 2 и размещается под  $H_2$ . Алгебраическая сумма этих величин определяет  $H_2^{(1)}$  и т. д. Ход вычисления указан стрелками.

В третьей строке последнего столбца получается  $H_3^{(1)} = H_p^{(1)}$  — численное значение всей цепной дроби.

Независимо от того, получилось ли  $H_p^{(1)} = 0$  или нет, устанавливается число узлов по признаку, найденному в § 19. Если число обнаруженных узлов соответствует рассчитываемой форме колебаний и величина  $H_p^{(1)}$  оказалась равной нулю или достаточно близкой к нему:  $H_p^{(1)} \leq (1 \div 2) \%$  от  $H_p$ , то принятое значение принимают за квадрат безразмерной частоты данной формы колебаний и переходят к вычислению амплитуд колебаний и эластических моментов, что производится в 4-й и 5-й строках таблицы.

После проработки данного параграфа совершенно необходимо подробно ознакомиться с примером 2, приведенным в конце главы.



Если отклонение  $H_p^{(1)}$  от нуля превышает допустимое, то вычисление повторяют на новом бланке для нового значения  $\Delta$ , которое устанавливается следующим образом. От руки набрасывается эскиз кривой  $H_p^{(1)} = f(\Delta)$  в виде, представленном на рис. 23. При этом изображаются  $p-2$  кривые типа тангенсоид и одна — типа гиперболы (справа). На той ветви кривой, номер которой соответствует числу узлов рассчитанной формы колебаний, отмечается точка с ординатой, равной  $H_p^{(1)}$  (на глаз, приблизительно соблюдая масштаб, но обязательно с учетом знака этой функции).

Зная, что истинное значение  $\Delta$  должно изображаться на эскизе расстоянием от начала координат до точки пересечения кривой с осью абсцисс, делают заключение о необходимости уменьшить или увеличить значение  $\Delta$ , заложенное в предыдущую таблицу. После заполнения двух-трех

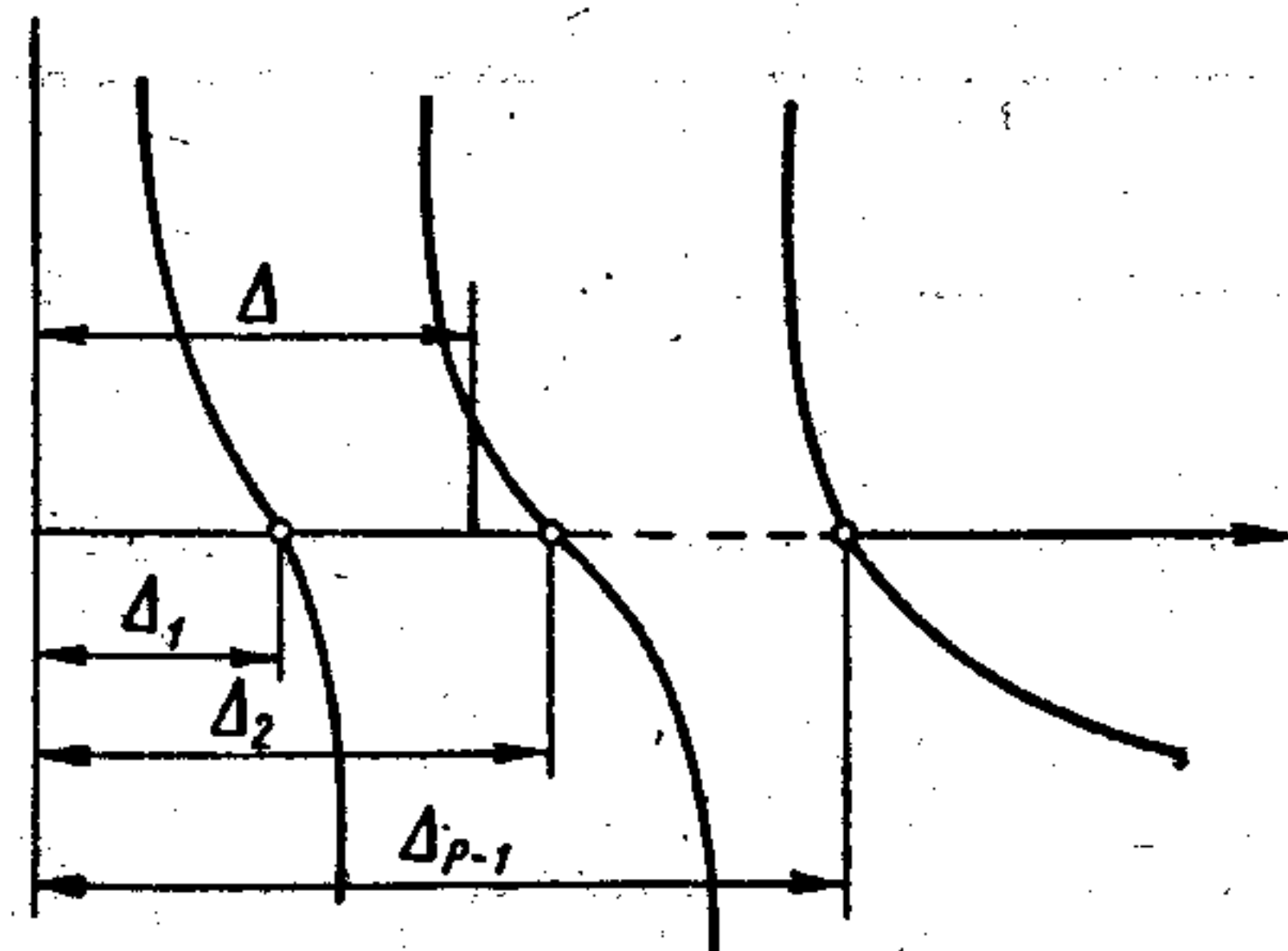


Рис. 23. Эскиз функции стойкости системы.

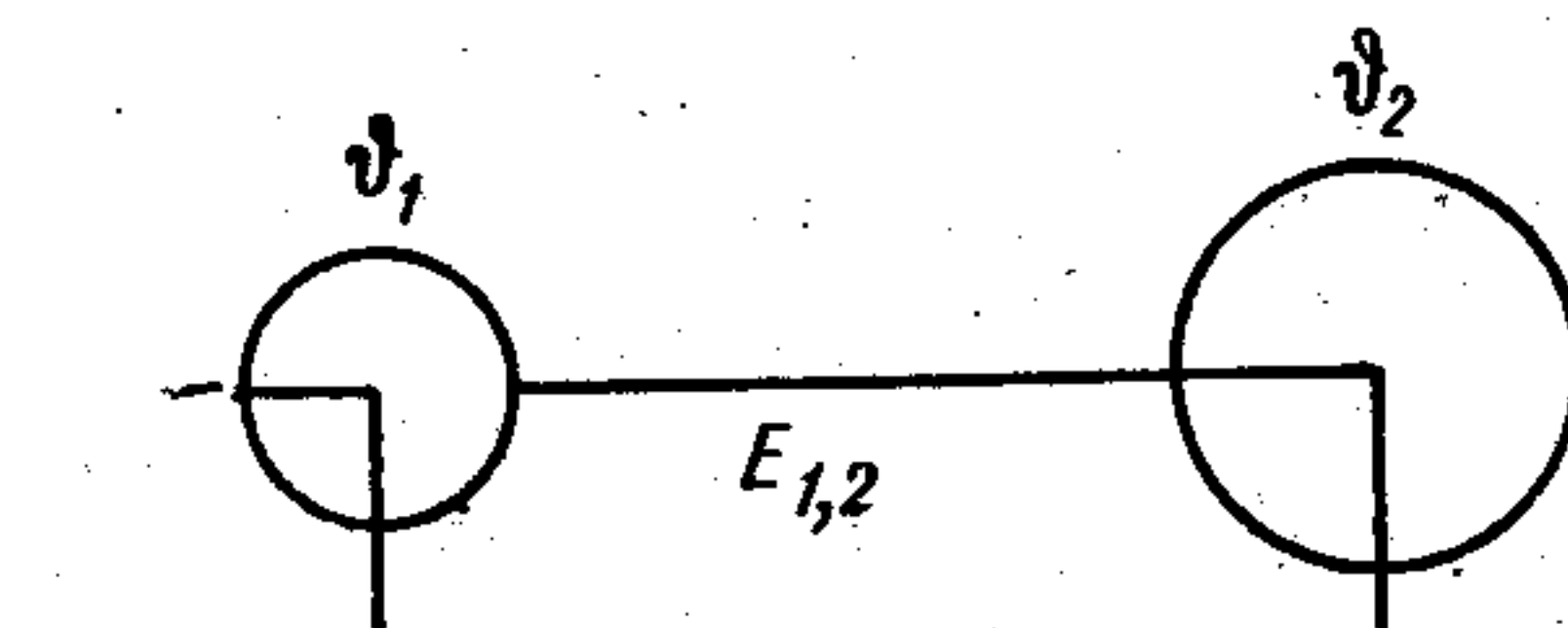


Рис. 24. Крутильная схема двух-массовой системы.

(редко четырех) таких таблиц, когда отклонение  $H_p^{(1)}$  от нуля достигнет требуемого, приступают к заполнению двух последних строк таблицы. Это делается так.

В четвертой строке первого столбца записывается  $\alpha_1 = 1$ . Последующие вычисления  $\delta_{1,2}$ ,  $\alpha_2$ ,  $\delta_{2,3}$  и т. д. выполняются на основании формул (3.68) и (3.69) в направлении, указанном стрелками,

$$\delta_{y, y+1} = \alpha_y H_y^{(1)} \text{ и } \alpha_y = \delta_{y-1, y} E_{y-1, y}^{(1)}.$$

Число перемен знака  $\alpha$  должно подтвердить число узлов. На основании полученных значений безразмерных амплитуд вычерчивается форма колебаний. Амплитуды представляются ординатами в произвольном масштабе. На горизонтальной оси графика должны быть отложены отрезки, пропорциональные податливостям, как это имело место на крутильной схеме. Концы ординат соединяются отрезками прямых.

Частотное уравнение алгебраически легко решается только для дискретных систем, включающих в себя две и три массы. Для четырехмассовых систем такое решение получается столь сложным, что не находит применения в практических расчетах.

Покажем, как решается это уравнение для двухмассовой системы, представленной на рис. 24.

Запишем частотное уравнение — вывод не требует пояснений.

$$-\vartheta_2 \Delta + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{-\vartheta_1 \Delta}} = 0; \quad -\vartheta_2 \Delta \left( E_{1,2} + \frac{1}{-\vartheta_1 \Delta} \right) + 1 = 0;$$

$$-\vartheta_2 \Delta E_{1,2} + \frac{\vartheta_2 \Delta}{\vartheta_1 \Delta} + 1 = -\vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2} \Delta + \vartheta_2 \Delta + \vartheta_1 \Delta = 0;$$

$$\Delta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2}} = \frac{1}{E_{1,2}} \left( \frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2} \right). \quad (3.76)$$

## § 21. Упрощение расчета свободных колебаний, когда группа равных масс находится в начале системы

При изображении крутильной схемы и нумерации масс всегда целесообразно располагать ее так, чтобы двигатель находился слева, т. е. в начале системы.

На этой схеме вал однородного двигателя с присоединенными к нему массами представляется в виде ряда равных масс, связанных между собой одинаковыми податливостями — такая часть системы условно называется *группой равных масс*.

Рассмотрим выражение для стойкости такой части системы на примере группы, состоящей из трех масс, и положим  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = E_{1,2} = E_{2,3} = 1$

$$H_3^{(1)} = H_3 + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{H_1}}}} = -\Delta + \frac{1}{1 + \frac{1}{-\Delta + \frac{1}{1 + \frac{1}{-\Delta}}}}.$$

Последнее выражение представляет собой цепную дробь, являющуюся функцией двух параметров: квадрата безразмерной частоты  $\Delta$  и числа равных масс. Подобная функция для системы из  $z$  равных масс обозначается  $H_z^{(1)}$ , она может быть табулирована, что позволяет вместо последовательного вычисления (требующего в данном случае пяти столбцов в таблице Терских) заимствовать заранее подсчитанные данные из специальной таблицы, называемой условно «стойкость группы равных масс» (табл. II). В расчетную таблицу при этом помещается вместо  $2z - 1$  только один столбец. В случае, если в начале системы расположен двигатель, имеющий 10 цилиндров, таблица Терских сокращается на  $2z - 2 = 2 \cdot 10 - 2 = 18$  столбцов, что существенно ускоряет работу вычислителя.



Если в пределах группы равных масс имеются узлы колебаний, то их можно обнаружить по числу перемен знака  $N_z^{(1)}$  с минуса на плюс в соответствующей строке табл. II от  $z$ , равного числу равных масс, до  $z = 2$ , имея в виду, что  $N_2^{(1)} < 0$ .

Форму колебаний, а также амплитуды эластических моментов для системы с группой равных масс можно найти, составив полную таблицу Терских для всех элементов системы ( $2p - 1$  столбцов) при найденном окончательно значении  $\Delta$ . Однако это можно сделать с минимальными затратами времени.

Если двигатель находится в начале системы, то на основании равенств (3.43), полагая в них  $\vartheta_y = E_{y-1,y} = 1$ , при  $1 < y < z$  находим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1; \\ \delta_{1,2} &= N_1 \alpha_1 = -\vartheta_1 \Delta \alpha_1 = -\Delta; \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \delta_{1,2} E_{1,2} = 1 - \Delta. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Амплитуды последующих масс находим из табл. IV, а эластических моментов — из уравнения деформаций (3.42), которое здесь принимает простейший вид,

$$\alpha_{y+1} = \alpha_y + \delta_{y,y+1} E_{y,y+1} \dots \delta_{y,y+1} = \alpha_{y+1} - \alpha_y. \quad (3.78)$$

Для элементов системы, расположенных за группой равных масс, амплитуды находят обычным путем на основании данных таблицы Терских, где было получено окончательное значение  $\Delta$ .

Стойкость группы равных масс может рассматриваться как стойкость некоторой эквивалентной упругой массы, оказывающей на систему такое же динамическое воздействие. При условном изображении эквивалентной упругой массы на крутильной схеме вместо кружка указывается квадратик (см. например, рис. 35, в).

Как показано Терских [56, стр. 205], стойкость группы равных масс, расположенных в начале системы, может быть найдена по формуле

$$N_z^{(1)} = \frac{\cos(2z+1)\varphi}{\cos(2z-1)\varphi} - 1 = \frac{\sqrt{\Delta} \sin 2z\varphi}{\cos(2z-1)\varphi}, \quad (3.79)$$

где  $\varphi = \arctg 0,5 \sqrt{\Delta}$ .

После проработки данного в этом параграфе материала необходимо подробно ознакомиться с примером 3, приведенным в конце главы.

## § 22. Погрешность расчета частоты свободных колебаний

Погрешность расчета частоты свободных колебаний систем валопроводов зависит от ряда факторов, из которых наиболее существенными являются:

— неточность приведения масс, связанная с отклонениями их действительных размеров от чертежа, с приближенной оценкой

момента инерции масс кривошипно-шатунного механизма, гребного винта (с увлекаемой им водой) и пр.;

— неточность приведения податливостей, на что влияет не только отклонение соединений от чертежных размеров, но и оценка модуля упругости, а также приближенная оценка влияния на податливость переходов от одного сечения вала к другому, всякого рода насадок в соединениях частей валов и пр.;

— замена действительной системы приближенной дискретной схемой;

— погрешность в выполнении расчета.

Обращая внимание на последнюю, следует отметить, что сам рассматриваемый способ расчета на погрешность результата (частота свободных колебаний, амплитуда колебаний и эластические моменты) влияния не оказывает. Однако в процессе его выполнения неизбежно возникает некоторая неточность, связанная с использованием ограниченного числа десятичных знаков. В этом отношении расчет по методу цепных дробей оказывается наилучшим по сравнению с другими известными методами.

Соответствующий анализ показывает [54, стр. 54], что точность решения уравнения в форме цепной дроби зависит только от точности, с которой принимаются обратные величины, и не зависит от числа элементов системы (масс и податливостей).

Отсюда следует важный практический вывод: точность, с которой берутся обратные величины, должна быть такого порядка, с какой желательно получить результаты решения. Практика показывает, что для определения частоты свободных колебаний достаточно получения результата с точностью до третьего знака — этим объясняется, что для выполнения расчетов систем большей части можно пользоваться прилагаемой таблицей обратных величин (приложение I).

Для расчета безразмерных амплитуд такая точность также вполне достаточна, так как их действительные значения при резонансных и вынужденных колебаниях находятся на основании эмпирических формул и с рядом допущений, вносящих в расчет значительно большие погрешности.

Погрешность определения резонансов по частотам оценивается примерно в 1—2% от соответствующего числа оборотов.

## § 23. Расчет свободных колебаний в таблицах Терских с «надломом»

Расчет свободных колебаний, основанный на использовании частотных уравнений второго и третьего видов (3.66 — 3.67), оказывается более удобным, чем изложенный в § 19 применительно к уравнению (3.47) без «надлома», а часто совершенно необходимым [16, стр. 181, пример 6].

Функция  $N_p^{(1)}$ , представленная для некоторой системы в зависимости от  $\Delta_e$ , например, на рис. 20, часто отличается той



особенностью, что одна или две из ее ветвей — тангенциод — располагаются между асимптотами, находящимися очень близко друг к другу (например, ветвь  $K-2$ ). В этих случаях при подборе частоты  $\Delta_e$  ( $e$ -узловой формы колебаний) создается такая ситуация: одно весьма близкое к  $\Delta_e$  значение  $\Delta'$  определяет численное значение  $H_p^{(1)}$  на ветви искомой формы, а другое, отличающееся от первого на единицу третьего знака после нуля —  $\Delta''$ , обуславливает  $H_p^{(1)}$  на соседней ветви другой формы. Если для нахождения корня принять новое значение  $\Delta$  (между  $\Delta'$  и  $\Delta''$ ), то все вычисления придется выполнять с увеличенным числом десятичных знаков. Однако такое мероприятие иногда также не достигает цели. В этом случае целесообразнее обратиться к частотному уравнению с «надломом», которое имеет то преимущество, что функция  $H_k^{(1)(p)}$  для данной формы может оказаться более пологой в месте пересечения соответствующей кривой с осью абсцисс. Тогда весь расчет по таблице с «надломом» можно выполнить беря обратные величины с тремя значащими цифрами. Если «надлом» на массе не достигает цели, то его выбирают на какой-либо другой массе или податливости.

«Надлом» целесообразно производить на одной из малых масс; часто его предусматривают на последней массе двигателя. «Надлома» на податливости, если он не является необходимым по каким-либо иным соображениям, мы избегаем, так как вместо привычных убывающих «тангенциод» функция  $E_{k,k+1}^{(1)(p)}$  характеризуется «тангенциодами» возрастающими (о чем иногда забывают). Кроме того, при «надломе» на податливости вычисление безразмерных амплитуд в четвертой и пятой строках таблицы выполняется полагая амплитуду безразмерного эластического момента в этом соединении равной единице, что несколько затрудняет последующие расчеты. «Надлом» на участке, где ожидается узел, производить нецелесообразно, так как правило знаков, позволяющее установить местонахождение узла, в этом случае нарушается. В остальном таблица с «надломом» на податливости не отличается от таковой с «надломом» на массе.

Последовательность вычислений в таблице Терских с «надломом» на массе опишем на примере расчета 5-массовой системы, представленной на рис. 25. «Надлом» предусматривается на 3-й массе. В случае расчета системы с иным числом масс, а также когда «надлом» предусматривается на любой другой массе, способ и последовательность вычислений сохраняются. Число столбцов таблицы равно числу элементов системы: 5 (масс) + 4 (соединения) = 9 (столбцов). Если в начале системы располагается группа  $z$  равных масс, то число столбцов уменьшается на  $2z - 2$ . Нумерация столбцов и заполнение первой строки таблицы производится так же, как в таблице без «надлома» (§ 20). Столбец, имеющий номер массы, на которой предполагается «надлом» (в данном слу-

чае — 3) ограничивается утолщенными вертикальными линиями (табл. 4).

Таблица 4

Таблица Терских для 5-массовой системы с «надломом» на третьей массе

$$H_3 + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{H_1}}}} + \frac{1}{E_{3,4} + \frac{1}{H_4 + \frac{1}{E_{4,5} + \frac{1}{H_5}}}} = 0; \quad H_3 + \frac{1}{E_{2,3}^{(1)}} + \frac{1}{E_{3,4}^{(5)}} = 0;$$

$$H_3^{(1)(5)} = 0$$

1	2	3	4	5				
$H_1$	$E_{1,2}$	$H_2$	$E_{2,3}$	$H_3$	$E_{3,4}$	$H_4$	$E_{4,5}$	$H_5$
	$\frac{1}{H_1}$	$\frac{1}{E_{1,2}^{(1)}}$	$\frac{1}{H_2^{(1)}}$	$\frac{1}{E_{2,3}^{(1)}}$	$\frac{1}{H_4^{(5)}}$	$\frac{1}{E_{4,5}^{(5)}}$	$\frac{1}{H_5}$	
	$E_{1,2}^{(1)}$	$H_2^{(1)}$	$E_{2,3}^{(1)}$	$\frac{1}{E_{3,4}^{(5)}}$	$E_{3,4}^{(5)}$	$H_4^{(5)}$	$E_{4,5}^{(5)}$	$H_3^{(1)(5)}$
$\alpha_1 = \frac{\delta_{1,2}}{H_1}$		$\alpha_2 = \frac{\delta_{2,3}}{H_2^{(1)}}$		$\alpha_3 = +1$		$\alpha_4 = \frac{\delta_{3,4}}{H_4^{(5)}}$		$\alpha_5 = \frac{\delta_{4,5}}{H_5}$
	$\delta_{1,2} = \frac{\alpha_2}{E_{1,2}^{(1)}}$		$\delta_{2,3} = \frac{1}{E_{2,3}^{(1)}}$		$\delta_{3,4} = \frac{-1}{E_{3,4}^{(5)}}$		$\delta_{4,5} = \frac{-\alpha_4}{E_{4,5}^{(5)}}$	

Вычисления во второй и третьей строках начинаются с левого конца таблицы и доводятся до обратной величины податливости левой части системы, которая размещается во второй строке столбца

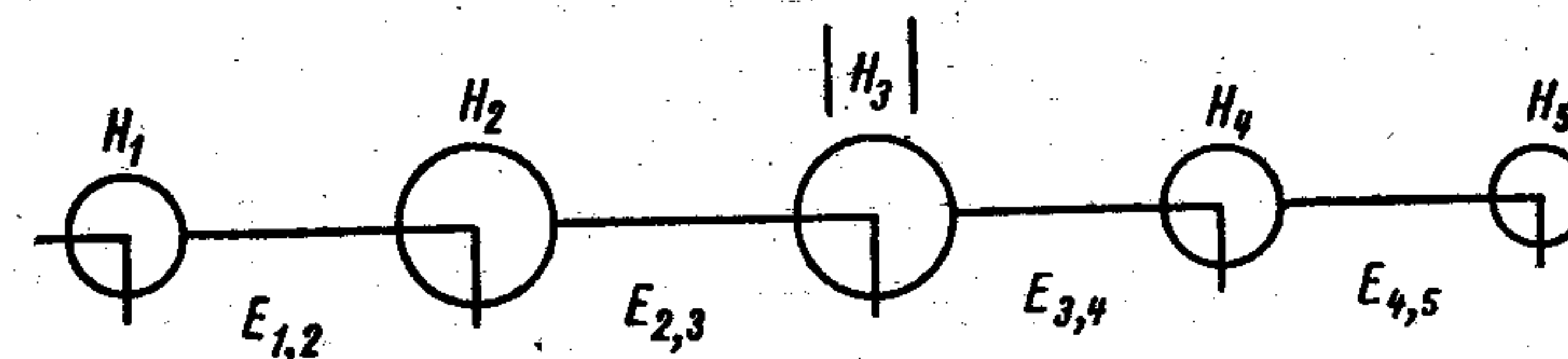


Рис. 25. Крутильная схема пятимассовой системы.

«надлома». Эта обратная величина соответствует второму члену частотного уравнения и оказывается в таблице непосредственно под стойкостью массы  $H_3$ , на которой производится «надлом» (первый член частотного уравнения).

Последующие вычисления в тех же строках таблицы начинаются с правого конца таблицы, как это показано стрелками. Они соответствуют подсчету численного значения третьего члена частотного уравнения и заканчиваются нахождением обратной величины  $E_{3,4}^{(5)}$ , которая размещается в столбце 3.

Числа, помещенные в третьем столбце соответствуют трем членам частотного уравнения. Их сумма  $H_3^{(1)(5)}$  — стойкость всей



системы с надломом на 3-й массе — записывается в третьей строке последнего столбца. Она равна нулю только тогда, когда частота  $\sqrt{\Delta}$  (при которой подсчитаны стойкости масс) является корнем уравнения. Обычно этого сразу не получается.

После выявления числа узлов по признаку, установленному в § 19, делается заключение о необходимости уменьшить или увеличить заданную величину  $\Delta$  (§ 20) и расчет повторяется до тех пор, пока стойкость системы не окажется менее  $(1 \div 2) \%$  стойкости массы, на которой произведен «надлом».

Описанный расчет иллюстрируется примером 2.

Вычисление безразмерных амплитуд колебаний и эластических моментов выполняется в четвертой и пятой строках той таблицы, где частота считается подобранной. Вычисление начинается с  $\alpha_k = \alpha_3 = 1$  и выполняется по формулам (3.70) для левой части системы и по формулам (3.68) и (3.69) для правой части системы. Его последовательность указана в таблице стрелками и пояснений не требует.

На основании величин безразмерных амплитуд колебаний, найденных в четвертой строке таблицы, строится форма колебаний (при  $\alpha_k = 1$ ), которая часто не получает характерного вида, так как  $\alpha_1$  может оказаться отрицательной величиной. В этом случае форму колебаний можно перестроить, поделив все безразмерные амплитуды на  $\alpha_1$  (со свойственным ей знаком).

## § 24. Приближенное определение частот свободных колебаний

Расчет, выполненный в первых трех строках описанных выше таблиц, по существу служит для уточнения частоты. Приступая к вычислениям, необходимо знать ориентировочную величину частоты исследуемой формы колебаний, на основании которой находятся стойкости масс ( $H_y = -\vartheta_y \Delta$ ), помещаемые в первую строку таблицы.

Приближенное значение частот свободных колебаний систем можно находить несколькими способами, а для широко применяемых — по номограммам.

Общий прием заключается в следующем. Рассматривая крутильную схему приведенной системы, визуальным образом определяют возможность объединения близко расположенных масс в одну массу. Таким путем любую многомассовую систему удастся заменить приближенно-эквивалентной ей двух- или трехмассовой системой, для которой частота определяется по выведенным для них формулам.

Для двухмассовой системы такая формула нами уже найдена (3.76)

$$\Delta = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2}}.$$

Для трехмассовой системы, которой свойственны две формы свободных колебаний, соответствующие им квадраты частот  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  находят по известной формуле, приведенной здесь в виде, наиболее удобном для использования,

$$\left. \begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{matrix} \right\} = (\Delta_{1,2} + \Delta_{2,3}) \mp \sqrt{(\Delta_{1,2} - \Delta_{2,3})^2 + (E_{1,2} \vartheta_2 E_{2,3})^{-1}}, \quad (3.80)$$

где вспомогательные величины

$$\Delta_{1,2} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\vartheta_1 \vartheta_2 E_{1,2}}; \quad \Delta_{2,3} = \frac{\vartheta_2 + \vartheta_3}{2\vartheta_2 \vartheta_3 E_{2,3}},$$

представляют собой уменьшенные в два раза квадраты частот свободных колебаний фиктивных двухмассовых систем с параметрами  $\vartheta_1, E_{1,2}, \vartheta_2$  и  $\vartheta_2, E_{2,3}, \vartheta_3$ . Формулы (3.76) и (3.80) — точные, но замена одной системы другой выполнена приближенно. Поэтому значения полученных частот могут существенно отличаться от устанавливаемых в таблицах Терских.

При замене группы масс, в частности группы равных масс, одной, последняя размещается на крутильной схеме в условном центре тяжести этих масс. Условном потому, что группа масс заменяется здесь одной с моментом инерции равным сумме моментов инерции объединенных масс, а место расположения заменяющей массы находится из уравнения моментов как положение равнодействующей параллельных сил, если эти силы взять пропорциональными моментам инерции заменяемых масс.

Источником погрешности при такой замене является допущение, что все заменяемые массы имеют одинаковую амплитуду (такую же, как заменяющая масса), чего нет в действительности.

Рассмотрим несколько типичных случаев; условимся обозначать номер последней массы двигателя, когда он находится в начале системы, индексом  $z$ ; находящиеся за двигателем массы обозначать номерами  $z+1$  и  $z+2$ , а податливости соответственно  $E_{z,z+1}$  и  $E_{z+1,z+2}$ .

*Случай 1.* Система имеет вид, представленный на рис. 26, а, т. е. состоит из двигателя, имеющего  $z$  цилиндров, податливости  $E_{z,z+1}$  и массы  $\vartheta_{z+1}$ . Требуется найти частоту одноузловой формы колебаний.

Если  $E_{z,z+1} > 8,5$ , то массы двигателя заменяют одной, равной их сумме  $z\vartheta = z$ . Найдя «центр тяжести» этих масс, располагают в нем массу  $\vartheta_x = z$  и определяют податливость между этой массой и последней массой двигателя  $E_{x,z}$ . Для полученной двухмассовой системы (рис. 26, б) с параметрами  $\vartheta_x, E_{x,z+1} = E_{x,z} + E_{z,z+1}$  и  $\vartheta_{z+1}$  частоту находят по формуле (3.76). А. М. Кац предложил принимать  $E_{x,z} = 0,4z - 0,5$ , что дает более точный результат.



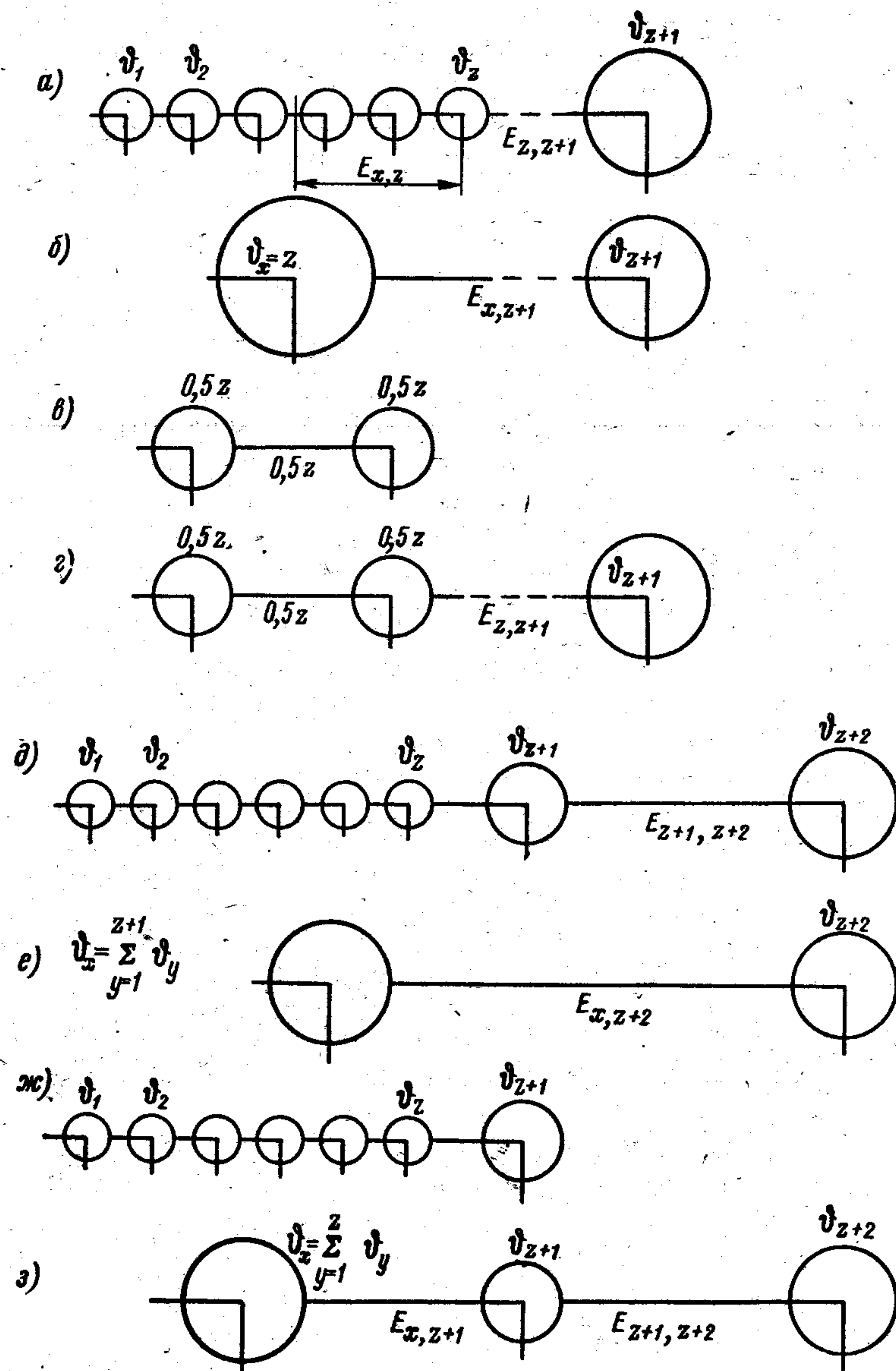


Рис. 26. Крутильные схемы систем и замена их эквивалентными.

Если  $E_{z,z+1} < 8,5$ , то описанный прием дает большую погрешность, поэтому для определения частот предпочитают пользоваться номограммой Сенчищева, приведенной на рис. 27, где дан пример соответствующего расчета.

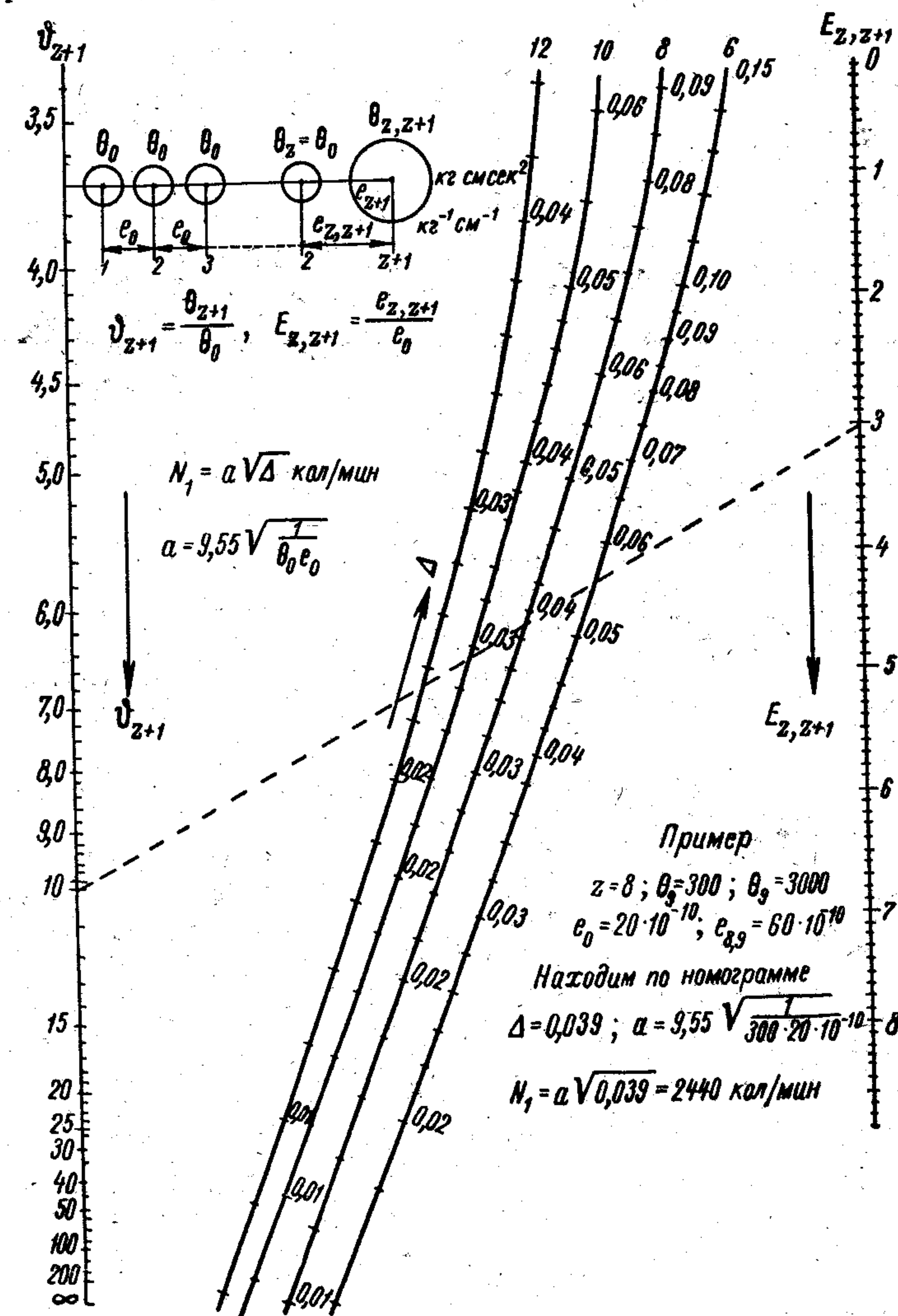


Рис. 27. Номограмма для определения частот свободных колебаний одноузловой формы.

Подобные номограммы с более широким охватом систем см. [56, Приложение].

Случай 2. Для системы, указанной в случае 1, требуется найти частоту двухузловой формы колебаний.



Здесь исходят из допущения, что частота одноузловой формы колебаний части системы, включающей в себя только коленчатый вал двигателя, близка к частоте двухузловой формы всей системы. Частоту одноузловой формы двигателя находят по формуле (3.76), заменив все его массы двумя, как показано на рис. 26, в.

Заменив двигатель двумя массами, можно найти частоты  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  также по формуле для трехмассовой системы (3.80) (рис. 26, г).

**Случай 3.** Система состоит из двигателя, который связан с массой  $\vartheta_{z+1}$  небольшой податливостью  $E_{z, z+1} < 2$ , и массы  $\vartheta_{z+2}$ , отделенной от описанной части системы податливостью  $E_{z+1, z+2} > 10$  (рис. 26, д).

Для нахождения частоты одноузловой формы все массы, за исключением  $\vartheta_{z+2}$  (рис. 26, е), заменяют одной, расположенной в их «центре тяжести». Расчет производят по формуле (3.76).

Если  $\vartheta_{z+1} \approx E_{z, z+1} \approx 1$ , то  $\vartheta_{z+1}$  включают в группу равных масс, что облегчает нахождение «центра тяжести».

**Случай 4.** Для системы, указанной в случае 3, требуется найти частоту двухузловой формы колебаний.

Исключив массу  $\vartheta_{z+2}$ , находят частоту одноузловой формы колебаний для оставшейся части системы (как это указано в случае 2) и полагают ее равной частоте двухузловых колебаний всей системы (рис. 26, ж). Другой способ — приведение к трехмассовой системе (рис. 26, з) и расчет по формуле (3.80).

## § 25. Частоты свободных колебаний, подлежащие исследованию

Из числа всех гармонических составляющих возмущающего момента, возбуждающего крутильные колебания в установках с ДВС, имеющими 5—10 цилиндров, опасными оказываются только составляющие с порядком менее 10-го. Наименьший порядок этих гармоник для двухтактных двигателей  $\nu_{\min} = 1$ , а для четырехтактных —  $\nu_{\min} = 0,5$ . Для четырехцилиндровых четырехтактных двигателей этот диапазон ограничивается  $0,5 < \nu < 6$ .

Для каждой установки число оборотов вала также находится в пределах, обусловленных ее назначением —  $n_{\min}$  и  $n_{\max}$ .

Числа колебаний  $N = \nu n$  (1.24), которые подлежат исследованию, очевидно, должны лежать в пределах

$$\nu_{\min} n_{\min} \leq N \leq \nu_{\max} n_{\max}.$$

Имея в виду зависимость (3.28), находим

$$\nu_{\min} n_{\min} \leq 9,55 \sqrt{\frac{1}{\theta_0 e_0}} \sqrt{\Delta} \leq \nu_{\max} n_{\max}$$

или

$$\left( \frac{\nu_{\min} n_{\min}}{9,55} \right)^2 \theta_0 e_0 \leq \Delta \leq \left( \frac{\nu_{\max} n_{\max}}{9,55} \right)^2 \theta_0 e_0$$

и, окончательно,

$$0,01 (\nu_{\min} n_{\min})^2 \theta_0 e_0 \leq \Delta \leq 0,01 (\nu_{\max} n_{\max})^2 \theta_0 e_0. \quad (3.81)$$

Полученное соотношение показывает, что расчету подлежат только те формы свободных колебаний, частоты которых находятся в указанных пределах.

Число узлов высшей формы колебаний из числа подлежащих исследованию легко установить, заполнив одну таблицу Терских при  $\Delta = \Delta_{\max}$  (в уточнении значения корня здесь нет необходимости).

## § 26. Упрощение расчета свободных колебаний в случаях, когда группа равных масс находится в середине системы

Если группа равных масс расположена в начале системы, то ее динамические свойства могут быть выражены заменяющей эту систему «упругой» массой со стойкостью  $H_z^{(1)}$  (§ 20). Если же такая группа находится в середине системы (или перед ней имеется хотя бы одна масса), то группа равных масс может быть заменена двумя одинаковыми «упругими» массами, связанными «инертным» соединением, которое характеризуется как упругими, так и массовыми свойствами. Стойкости этих «упругих» масс и податливость такого соединения являются функциями числа равных масс и частоты колебаний [56, стр. 211].

Если до группы, состоящей из  $z$  равных масс (т. е. слева от двигателя), имеется  $c$  других масс, то первая и последняя из масс двигателя соответственно будут иметь номера  $c+1$  и  $c+z$ . Стойкость же эквивалентных параметров — «упругих» масс и податливость связывающего их «инертного» соединения — обозначаются символами:

$$H_{c+1}^z, H_{c+z}^z \text{ и } E_{c+1, c+z}^z.$$

Верхний индекс  $z$  подчеркивает, что эти параметры осуществляют эквивалентную замену действительных параметров группы равных масс.

Эквивалентные параметры могут быть найдены по формулам [56, стр. 211]:

$$H_z^z = H_{c+1}^z = H_{c+z}^z = \frac{\cos(z+1)\varphi}{\cos(z-1)\varphi} - 1; \quad (3.82)$$

$$E_{1,z}^z = E_{c+1, c+z}^z = \frac{\sin 2(z-1)\varphi}{\sin 2\varphi}, \text{ где } \varphi = \arcsin 0,5 \sqrt{\Delta}.$$

В этих зависимостях крайние левые члены равенств представлены условными символами, которые более удобны при написании.

Приведем пример подсчета эквивалентных параметров для группы равных масс, представленной шестицилиндровым двигателем,



расположенным в середине системы, при частоте колебаний  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,016} = 0,126$ . На основании (3.82) имеем

$$\varphi = \arcsin 0,5 \sqrt{\Delta} \approx 0,5 \cdot 0,126 = 0,063;$$

$$H_{c+1}^z = H_{c+6}^z = \frac{\cos(6+1) \cdot 0,063}{\cos(6-1) \cdot 0,063} - 1 = \frac{\cos 0,442}{\cos 0,315} - 1 = -0,049;$$

$$E_{c+1, c+6}^z = \frac{\sin 2(z-1) \varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{\sin 2(6-1) 0,063}{\sin 2 \cdot 0,063} = 4,49.$$

Составляя таблицу Терских для данного случая, группе равных масс вместо 11 столбцов уделяется только три; в них размещаются найденные значения  $H_{c+1}^z$ ,  $E_{c+1, c+6}^z$  и  $H_{c+6}^z$  (см. пример 4). При этом не только сокращается вычислительная работа, но уменьшается вероятность ошибок.

Значения эквивалентных параметров для двигателей с различным числом цилиндров даны в приложении (табл. III).

## § 27. Особенности расчета свободных колебаний разветвленных систем

В простой цепной системе отдельные массы соединены между собой последовательно. Если к какой-либо из промежуточных масс этой основной системы присоединить, посредством упругого соединения, еще одну массу (ответвление) параллельно, то система приобретает особые свойства и называется *разветвленной*. Вместо упомянутой массы в качестве ответвления может быть присоединена другая цепная система.

Ответвление в виде одной массы имеет место в маховике с упругими спицами, а также в пружинном антивибраторе. Здесь параллельно-присоединенными массами будут, соответственно, обод маховика и масса пружинного антивибратора (гл. 9).

Ответвление в виде группы масс встречается в редукторных установках, например, с двумя дизелями, если не предусматривается муфт, допускающих проскальзывание (гидравлических или электрических). Здесь ответвлением является система одного из дизелей, а местом ответвления — редуктор (рис. 29).

При наличии редукторов свойства системы могут существенно измениться вследствие влияния зазоров в зубчатых соединениях. Если амплитуда эластического момента  $F$  в таком соединении оказывается больше среднего значения передаваемого этим соединением крутящего момента  $M_{ср}$ , то односторонний контакт между зубцами нарушается и возникает перекладка зазора. В этом случае зубчатое соединение становится источником нелинейности, что вызывает необходимость особого подхода к решению задачи (гл. 8).

В данной главе рассматриваются только такие системы, где  $F < M_{ср}$ . В них сохраняются линейные свойства.

Во всех этих случаях ответвление вместе с той массой, к которой оно присоединено, удобно рассматривать как «упругую» массу, обладающую стойкостью, выражаемой соответствующей цепной дробью обычного вида. Если основная система, как показано на рис. 28, а, имеет  $l$  масс, а ответвление начинается с  $k$ -й массы и содержит в себе  $p-l$  масс, то стойкость ответвления будет

$$H_k^{(p)} = H_k + \frac{1}{E_{k, l+1} + \frac{1}{H_{l+1}^{(p)}}}.$$

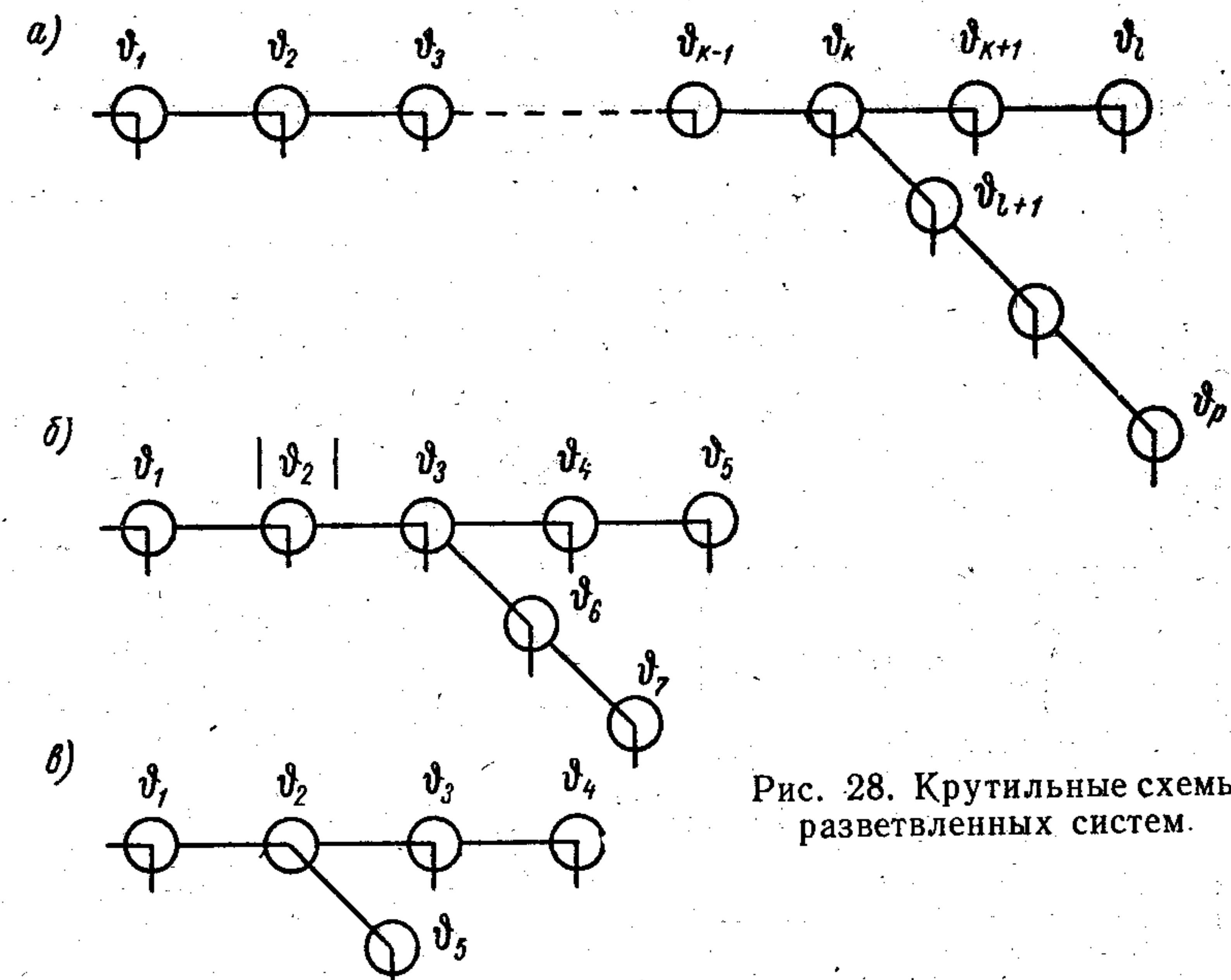


Рис. 28. Крутильные схемы разветвленных систем.

Частотное уравнение всей разветвленной системы, записываемое  $H_1^{(1)(l)(p)} = 0$  или, короче,  $H_1^{(1)(p)} = 0$  (между верхними индексами здесь помещена точка), примет вид

$$H_1^{(1)(l)(p)} = H_1 + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{H_2 + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_3 + \frac{1}{E_{3,4} + \frac{1}{H_4 + \frac{1}{E_{4,5} + \frac{1}{H_5 + \frac{1}{E_{5,6} + \frac{1}{H_6 + \frac{1}{E_{6,7} + \frac{1}{H_7 + \frac{1}{E_{7,8} + \frac{1}{H_8 + \frac{1}{E_{8,9} + \frac{1}{H_9 + \frac{1}{E_{9,10} + \frac{1}{H_{10} + \frac{1}{E_{10,11} + \frac{1}{H_{11} + \frac{1}{E_{11,12} + \frac{1}{H_{12} + \frac{1}{E_{12,13} + \frac{1}{H_{13} + \frac{1}{E_{13,14} + \frac{1}{H_{14} + \frac{1}{E_{14,15} + \frac{1}{H_{15} + \frac{1}{E_{15,16} + \frac{1}{H_{16} + \frac{1}{E_{16,17} + \frac{1}{H_{17} + \frac{1}{E_{17,18} + \frac{1}{H_{18} + \frac{1}{E_{18,19} + \frac{1}{H_{19} + \frac{1}{E_{19,20} + \frac{1}{H_{20} + \frac{1}{E_{20,21} + \frac{1}{H_{21} + \frac{1}{E_{21,22} + \frac{1}{H_{22} + \frac{1}{E_{22,23} + \frac{1}{H_{23} + \frac{1}{E_{23,24} + \frac{1}{H_{24} + \frac{1}{E_{24,25} + \frac{1}{H_{25} + \frac{1}{E_{25,26} + \frac{1}{H_{26} + \frac{1}{E_{26,27} + \frac{1}{H_{27} + \frac{1}{E_{27,28} + \frac{1}{H_{28} + \frac{1}{E_{28,29} + \frac{1}{H_{29} + \frac{1}{E_{29,30} + \frac{1}{H_{30} + \frac{1}{E_{30,31} + \frac{1}{H_{31} + \frac{1}{E_{31,32} + \frac{1}{H_{32} + \frac{1}{E_{32,33} + \frac{1}{H_{33} + \frac{1}{E_{33,34} + \frac{1}{H_{34} + \frac{1}{E_{34,35} + \frac{1}{H_{35} + \frac{1}{E_{35,36} + \frac{1}{H_{36} + \frac{1}{E_{36,37} + \frac{1}{H_{37} + \frac{1}{E_{37,38} + \frac{1}{H_{38} + \frac{1}{E_{38,39} + \frac{1}{H_{39} + \frac{1}{E_{39,40} + \frac{1}{H_{40} + \frac{1}{E_{40,41} + \frac{1}{H_{41} + \frac{1}{E_{41,42} + \frac{1}{H_{42} + \frac{1}{E_{42,43} + \frac{1}{H_{43} + \frac{1}{E_{43,44} + \frac{1}{H_{44} + \frac{1}{E_{44,45} + \frac{1}{H_{45} + \frac{1}{E_{45,46} + \frac{1}{H_{46} + \frac{1}{E_{46,47} + \frac{1}{H_{47} + \frac{1}{E_{47,48} + \frac{1}{H_{48} + \frac{1}{E_{48,49} + \frac{1}{H_{49} + \frac{1}{E_{49,50} + \frac{1}{H_{50} + \frac{1}{E_{50,51} + \frac{1}{H_{51} + \frac{1}{E_{51,52} + \frac{1}{H_{52} + \frac{1}{E_{52,53} + \frac{1}{H_{53} + \frac{1}{E_{53,54} + \frac{1}{H_{54} + \frac{1}{E_{54,55} + \frac{1}{H_{55} + \frac{1}{E_{55,56} + \frac{1}{H_{56} + \frac{1}{E_{56,57} + \frac{1}{H_{57} + \frac{1}{E_{57,58} + \frac{1}{H_{58} + \frac{1}{E_{58,59} + \frac{1}{H_{59} + \frac{1}{E_{59,60} + \frac{1}{H_{60} + \frac{1}{E_{60,61} + \frac{1}{H_{61} + \frac{1}{E_{61,62} + \frac{1}{H_{62} + \frac{1}{E_{62,63} + \frac{1}{H_{63} + \frac{1}{E_{63,64} + \frac{1}{H_{64} + \frac{1}{E_{64,65} + \frac{1}{H_{65} + \frac{1}{E_{65,66} + \frac{1}{H_{66} + \frac{1}{E_{66,67} + \frac{1}{H_{67} + \frac{1}{E_{67,68} + \frac{1}{H_{68} + \frac{1}{E_{68,69} + \frac{1}{H_{69} + \frac{1}{E_{69,70} + \frac{1}{H_{70} + \frac{1}{E_{70,71} + \frac{1}{H_{71} + \frac{1}{E_{71,72} + \frac{1}{H_{72} + \frac{1}{E_{72,73} + \frac{1}{H_{73} + \frac{1}{E_{73,74} + \frac{1}{H_{74} + \frac{1}{E_{74,75} + \frac{1}{H_{75} + \frac{1}{E_{75,76} + \frac{1}{H_{76} + \frac{1}{E_{76,77} + \frac{1}{H_{77} + \frac{1}{E_{77,78} + \frac{1}{H_{78} + \frac{1}{E_{78,79} + \frac{1}{H_{79} + \frac{1}{E_{79,80} + \frac{1}{H_{80} + \frac{1}{E_{80,81} + \frac{1}{H_{81} + \frac{1}{E_{81,82} + \frac{1}{H_{82} + \frac{1}{E_{82,83} + \frac{1}{H_{83} + \frac{1}{E_{83,84} + \frac{1}{H_{84} + \frac{1}{E_{84,85} + \frac{1}{H_{85} + \frac{1}{E_{85,86} + \frac{1}{H_{86} + \frac{1}{E_{86,87} + \frac{1}{H_{87} + \frac{1}{E_{87,88} + \frac{1}{H_{88} + \frac{1}{E_{88,89} + \frac{1}{H_{89} + \frac{1}{E_{89,90} + \frac{1}{H_{90} + \frac{1}{E_{90,91} + \frac{1}{H_{91} + \frac{1}{E_{91,92} + \frac{1}{H_{92} + \frac{1}{E_{92,93} + \frac{1}{H_{93} + \frac{1}{E_{93,94} + \frac{1}{H_{94} + \frac{1}{E_{94,95} + \frac{1}{H_{95} + \frac{1}{E_{95,96} + \frac{1}{H_{96} + \frac{1}{E_{96,97} + \frac{1}{H_{97} + \frac{1}{E_{97,98} + \frac{1}{H_{98} + \frac{1}{E_{98,99} + \frac{1}{H_{99} + \frac{1}{E_{99,100} + \frac{1}{H_{100} + \frac{1}{E_{100,101} + \frac{1}{H_{101} + \frac{1}{E_{101,102} + \frac{1}{H_{102} + \frac{1}{E_{102,103} + \frac{1}{H_{103} + \frac{1}{E_{103,104} + \frac{1}{H_{104} + \frac{1}{E_{104,105} + \frac{1}{H_{105} + \frac{1}{E_{105,106} + \frac{1}{H_{106} + \frac{1}{E_{106,107} + \frac{1}{H_{107} + \frac{1}{E_{107,108} + \frac{1}{H_{108} + \frac{1}{E_{108,109} + \frac{1}{H_{109} + \frac{1}{E_{109,110} + \frac{1}{H_{110} + \frac{1}{E_{110,111} + \frac{1}{H_{111} + \frac{1}{E_{111,112} + \frac{1}{H_{112} + \frac{1}{E_{112,113} + \frac{1}{H_{113} + \frac{1}{E_{113,114} + \frac{1}{H_{114} + \frac{1}{E_{114,115} + \frac{1}{H_{115} + \frac{1}{E_{115,116} + \frac{1}{H_{116} + \frac{1}{E_{116,117} + \frac{1}{H_{117} + \frac{1}{E_{117,118} + \frac{1}{H_{118} + \frac{1}{E_{118,119} + \frac{1}{H_{119} + \frac{1}{E_{119,120} + \frac{1}{H_{120} + \frac{1}{E_{120,121} + \frac{1}{H_{121} + \frac{1}{E_{121,122} + \frac{1}{H_{122} + \frac{1}{E_{122,123} + \frac{1}{H_{123} + \frac{1}{E_{123,124} + \frac{1}{H_{124} + \frac{1}{E_{124,125} + \frac{1}{H_{125} + \frac{1}{E_{125,126} + \frac{1}{H_{126} + \frac{1}{E_{126,127} + \frac{1}{H_{127} + \frac{1}{E_{127,128} + \frac{1}{H_{128} + \frac{1}{E_{128,129} + \frac{1}{H_{129} + \frac{1}{E_{129,130} + \frac{1}{H_{130} + \frac{1}{E_{130,131} + \frac{1}{H_{131} + \frac{1}{E_{131,132} + \frac{1}{H_{132} + \frac{1}{E_{132,133} + \frac{1}{H_{133} + \frac{1}{E_{133,134} + \frac{1}{H_{134} + \frac{1}{E_{134,135} + \frac{1}{H_{135} + \frac{1}{E_{135,136} + \frac{1}{H_{136} + \frac{1}{E_{136,137} + \frac{1}{H_{137} + \frac{1}{E_{137,138} + \frac{1}{H_{138} + \frac{1}{E_{138,139} + \frac{1}{H_{139} + \frac{1}{E_{139,140} + \frac{1}{H_{140} + \frac{1}{E_{140,141} + \frac{1}{H_{141} + \frac{1}{E_{141,142} + \frac{1}{H_{142} + \frac{1}{E_{142,143} + \frac{1}{H_{143} + \frac{1}{E_{143,144} + \frac{1}{H_{144} + \frac{1}{E_{144,145} + \frac{1}{H_{145} + \frac{1}{E_{145,146} + \frac{1}{H_{146} + \frac{1}{E_{146,147} + \frac{1}{H_{147} + \frac{1}{E_{147,148} + \frac{1}{H_{148} + \frac{1}{E_{148,149} + \frac{1}{H_{149} + \frac{1}{E_{149,150} + \frac{1}{H_{150} + \frac{1}{E_{150,151} + \frac{1}{H_{151} + \frac{1}{E_{151,152} + \frac{1}{H_{152} + \frac{1}{E_{152,153} + \frac{1}{H_{153} + \frac{1}{E_{153,154} + \frac{1}{H_{154} + \frac{1}{E_{154,155} + \frac{1}{H_{155} + \frac{1}{E_{155,156} + \frac{1}{H_{156} + \frac{1}{E_{156,157} + \frac{1}{H_{157} + \frac{1}{E_{157,158} + \frac{1}{H_{158} + \frac{1}{E_{158,159} + \frac{1}{H_{159} + \frac{1}{E_{159,160} + \frac{1}{H_{160} + \frac{1}{E_{160,161} + \frac{1}{H_{161} + \frac{1}{E_{161,162} + \frac{1}{H_{162} + \frac{1}{E_{162,163} + \frac{1}{H_{163} + \frac{1}{E_{163,164} + \frac{1}{H_{164} + \frac{1}{E_{164,165} + \frac{1}{H_{165} + \frac{1}{E_{165,166} + \frac{1}{H_{166} + \frac{1}{E_{166,167} + \frac{1}{H_{167} + \frac{1}{E_{167,168} + \frac{1}{H_{168} + \frac{1}{E_{168,169} + \frac{1}{H_{169} + \frac{1}{E_{169,170} + \frac{1}{H_{170} + \frac{1}{E_{170,171} + \frac{1}{H_{171} + \frac{1}{E_{171,172} + \frac{1}{H_{172} + \frac{1}{E_{172,173} + \frac{1}{H_{173} + \frac{1}{E_{173,174} + \frac{1}{H_{174} + \frac{1}{E_{174,175} + \frac{1}{H_{175} + \frac{1}{E_{175,176} + \frac{1}{H_{176} + \frac{1}{E_{176,177} + \frac{1}{H_{177} + \frac{1}{E_{177,178} + \frac{1}{H_{178} + \frac{1}{E_{178,179} + \frac{1}{H_{179} + \frac{1}{E_{179,180} + \frac{1}{H_{180} + \frac{1}{E_{180,181} + \frac{1}{H_{181} + \frac{1}{E_{181,182} + \frac{1}{H_{182} + \frac{1}{E_{182,183} + \frac{1}{H_{183} + \frac{1}{E_{183,184} + \frac{1}{H_{184} + \frac{1}{E_{184,185} + \frac{1}{H_{185} + \frac{1}{E_{185,186} + \frac{1}{H_{186} + \frac{1}{E_{186,187} + \frac{1}{H_{187} + \frac{1}{E_{187,188} + \frac{1}{H_{188} + \frac{1}{E_{188,189} + \frac{1}{H_{189} + \frac{1}{E_{189,190} + \frac{1}{H_{190} + \frac{1}{E_{190,191} + \frac{1}{H_{191} + \frac{1}{E_{191,192} + \frac{1}{H_{192} + \frac{1}{E_{192,193} + \frac{1}{H_{193} + \frac{1}{E_{193,194} + \frac{1}{H_{194} + \frac{1}{E_{194,195} + \frac{1}{H_{195} + \frac{1}{E_{195,196} + \frac{1}{H_{196} + \frac{1}{E_{196,197} + \frac{1}{H_{197} + \frac{1}{E_{197,198} + \frac{1}{H_{198} + \frac{1}{E_{198,199} + \frac{1}{H_{199} + \frac{1}{E_{199,200} + \frac{1}{H_{200} + \frac{1}{E_{200,201} + \frac{1}{H_{201} + \frac{1}{E_{201,202} + \frac{1}{H_{202} + \frac{1}{E_{202,203} + \frac{1}{H_{203} + \frac{1}{E_{203,204} + \frac{1}{H_{204} + \frac{1}{E_{204,205} + \frac{1}{H_{205} + \frac{1}{E_{205,206} + \frac{1}{H_{206} + \frac{1}{E_{206,207} + \frac{1}{H_{207} + \frac{1}{E_{207,208} + \frac{1}{H_{208} + \frac{1}{E_{208,209} + \frac{1}{H_{209} + \frac{1}{E_{209,210} + \frac{1}{H_{210} + \frac{1}{E_{210,211} + \frac{1}{H_{211} + \frac{1}{E_{211,212} + \frac{1}{H_{212} + \frac{1}{E_{212,213} + \frac{1}{H_{213} + \frac{1}{E_{213,214} + \frac{1}{H_{214} + \frac{1}{E_{214,215} + \frac{1}{H_{215} + \frac{1}{E_{215,216} + \frac{1}{H_{216} + \frac{1}{E_{216,217} + \frac{1}{H_{217} + \frac{1}{E_{217,218} + \frac{1}{H_{218} + \frac{1}{E_{218,219} + \frac{1}{H_{219} + \frac{1}{E_{219,220} + \frac{1}{H_{220} + \frac{1}{E_{220,221} + \frac{1}{H_{221} + \frac{1}{E_{221,222} + \frac{1}{H_{222} + \frac{1}{E_{222,223} + \frac{1}{H_{223} + \frac{1}{E_{223,224} + \frac{1}{H_{224} + \frac{1}{E_{224,225} + \frac{1}{H_{225} + \frac{1}{E_{225,226} + \frac{1}{H_{226} + \frac{1}{E_{226,227} + \frac{1}{H_{227} + \frac{1}{E_{227,228} + \frac{1}{H_{228} + \frac{1}{E_{228,229} + \frac{1}{H_{229} + \frac{1}{E_{229,230} + \frac{1}{H_{230} + \frac{1}{E_{230,231} + \frac{1}{H_{231} + \frac{1}{E_{231,232} + \frac{1}{H_{232} + \frac{1}{E_{232,233} + \frac{1}{H_{233} + \frac{1}{E_{233,234} + \frac{1}{H_{234} + \frac{1}{E_{234,235} + \frac{1}{H_{235} + \frac{1}{E_{235,236} + \frac{1}{H_{236} + \frac{1}{E_{236,237} + \frac{1}{H_{237} + \frac{1}{E_{237,238} + \frac{1}{H_{238} + \frac{1}{E_{238,239} + \frac{1}{H_{239} + \frac{1}{E_{239,240} + \frac{1}{H_{240} + \frac{1}{E_{240,241} + \frac{1}{H_{241} + \frac{1}{E_{241,242} + \frac{1}{H_{242} + \frac{1}{E_{242,243} + \frac{1}{H_{243} + \frac{1}{E_{243,244} + \frac{1}{H_{244} + \frac{1}{E_{244,245} + \frac{1}{H_{245} + \frac{1}{E_{245,246} + \frac{1}{H_{246} + \frac{1}{E_{246,247} + \frac{1}{H_{247} + \frac{1}{E_{247,248} + \frac{1}{H_{248} + \frac{1}{E_{248,249} + \frac{1}{H_{249} + \frac{1}{E_{249,250} + \frac{1}{H_{250} + \frac{1}{E_{250,251} + \frac{1}{H_{251} + \frac{1}{E_{251,252} + \frac{1}{H_{252} + \frac{1}{E_{252,253} + \frac{1}{H_{253} + \frac{1}{E_{253,254} + \frac{1}{H_{254} + \frac{1}{E_{254,255} + \frac{1}{H_{255} + \frac{1}{E_{255,256} + \frac{1}{H_{256} + \frac{1}{E_{256,257} + \frac{1}{H_{257} + \frac{1}{E_{257,258} + \frac{1}{H_{258} + \frac{1}{E_{258,259} + \frac{1}{H_{259} + \frac{1}{E_{259,260} + \frac{1}{H_{260} + \frac{1}{E_{260,261} + \frac{1}{H_{261} + \frac{1}{E_{261,262} + \frac{1}{H_{262} + \frac{1}{E_{262,263} + \frac{1}{H_{263} + \frac{1}{E_{263,264} + \frac{1}{H_{264} + \frac{1}{E_{264,265} + \frac{1}{H_{265} + \frac{1}{E_{265,266} + \frac{1}{H_{266} + \frac{1}{E_{266,267} + \frac{1}{H_{267} + \frac{1}{E_{267,268} + \frac{1}{H_{268} + \frac{1}{E_{268,269} + \frac{1}{H_{269} + \frac{1}{E_{269,270} + \frac{1}{H_{270} + \frac{1}{E_{270,271} + \frac{1}{H_{271} + \frac{1}{E_{271,272} + \frac{1}{H_{272} + \frac{1}{E_{272,273} + \frac{1}{H_{273} + \frac{1}{E_{273,274} + \frac{1}{H_{274} + \frac{1}{E_{274,275} + \frac{1}{H_{275} + \frac{1}{E_{275,276} + \frac{1}{H_{276} + \frac{1}{E_{276,277} + \frac{1}{H_{277} + \frac{1}{E_{277,278} + \frac{1}{H_{278} + \frac{1}{E_{278,279} + \frac{1}{H_{279} + \frac{1}{E_{279,280} + \frac{1}{H_{280} + \frac{1}{E_{280,281} + \frac{1}{H_{281} + \frac{1}{E_{281,282} + \frac{1}{H_{282} + \frac{1}{E_{282,283} + \frac{1}{H_{283} + \frac{1}{E_{283,284} + \frac{1}{H_{284} + \frac{1}{E_{284,285} + \frac{1}{H_{285} + \frac{1}{E_{285,286} + \frac{1}{H_{286} + \frac{1}{E_{286,287} + \frac{1}{H_{287} + \frac{1}{E_{287,288} + \frac{1}{H_{288} + \frac{1}{E_{288,289} + \frac{1}{H_{289} + \frac{1}{E_{289,290} + \frac{1}{H_{290} + \frac{1}{E_{290,291} + \frac{1}{H_{291} + \frac{1}{E_{291,292} + \frac{1}{H_{292} + \frac{1}{E_{292,293} + \frac{1}{H_{293} + \frac{1}{E_{293,294} + \frac{1}{H_{294} + \frac{1}{E_{294,295} + \frac{1}{H_{295} + \frac{1}{E_{295,296} + \frac{1}{H_{296} + \frac{1}{E_{296,297} + \frac{1}{H_{297} + \frac{1}{E_{297,298} + \frac{1}{H_{298} + \frac{1}{E_{298,299} + \frac{1}{H_{299} + \frac{1}{E_{299,300} + \frac{1}{H_{300} + \frac{1}{E_{300,301} + \frac{1}{H_{301} + \frac{1}{E_{301,302} + \frac{1}{H_{302} + \frac{1}{E_{302,303} + \frac{1}{H_{303} + \frac{1}{E_{303,304} + \frac{1}{H_{304} + \frac{1}{E_{304,305} + \frac{1}{H_{305} + \frac{1}{E_{305,306} + \frac{1}{H_{306} + \frac{1}{E_{306,307} + \frac{1}{H_{307} + \frac{1}{E_{307,308} + \frac{1}{H_{308} + \frac{1}{E_{308,309} + \frac{1}{H_{309} + \frac{1}{E_{309,310} + \frac{1}{H_{310} + \frac{1}{E_{310,311} + \frac{1}{H_{311} + \frac{1}{E_{311,312} + \frac{1}{H_{312} + \frac{1}{E_{312,313} + \frac{1}{H_{313} + \frac{1}{E_{313,314} + \frac{1}{H_{314} + \frac{1}{E_{314,315} + \frac{1}{H_{315} + \frac{1}{E_{315,316} + \frac{1}{H_{316} + \frac{1}{E_{316,317} + \frac{1}{H_{317} + \frac{1}{E_{317,318} + \frac{1}{H_{318} + \frac{1}{E_{318,319} + \frac{1}{H_{319} + \frac{1}{E_{319,320} + \frac{1}{H_{320} + \frac{1}{E_{320,321} + \frac{1}{H_{321} + \frac{1}{E_{321,322} + \frac{1}{H_{322} + \frac{1}{E_{322,323} + \frac{1}{H_{323} + \frac{1}{E_{323,324} + \frac{1}{H_{324} + \frac{1}{E_{324,325} + \frac{1}{H_{325} + \frac{1}{E_{325,326} + \frac{1}{H_{326} + \frac{1}{E_{326,327} + \frac{1}{H_{327} + \frac{1}{E_{327,328} + \frac{1}{H_{328} + \frac{1}{E_{328,329} + \frac{1}{H_{329} + \frac{1}{E_{329,330} + \frac{1}{H_{330} + \frac{1}{E_{330,331} + \frac{1}{H_{331} + \frac{1}{E_{331,332} + \frac{1}{H_{332} + \frac{1}{E_{332,333} + \frac{1}{H_{333} + \frac{1}{E_{333,334} + \frac{1}{H_{334} + \frac{1}{E_{334,335} + \frac{1}{H_{335} + \frac{1}{E_{335,336} + \frac{1}{H_{336} + \frac{1}{E_{336,337} + \frac{1}{H_{337} + \frac{1}{E_{337,338} + \frac{1}{H_{338} + \frac{1}{E_{338,339} + \frac{1}{H_{339} + \frac{1}{E_{339,340} + \frac{1}{H_{340} + \frac{1}{E_{340,341} + \frac{1}{H_{341} + \frac{1}{E_{341,342} + \frac{1}{H_{342} + \frac{1}{E_{342,343} + \frac{1}{H_{343} + \frac{1}{E_{343,344} + \frac{1}{H_{344} + \frac{1}{E_{344,345} + \frac{1}{H_{345} + \frac{1}{E_{345,346} + \frac{1}{H_{346} + \frac{1}{E_{346,347} + \frac{1}{H_{347} + \frac{1}{E_{347,348} + \frac{1}{H_{348} + \frac{1}{E_{348,349} + \frac{1}{H_{349} + \frac{1}{E_{349,350} + \frac{1}{H_{350} + \frac{1}{E_{350,351} + \frac{1}{H_{351} + \frac{1}{E_{351,352} + \frac{1}{H_{352} + \frac{1}{E_{352,353} + \frac{1}{H_{353} + \frac{1}{E_{353,354} + \frac{1}{H_{354} + \frac{1}{E_{354,355} + \frac{1}{H_{355} + \frac{1}{E_{355,356} + \frac{1}{H_{356} + \frac{1}{E_{356,357} + \frac{1}{H_{357} + \frac{1}{E_{357,358} + \frac{1}{H_{358} + \frac{1}{E_{358,359} + \frac{1}{H_{359} + \frac{1}{E_{359,360} + \frac{1}{H_{360} + \frac{1}{E_{360,361} + \frac{1}{H_{361} + \frac{1}{E_{361,362} + \frac{1}{H_{362} + \frac{1}{E_{362,363} + \frac{1}{H_{363} + \frac{1}{E_{363,364} + \frac{1}{H_{364} + \frac{1}{E_{364,365} + \frac{1}{H_{365} + \frac{1}{E_{365,366} + \frac{1}{H_{366} + \frac{1}{E_{366,367} + \frac{1}{H_{367} + \frac{1}{E_{367,368} + \frac{1}{H_{368} + \frac{1}{E_{368,369} + \frac{1}{H_{369} + \frac{1}{E_{369,370} + \frac{1}{H_{370} + \frac{1}{E_{370,371} + \frac{1}{H_{371} + \frac{1}{E_{371,372} + \frac{1}{H_{372} + \frac{1}{E_{372,373} + \frac{1}{H_{373} + \frac{1}{E_{373,374} + \frac{1}{H_{374} + \frac{1}{E_{374,375} + \frac{1}{H_{375} + \frac{1}{E_{375,376} + \frac{1}{H_{376} + \frac{1}{E_{376,377} + \frac{1}{H_{377} + \frac{1}{E_{377,378} + \frac{1}{H_{378} + \frac{1}{E_{378,379} + \frac{1}{H_{379} + \frac{1}{E_{379,380} + \frac{1}{H_{380} + \frac{1}{E_{380,381} + \frac{1}{H_{381} + \frac{1}{E_{381,382} + \frac{1}{H_{382} + \frac{1}{E_{382,383} + \frac{1}{H_{383} + \frac{1}{E_{383,384} + \frac{1}{H_{384} + \frac{1}{E_{384,385} + \frac{1}{H_{385} + \frac{1}{E_{385,386} + \frac{1}{H_{386} + \frac{1}{E_{386,387} + \frac{1}{H_{387} + \frac{1}{E_{387,388} + \frac{1}{H_{388} + \frac{1}{E_{388,389} + \frac{1}{H_{389} + \frac{1}{E_{389,390} + \frac{1}{H_{390} + \frac{1}{E_{39$$



Таблица 5

К расчету разветвленной системы

4	$H_4$	$E_{3,4}$	$H_3^{(1) \cdot (5)}$
	$E_{3,4}$	$\frac{1}{H_4}$	$E_{3,4}^{(4)}$
	$H_3$	$\frac{1}{E_{2,3}^{(1) \cdot (5)}}$	$\frac{1}{E_{3,4}^{(4)}}$
	$E_{2,3}$	$\frac{1}{H_2^{(1) \cdot (5)}}$	$E_{2,3}^{(1) \cdot (5)}$
3	$H_2^{(5)}$	$\frac{1}{E_{1,2}^{(1)}}$	$H_2^{(1) \cdot (5)}$
	$E_{1,2}$	$\frac{1}{H_1}$	$E_{1,2}^{(1)}$
1	$H_1$		
2	$H_2$	$\frac{1}{E_{2,5}^{(5)}}$	$H_2^{(5)}$
	$E_{2,5}$	$\frac{1}{H_5}$	$E_{2,5}^{(5)}$
	$H_5$		
5			

При надломе на  $k$ -й массе частотное уравнение запишется несколько иначе

$$H_k^{(1) \cdot (l) \cdot (p)} = H_k + \frac{1}{E_{k-1,k}^{(1)}} + \frac{1}{E_{k,k+1}^{(l)}} + \frac{1}{E_{k,l+1}^{(p)}} = 0. \quad (3.84)$$

Стойкость  $k$ -й массы  $H_k$  суммируется здесь с обратными величинами податливостей всех связанных с этой массой частей системы (рис. 28, а).

Для лучшего усвоения вводимых понятий рассмотрим семимассовую систему, представленную на рис. 28, б.

При надломе на второй массе (номер этой массы на крутильной схеме ограничен вертикальными линиями) частотное уравнение может быть записано в нескольких вариантах. Если его выразить через стойкости и податливости частей системы:

$$H_2^{(1) \cdot (5) \cdot (7)} = 0;$$

$$H_2^{(1)} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_3^{(5) \cdot (7)}}} = 0;$$

$$H_2^{(1)} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_3^{(7)} + \frac{1}{E_{3,4}^{(5)}}}} = 0;$$

$$H_2^{(1)} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_3^{(5)} + \frac{1}{E_{3,6}^{(7)}}}} = 0;$$

$$H_2^{(1)} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_3 + \frac{1}{E_{3,6}^{(7)}} + \frac{1}{E_{3,4}^{(5)}}}} = 0;$$

То же частотное уравнение может быть выражено через первичные параметры, что легко выполнить на основании последнего уравнения (или непосредственно).

При рассмотрении этих частотных уравнений нетрудно заметить, что для вычисления численных значений их левых частей (после подстановки ориентировочного значения  $\Delta$ ) можно поступать так же, как в случаях расчетов, выполняемых на основании других описанных частотных уравнений.

Расчет производится в известной таблице (с надломом или без надлома), только в клетку первой строки, где должна быть помещена стойкость массы с ответвлением, следует подставить стойкость упругой массы, которая предварительно вычисляется в особой добавочной таблице.

Рассмотрим такой расчет для пятимассовой системы, в которой основная часть состоит из четырех масс, а ответвление включает в себе только одну массу.

Крутильная схема такой системы представлена на рис. 28, в. Частотное уравнение всей системы при надломе на 3-й массе будет

$$H_3^{(1) \cdot (4) \cdot (5)} = H_3 + \frac{1}{E_{3,4}^{(4)}} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_2^{(5) \cdot (1)}}} = 0; \quad (3.85)$$

$$H_3 + \frac{1}{E_{3,4} + \frac{1}{H_4}} + \frac{1}{E_{2,3} + \frac{1}{H_2^{(5)} + \frac{1}{E_{1,2} + \frac{1}{H_1}}}} = 0;$$

$$H_2^{(5)} = H_2 + \frac{1}{E_{2,5} + \frac{1}{H_5}}. \quad (3.86)$$

Для вычисления стойкости упругой массы  $H_2^{(5)}$  (ответвления) требуется таблица Терских из трех столбцов (табл. 5), а для вычисления стойкости всей системы — из семи столбцов, которая помещается правее.

Ход вычислений указан стрелками. Его нетрудно сопоставить с записанным частотным уравнением.

Численный пример подобного расчета дан в конце главы (пример 5).

## § 28. Особенности расчета свободных колебаний симметричных разветвленных систем

Симметричными называют разветвленные системы с одной или несколькими парами одинаковых ветвей.

Такие системы, в частности, встречаются в виде дизель-редукторных установок с передачей мощности на один вал и в виде



двухвалых двигателей, передающих мощность на какой-либо приемник энергии. Если амплитуда эластического момента в каждом соединении, включающем зубчатую передачу, не превосходит среднего значения, передаваемого этим соединением крутящего момента, то система является линейной (§ 11, п. 10).

Рассмотрим расчет свободных колебаний системы дизель-редукторной установки с двумя двигателями, в которой все упругие соединения — линейные. Гидравлических или иных муфт с проскальзыванием или нелинейными свойствами здесь нет.

Такая система представлена на рис. 29, а. Она состоит из двух  $z$  — цилиндрических двигателей, зубчатой передачи (не редуктора) и валопровода с двумя массами. Объединяя массы шестерен в одну  $\vartheta_l$ , изобразим крутильную схему (рис. 29, б).

Составим частотное уравнение свободных колебаний системы с надломом на массе  $l$

$$H_l^{(1)(p)} = H_l^{(p)} + \frac{1}{E_{Iz,l} + \frac{1}{H_{Iz}^{(1)}}} + \frac{1}{E_{IIz,l} + \frac{1}{H_{IIz}^{(1)}}} = 0. \quad (3.87)$$

В данной симметричной системе

$$E_{Iz,l} = E_{IIz,l} = E_{z,l} \quad \text{и} \quad H_{Iz}^{(1)} = H_{IIz}^{(1)} = H_z^{(1)}.$$

Поэтому

$$H_l^{(p)} + \frac{2}{E_{z,l} + \frac{1}{H_z^{(1)}}} = H_l^{(p)} + \frac{1}{\frac{1}{2}E_{z,l} + \frac{1}{2H_z^{(1)}}} = 0. \quad (3.88)$$

Входящая в последний член удвоенная стойкость части системы (в нашем случае — это стойкость группы равных масс) может быть выражена через исходные параметры

$$\begin{aligned} 2H_z^{(1)} &= 2H_z + \frac{1}{\frac{1}{2}E_{z-1,z} + \frac{1}{2H_{z-1}} + \dots + \frac{1}{2H_1}} = \\ &= -2\vartheta_z\Delta + \frac{1}{\frac{1}{2}E_{z-1,z} + \frac{1}{-2\vartheta_{z-1}\Delta + \dots + \frac{1}{-2\vartheta_1\Delta}}} \end{aligned}$$

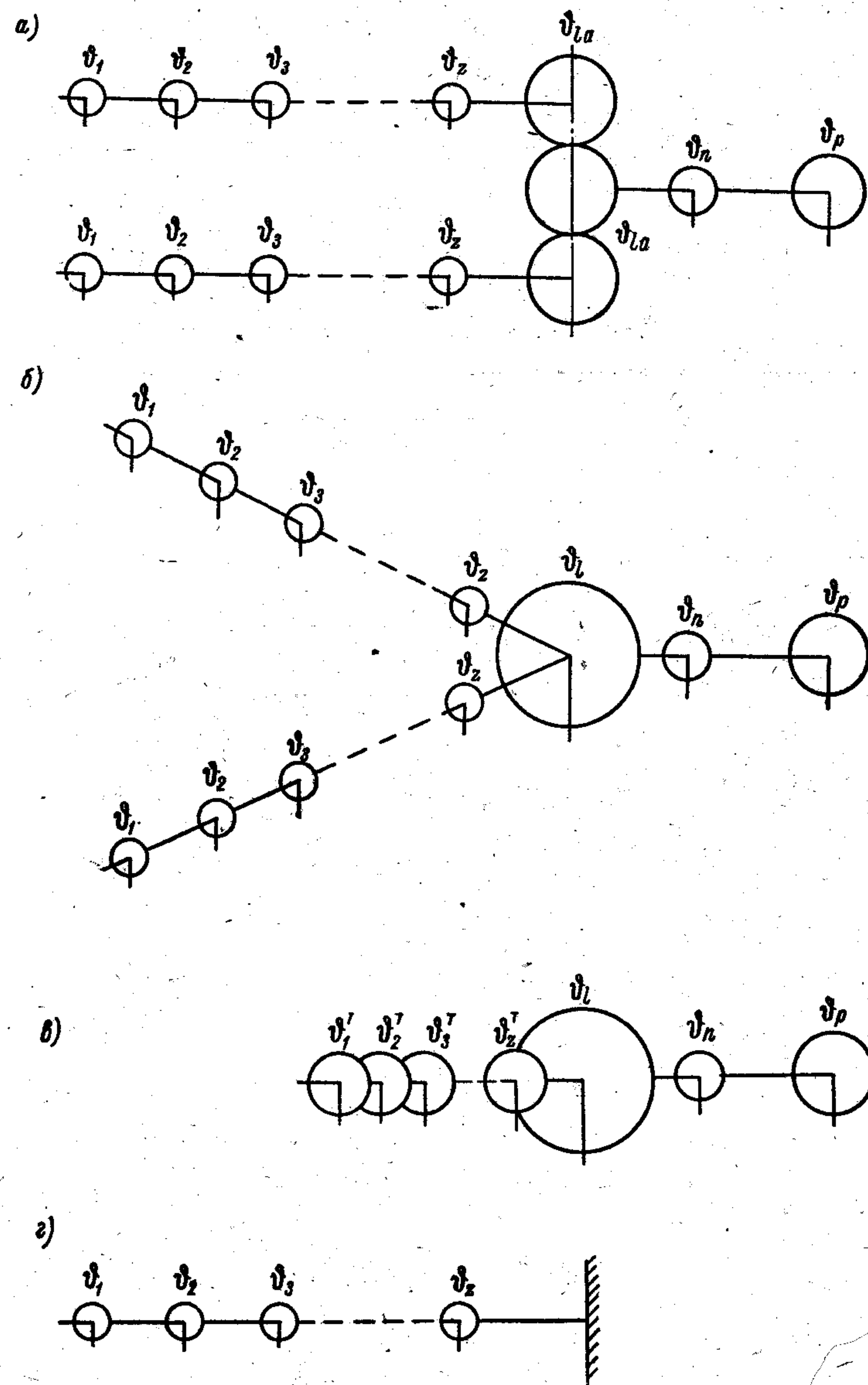


Рис. 29. Крутильная схема дизель-редукторной установки.



Рассматривая эти выражения, замечаем, что все массы ответвлений здесь помножены на 2, а податливости, как и заключающиеся в частотном уравнении (3.88), поделены на 2. Это позволяет представить два одинаковых ответвления как одно трансформированное, имеющее столько элементов, сколько их в одной ветви. Моменты инерции трансформированных масс, их стойкости и податливости соединений могут быть представлены новыми символами (с верхним индексом Т)

$$\vartheta_y^T = 2\vartheta_y; \quad H_y^T = 2H_y; \quad E_{y,y+1}^T = \frac{1}{2} E_{y,y+1}.$$

Частотное уравнение (3.88) здесь принимает вид

$$H_l^{(p)} + \frac{1}{E_{z,l}^T + \frac{1}{H_z^{(1)}}} = 0. \quad (3.89)$$

Оно соответствует крутильной схеме (рис. 29, в) и позволяет произвести расчет свободных колебаний в обычной таблице Терских.

Найденные таким расчетом амплитуды эластических моментов трансформированной системы по существу образуются в двух одноименных соединениях ответвлений, поэтому их следует уменьшить в два раза:

$$\delta_{I,y,y+1} = \delta_{II,y,y+1} = 0,5\delta_{y,y+1}^T.$$

Амплитуды колебаний такой корректировки не требуют, так как массы исходной и трансформированной систем колеблются одинаково. Частотное уравнение (3.89) позволяет обнаружить все формы свободных колебаний разветвленной системы. Оно используется, когда узел колебаний не совпадает с массой редуктора. Трансформированная часть системы, воспроизводя динамическое действие обоих ответвлений, обуславливает возникновение эластического момента в редукторе, который передается на несимметричное ответвление. При этом наблюдаются формы свободных колебаний с совпадающим движением одноименных масс (рис. 30, в). Однако, в некоторых случаях, при вычислении в таблице Терских стойкость массы редуктора оказывается близкой к бесконечности. Соответствующие этим случаям частоты позволяют выделить группу особых форм свободных колебаний симметричных разветвленных систем со встречным движением одноименных масс.

Представим себе, что узел свободных колебаний образовался в редукторе на массе  $l$ , а в несимметричном ответвлении колебаний не возникает. Наличие узла в массе  $l$  соответствует заземлению этой массы, что аналогично случаю, когда она обладает бесконечно большим моментом инерции  $\vartheta_l = |H_l| = \infty$ . Перепишем частот-

ное уравнение (3.89) с обратной последовательностью членов и положим в нем  $H_l$ , а следовательно, и

$$H_l^{(p)} = H_l + \frac{1}{E_{l,n}^{(p)}} = \infty.$$

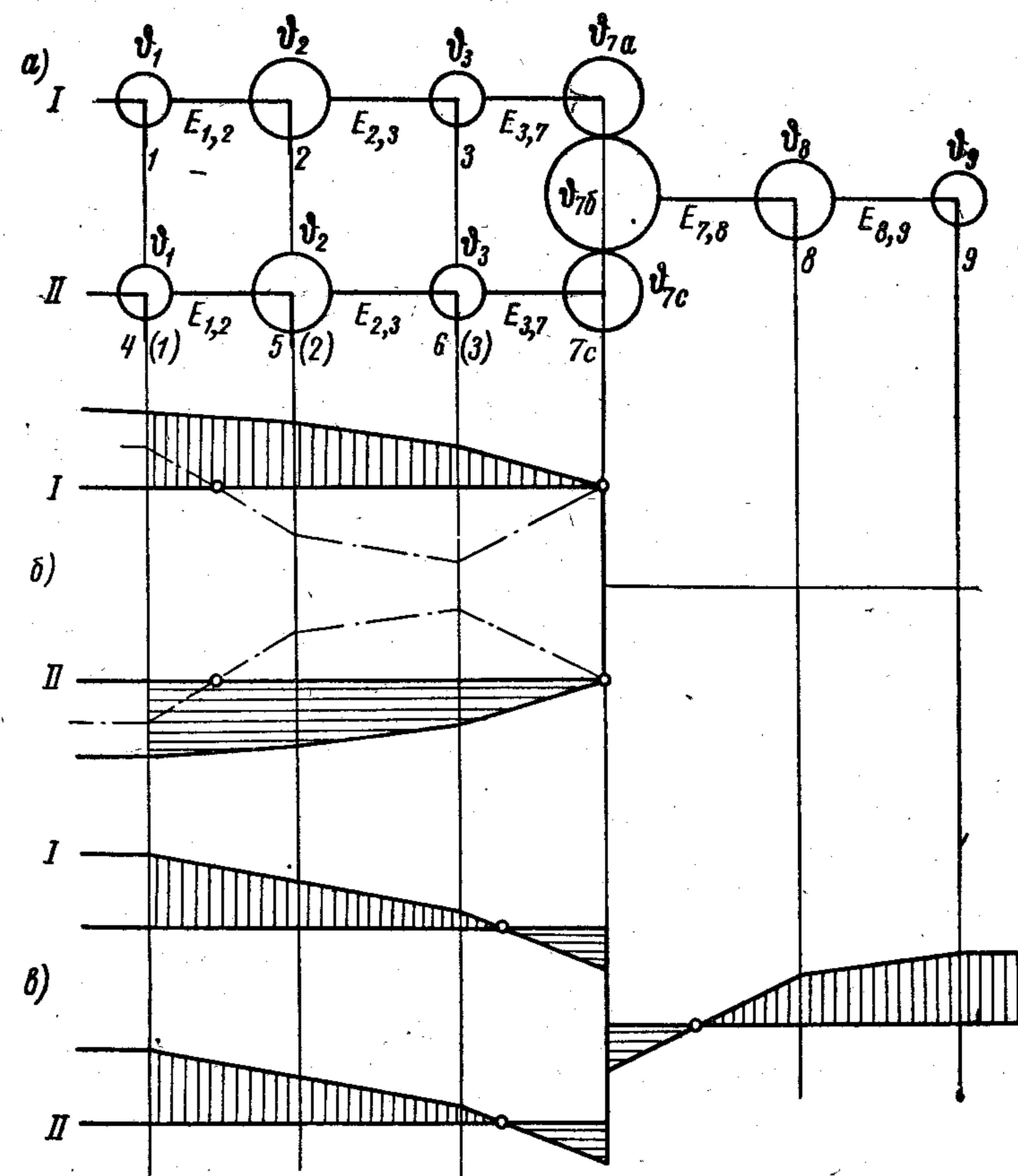


Рис. 30. Формы колебаний дизель-редукторной установки.

Тогда

$$H_z^{(1)} + \frac{1}{E_{z,l} + \frac{1}{H_l^{(p)}}} = H_z^{(1)} + \frac{1}{E_{z,l} + \frac{1}{\infty}} = H_z^{(1)} + \frac{1}{E_{z,l}} = 0.$$

Последнее выражение представляет собой частотное уравнение ответвления с заземленной последней массой. Крутильная схема такой системы изображена на рис. 29, г. Никакой трансформации элементов системы здесь не предполагается. Корни полученного



частотного уравнения являются корнями общего уравнения (3.88)

$$H_z^{(1)} + \frac{1}{E_{z,l}} = 0. \quad (3.90)$$

В колебаниях участвуют здесь только массы симметричных ответвлений. Амплитуды колебаний одноименных масс ответвлений равны и противоположны по знаку (рис. 30, б). То же характерно для амплитуд одноименных эластических моментов. Для двухмашинной дизель-редукторной установки и двухрядного двигателя возможны формы таких колебаний с узлом на массе  $l$ , т. е. одноузловая, трехузловая и др. с нечетным числом узлов. Расчет свободных колебаний производится здесь в обычной таблице Терских.

Если ответвления представляют собой одинаковые группы равных масс, то частоту свободных колебаний форм со встречным движением масс легко найти с помощью табл. II, подобрав значение

$$H_z^{(1)} = -\frac{1}{E_{z,l}}.$$

Для формы свободных колебаний с совпадающим движением масс одинаковых ответвлений приближенные значения частот находят на основании данных приведенной системы с трансформацией способами, применяемыми для обычных цепных систем.

Когда система не имеет симметричных ответвлений, она приводится к простой неразветвленной приближенно-эквивалентной путем отбрасывания ветви с меньшими массами и соответствующего увеличения той массы к которой эта ветвь присоединена. Более определенные рекомендации здесь могут быть предложены только на основании рассмотрения отдельных конкретных случаев.

Расчеты свободных колебаний более сложных симметричных систем с числом двигателей более двух рассмотрены в [56, стр. 183].

В случаях, когда расчету подвергаются дизель-редукторные установки, следует учесть соображения, изложенные в § 29.

## § 29. Особенности расчета систем с редукторами

Как уже указывалось, систему с редуктором следует привести к виду обычной цепной системы (рис. 29). При этом моменты инерции масс, расположенных после редуктора, необходимо помножить, а податливости поделить на квадрат передаточного числа редуктора. В общем случае редукторов может быть несколько. Поэтому для каждого элемента системы после редукторов редуцирование характеризуется особым передаточным числом.

Передаточное число редуктора определяется отношением числа оборотов вала после редуктора  $n_p$  к числу оборотов вала основной

части системы  $n$ . Для масс и соединений после редуктора передаточные числа выражаются зависимостями

$$i_y = \frac{n_p}{n} \text{ и } i_{y,y+1} = \frac{n_p}{n}.$$

Формулы приведения (2.02) и (2.14) приобретают вид

$$\theta_{py} = \theta_y i_y^2; \quad \vartheta_{py} = \vartheta_y i_y^2; \\ e_{py,y+1} = e_{y,y+1} i_{y,y+1}^{-2}; \quad E_{py,y+1} = E_{y,y+1} i_{y,y+1}^{-2}.$$

При наличии одного редуктора численные значения  $i_y$  и  $i_{y,y+1}$  одинаковы, но индексы в последующих расчетах сохраняются.

На основании составленной таким образом крутильной схемы расчет свободных колебаний производится так же, как для систем без редуктора. Однако полученные в таблице Терских амплитуды, если требуется найти их истинное значение (отвечающее символам, отмеченным звездочками), следует умножать, а эластические моменты поделить на  $n_p/n$ , т. е. вычислить по формулам

$$\alpha_y^* = \alpha_y i_y \text{ и } \delta_{y,y+1}^* = \delta_{y,y+1} i_{y,y+1}^{-1}. \quad (3.91)$$

Соотношение, из которого находятся безразмерные амплитуды (3.21), если индекс  $R$  опустить, для системы с редуктором перед  $k$ -й массой принимает вид

$$\frac{A_1}{\alpha_1} = \frac{A_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{A_k}{\alpha_k i_k} = \dots = \frac{A_m}{\alpha_m i_m} = \dots = \frac{A_t}{\alpha_t i_t}.$$

Действительную амплитуду колебаний массы с номером  $m$  можно найти из соотношения

$$\frac{A_m}{\alpha_m i_m} = \frac{A_k}{\alpha_k i_k} \dots A_m = \frac{i_m \alpha_m}{i_k \alpha_k} A_k,$$

а если  $\alpha_k$  принято за единицу ( $\alpha_k = 1$ ),

$$A_m = \frac{i_m \alpha_m}{i_k} A_k. \quad (3.92)$$

Действительная величина эластического момента при этом может быть найдена на тех же основаниях по формуле, полученной из (3.35) и (3.91),

$$F_{y,y+1} = \frac{\delta_{y,y+1}}{i_{y,y+1} e_0} \cdot \frac{A_k}{i_k}. \quad (3.93)$$

## § 30. Определение наиболее напряженного участка

Как уже указывалось в конце § 12, форма свободных колебаний позволяет сделать заключение о той части системы, где действуют наибольшие по абсолютной величине скручивающие моменты. Однако такого указания недостаточно, так как в этих местах валопровод может иметь большой диаметр и напряжения в нем будут



значительно меньше, чем в других соединениях (с меньшим диаметром), где действуют меньшие эластические моменты. Для выявления наиболее напряженного участка необходимо уметь устанавливать, в каком соединении имеют место наибольшие напряжения.

Обозначим индексом  $y$  номер какой-либо массы, тогда возникающее в соединении  $y, y+1$  максимальное напряжение от крутильных колебаний данной формы (амплитуда напряжений) может быть обозначено  $\tau_{y, y+1}$ .

Отношение этого напряжения к амплитуде колебаний некоторой массы носит название *масштаба напряжений*, так как оно определяет не величину напряжения, а некоторую относительную величину, пропорциональную этому напряжению.

Напряжение при скручивании  $\tau_{y, y+1}$  может быть определено отношением амплитуды эластического момента  $F_{y, y+1}$  к полярному моменту сопротивления сечения  $W_{y, y+1}$

$$\tau_{y, y+1} = \frac{F_{y, y+1}}{W_{y, y+1}} \text{ кгсм}^{-2}. \quad (3.94)$$

Если в процессе табличных вычислений за единицу принималась амплитуда свободных колебаний  $k$ -й массы ( $\alpha_k = 1$ ), то [согласно выражениям (3.35) и (3.23)] амплитудное значение эластического момента на участке  $y, y+1$  будет

$$F_{y, y+1} = \frac{\delta_{y, y+1} A_k}{e_0},$$

а действительная амплитуда колебаний некоторой, принятой произвольно массы  $m$  получит выражение

$$A_m = \alpha_m A_k. \quad (3.95)$$

При таких условиях в системе без редукторов касательные напряжения на участке  $y, y+1$  могут быть определены по формуле (3.94)

$$\tau_{y, y+1} = \frac{F_{y, y+1}}{W_{y, y+1}} = \frac{\delta_{y, y+1} A_k}{e_0 W_{y, y+1}}, \quad (3.96)$$

а масштаб напряжений будет

$$\frac{\tau_{y, y+1}}{A_m} = \frac{\delta_{y, y+1}}{e_0 W_{y, y+1} \alpha_m}. \quad (3.97)$$

Для системы с редукторами выражения принимают иной вид. Если редуктор находится до  $k$ -й массы, а амплитуда свободных колебаний этой массы принята за единицу ( $\alpha_k = 1$ ), то напряжение на участке  $y, y+1$  находим с помощью выражения (3.93)

$$\tau_{y, y+1} = \frac{F_{y, y+1}}{W_{y, y+1}} = \frac{\delta_{y, y+1} A_k}{i_{y, y+1} i_k e_0 W_{y, y+1}}.$$

Масштаб напряжений находим, поделив  $\tau_{y, y+1}$  на  $A_m$ , полученную из (3.92),

$$\frac{\tau_{y, y+1}}{A_m} = \frac{\delta_{y, y+1} A_k i_k}{i_{y, y+1} i_k e_0 W_{y, y+1} i_m \alpha_m A_k} = \frac{\delta_{y, y+1}}{a_{y, y+1} \alpha_m i_m}, \quad (3.98)$$

где величина, характерная для каждого участка, обозначена

$$a_{y, y+1} = i_{y, y+1} e_0 W_{y, y+1}. \quad (3.99)$$

Для определения наиболее напряженного участка системы над первой строкой таблицы Терских (выше символов соответствующих податливостей) записываются величины  $e_0 W_{y, y+1} \alpha_m$  — для безредукторной системы и  $a_{y, y+1} i_m \alpha_m$  — для системы с редуктором. На эти величины следует разделить найденные в 5-й строке таблицы амплитуды эластических моментов. Результат записывается в 6-й строке или над первой строкой таблицы. Тот участок, для которого масштаб напряжений оказывается наибольшим, является наиболее напряженным. Он отмечается подчеркиванием численного значения соответствующей величины.

В случаях, когда для какого-либо участка допускается пониженное (против других) напряжение, масштаб дополняется соответствующим коэффициентом. Это имеет место в таких соединениях, где наблюдается совместное действие изгиба и кручения или повышенная концентрация напряжений.

Подсчет масштаба напряжений часто позволяет установить причину аварии. Если излом вала имеет характер, свойственный усталостному разрушению, и на том участке, где он возник, устанавливается наибольший масштаб напряжений, то совокупность этих факторов указывает, что причиной аварии могли быть крутильные колебания именно этой формы.

### § 31. Расчет свободных колебаний по способу Толле

После ориентировочного определения (§ 24), последующее уточнение частоты свободных колебаний может быть выполнено способом Толле.

Перепишем систему уравнений (3.43) применительно к трехмассовой системе (при большем числе масс принцип расчета сохраняется)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1; & \delta_{2,3} &= \delta_{1,2} + H_2 \alpha_2; \\ \delta_{1,2} &= H_1 \alpha_1; & \alpha_3 &= \alpha_2 + \delta_{2,3} E_{2,3}; \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \delta_{1,2} E_{1,2}; & \delta_{3,\dots} &= \delta_{2,3} + H_3 \alpha_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.100)$$

Рассматривая эти уравнения, замечаем, что, задавшись некоторым значением  $\Delta$ , можно найти конечные значения стойкостей



масс и последовательно подсчитать численные значения величин, расположенных в левых частях всех уравнений. Если окажется, что эластический момент за последней массой равен нулю ( $\delta_3, \dots = 0$ ), то это означает, что принятое  $\Delta$  является корнем частотного уравнения и соответствует квадрату безразмерной частоты какой-либо формы свободных колебаний системы.

Указанные вычисления удобно производить в так называемой таблице Толле (табл. 6). Предварительно, в соответствии с данными системы, заполняются столбцы 1, 3, 4 и 6. В столбце 2 против индекса 1 записывается единица (безразмерная амплитуда первой массы). Дальнейшие вычисления выполняются в соответствии с алгебраическими действиями, указанными в уравнениях (3.100) в направлении стрелок, приведенных в таблице. При этом нечетные строки заполняются слева направо, а четные — справа налево. В результате заполнения всей таблицы находят эластический момент с амплитудой  $\delta_3, \dots = R$ , который следовало бы приложить к последней массе, чтобы она колебалась с принятой частотой.

Таблица 6

1	2	3	4	5	6
$y$	$a_y$	$-\partial_y \Delta$	$E_{y, y+1}$	$\delta_{y, y+1}$	$y, y+1$
1	$a_1 = 1$ $\delta_{1,2} E_{1,2}$	$-\partial_1 \Delta$ ←	→ $E_{1,2}$	$-\partial_1 \Delta a_1$ $\delta_{1,2}$	1—2
2	$a_2$ $\delta_{2,3} E_{2,3}$	$-\partial_2 \Delta$ ←	→ $E_{2,3}$	$-\partial_2 \Delta a_2$ $\delta_{2,3}$	2—3
3	$a_3$	$-\partial_3 \Delta$	→	$-\partial_3 \Delta a_3$ $R$	

Если этот остаточный момент равен нулю или его величина не превышает одного-двух процентов от расположенного над ним численного значения стойкости последней массы и число узлов, определяемое по числу перемен знака амплитуд, соответствует исследуемой форме колебаний, то корень частотного уравнения считается найденным.

В случаях, когда остаточный момент превосходит указанную величину, руководствуются следующими соображениями.

Зависимость  $R/\Delta = f(\Delta)$ , представленная на рис. 31, а, оказывается характерной для систем с любым числом масс [17]. Эта кривая всегда начинается при отрицательном значении  $R/\Delta$  и имеет столько пересечений с осью абсцисс, сколько корней свойственно

частотному уравнению, соответствующему данной системе, т. е. на единицу меньше числа масс этой системы. Каждое нулевое значение  $R/\Delta$  соответствует частоте какой-либо формы колебаний. Так как с возрастанием числа узлов частота колебаний системы увеличивается, то значения квадратов безразмерных частот располагаются здесь в возрастающем порядке (см. показанные на том же рисунке  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  и т. д.).

Обнаружив, что остаточный момент  $R_x$  в таблице Толле недопустимо велик, поступают так:

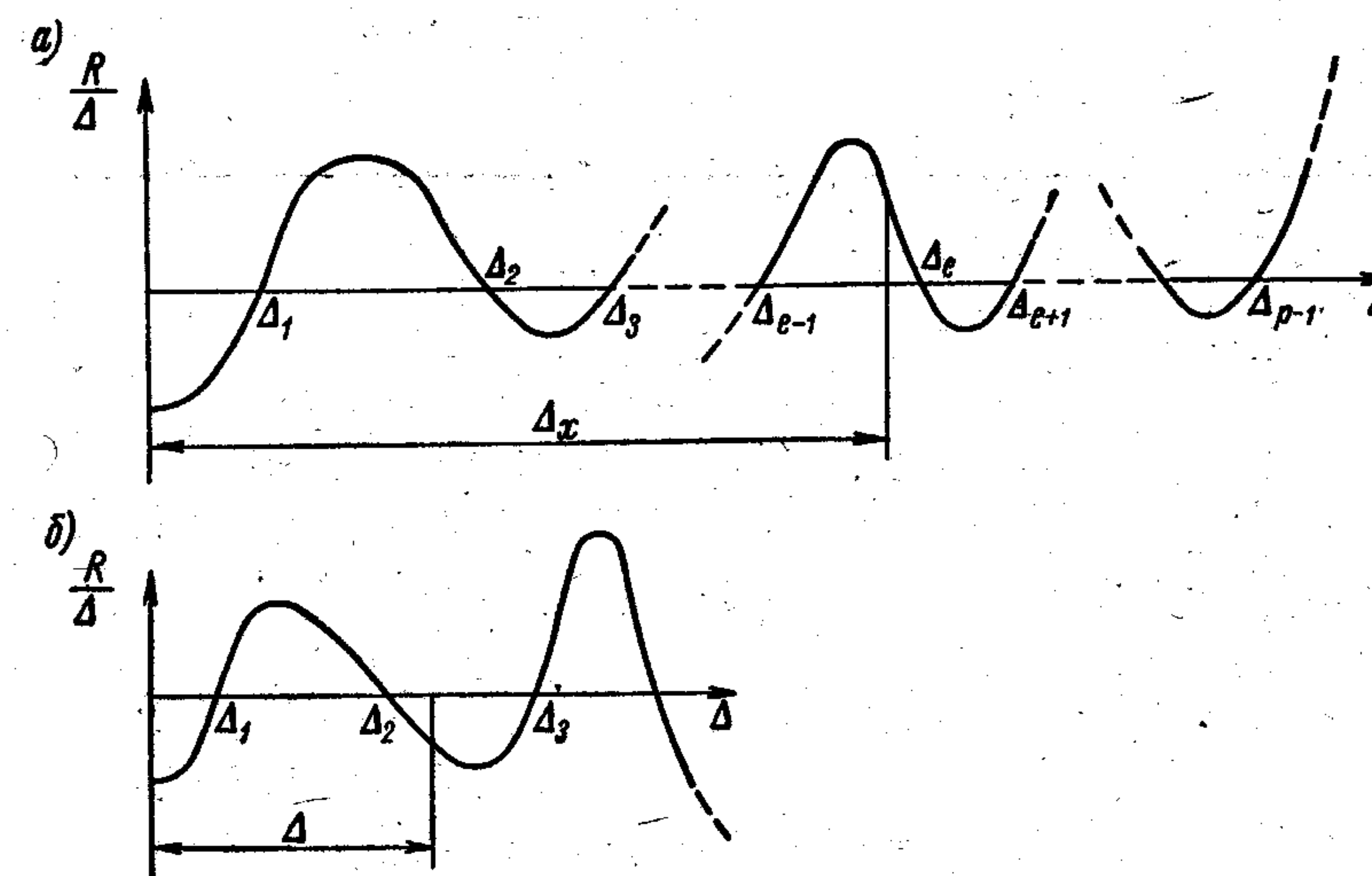


Рис. 31. Кривая остаточного момента.

— изображают (от руки) начало кривой  $R/\Delta = f(\Delta)$  и на оси абсцисс намечают точки  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{e+1}$  ( $e$  — число узлов рассчитываемой формы колебаний);

— найдя число перемен знака амплитуды ( $x$ ) во втором столбце таблицы, на кривой находят соответствующую точку  $\Delta_x$  и вблизи от нее наносят ординату  $R_x/\Delta$  (учитывая знак остаточного момента);

— после этого визуально устанавливают, как следует изменить принятое в ранее заполненной таблице значение  $\Delta$ , чтобы его величина приблизилась к  $\Delta_e$ .

На рис. 31, б показан случай, когда при расчете свободных колебаний в таблице Толле обнаружено два узла и  $R/\Delta < 0$ . Очевидно, что для уточнения  $\Delta_3$  принятое ранее значение  $\Delta$  следует увеличить, а для уточнения  $\Delta_2$  — уменьшить.

Пример подобного расчета приведен в конце главы.



### § 32. Упрощение расчета свободных колебаний по способу Толле, когда группа равных масс находится в начале системы

Если группа, состоящая из  $z$  равных масс (§ 21), расположена в начале системы, то, принимая в качестве постоянных параметры элементов этой группы, имеем

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_z = 1 \text{ и } E_{1,2} = E_{2,3} = \dots = E_{z-1,z} = 1.$$

Частотное уравнение (3.43) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1; & \delta_{2,3} &= \delta_{1,2} - \vartheta_2 \Delta \alpha_2 = -\Delta - (1 - \Delta) \Delta; \\ \delta_{1,2} &= -\vartheta_1 \Delta = -\Delta; & \alpha_3 &= \alpha_2 + \delta_{2,3} E_{2,3} = \\ & & &= 1 - \Delta - \Delta - (1 - \Delta) \Delta; \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_{1,2} E_{1,2} = 1 - \Delta; \quad \delta_{3,4} = \dots$$

Нетрудно видеть, что безразмерные амплитуды колебаний и эластических моментов в этом случае оказываются функциями только одного параметра — частоты, а потому могут быть заранее подсчитаны. Это существенно облегчает процесс уточнения частот свободных колебаний.

В табл. IV приведены значения только безразмерных амплитуд колебаний масс, так как амплитуды эластических моментов могут быть найдены по простой формуле. При  $y \leq z$  из (3.34) находим

$$\delta_{y,y+1} = \frac{\alpha_{y+1} - \alpha_y}{E_{y,y+1}} = \alpha_{y+1} - \alpha_y. \quad (3.101)$$

При уточнении корня частотного уравнения таблицу Толле для системы с группой равных масс начинают заполнять со строки, где располагается  $\delta_{z-1,z} = \alpha_z - \alpha_{z-1}$ . В ней записывается только эта величина. Поместив значение  $\alpha_z$  в следующей строке, дальнейший расчет выполняют в обычном порядке. Если при значениях  $\Delta$ , помещенных в табл. IV, остаточные моменты превосходят допустимые, то после интерполяции вычисления повторяют в обычной таблице Толле, включающей в себя все элементы системы.

Примеры подобных расчетов приведены в конце главы.

**Пример 1.** Приведение системы валопровода судовой установки, состоящей из трехцилиндрового двигателя двойного действия и гребного винта, к безразмерному виду (система упрощена).

Момент инерции масс цилиндров —  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 7440 \text{ кгсмсек}^2$ ;

момент инерции массы гребного винта —  $\theta_m = 34350 \text{ кгсмсек}^2$ ;

момент инерции присоединенной к винту воды —  $\theta_v = 0,3 \theta_m$ ;

податливость колена вала —  $e_{1,2} = e_{2,3} = 6,03 \cdot 10^{-10} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ;

податливость валопровода от середины третьей шатунной шейки вала до гребного винта —  $e_{3,4} = 114,8 \cdot 10^{-10} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$ .

1. Принимая за постоянные системы  $\theta_0 = \theta_1$  и  $e_0 = e_{1,2}$ , находим безразмерные параметры

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \frac{\theta_1}{\theta_0} = 1; \quad E_{1,2} = E_{2,3} = \frac{e_{1,2}}{e_0} = 1;$$

$$\vartheta_4 = \frac{\theta_m + 0,3\theta_m}{\theta_0} = \frac{1,3 \cdot 34350}{7440} = 6;$$

$$E_{3,4} = \frac{e_{3,4}}{e_0} = \frac{114,8 \cdot 10^{-10}}{6,03 \cdot 10^{-10}} = 19.$$

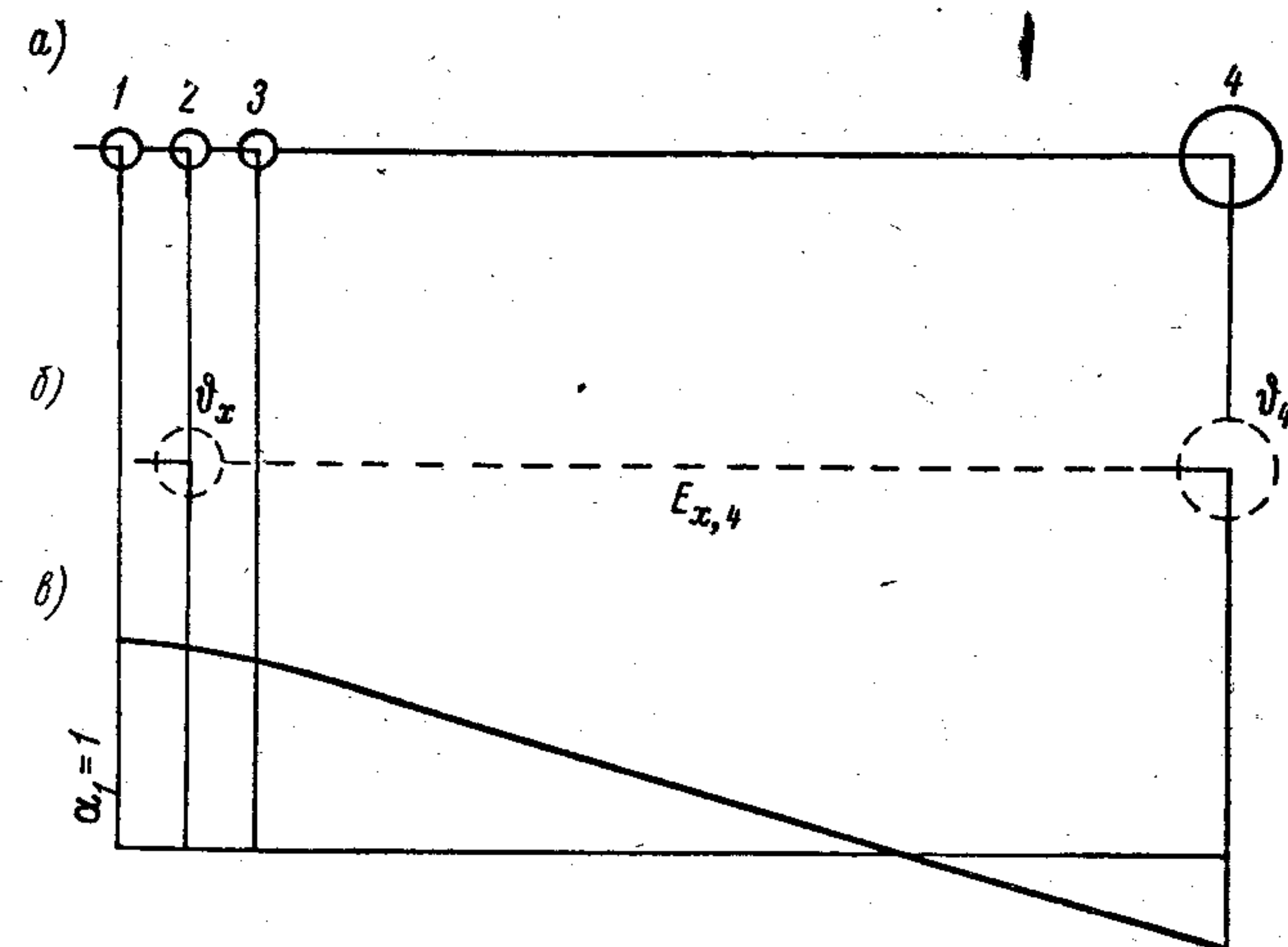


Рис. 32. К примеру 1 и 2.

2. На основании полученных данных составляем крутильную схему (рис. 32, а).

**Пример 2.** Найти частоту свободных колебаний одноузловой формы судовой установки, рассмотренной в примере 1. Построить форму колебаний (способ Терских).

1. Для предварительного определения частоты свободных колебаний системы заменим ее приближенно-эквивалентной двухмассовой системой, что при наличии большой податливости между двигателем и винтом не должно привести к большой погрешности (§ 24, случай 1). Эквивалентная система представлена на рис. 32, б.

Моменты инерции массы, заменяющей массы двигателя,

$$\vartheta_x = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 3;$$

Податливость вала между массами

$$E_{x,4} = E_{2,3} + E_{3,4} = 1 + 19 = 20.$$

2. Приближенное значение квадрата безразмерной частоты находим по формуле (3.76), которую перепишем в наших обозначениях

$$\Delta = \frac{\vartheta_x + \vartheta_4}{\vartheta_x \vartheta_4 E_{x,4}} = \frac{3 + 6}{3 \cdot 6 \cdot 20} = 0,025.$$



3. Для уточнения значения  $\Delta$  находим стойкости всех масс действительной системы при  $\Delta = 0,025$

$$H_1 = H_2 = H_3 = -\vartheta_1 \Delta = -1 \cdot 0,025 = -0,025;$$

$$H_4 = -\vartheta_4 \Delta = -6 \cdot 0,025 = -0,15.$$

и заполняем первую строку таблицы (табл. 7, а) без надлома.

Таблица 7

К примеру 2

а) 1	2	3	4
-0,025	1	-0,025	1
	-40	-0,0256	-19,8
	-39	-0,0506	-18,8
		-0,0532	-12,8
		-0,0782	6,2
			+0,011

б)

-0,026	1	-0,026	1
	-38,5	-0,0267	-19
	-37,5	-0,0527	-18
		-0,0556	-12,3
		-0,0816	6,7
			-0,007

в)

-0,256	1	-0,256	1
	-39,1	-0,0262	-19,3
	-38,1	-0,0518	-18,3
1		0,975	
	-0,0256		-0,0505
			-0,0742
		-0,0546	-12,5
		-0,0802	6,5
			+0,0004
		0,0925	
			-0,485

Выполним необходимые вычисления в соответствии с последовательностью, указанной в табл. 3.

По признаку, указанному в § 19, (т. е. по перемене знаков), устанавливаем, что в системе имеется один узел. Убедившись, что при принятом значении  $\Delta$  получается требуемая одноузловая форма колебаний, обращаем внимание на величину  $H_4^{(1)}$  (стойкость системы на последней массе, в третьей строке последнего столбца). Так как эта величина (0,011) больше 2 % стойкости последней массы  $H_4 = 0,15$ , то необходимо дальнейшее уточнение  $\Delta$ . Набросав эскиз, подобный изображенному на рис. 23, и нанеся на первую ветвь  $H_4^{(1)} = -0,011$ , убеждаемся, что значение  $\Delta$ , соответствующее корню уравнения, должно быть больше, чем ранее принятое.

Приняв  $\Delta = 0,026$ , составляем вторую таблицу (табл. 7, б), в первой строке которой стойкости масс будут уже другими.

В результате последующего вычисления находим новое значение  $H_4^{(1)} = -0,008$ , которое также не удовлетворяет частотному уравнению. Нанеся это значение на набросанный уже эскиз, убеждаемся, что значение корня должно лежать между принятыми значениями  $\Delta = 0,025$  и  $\Delta = 0,026$ . Интерполируя, находим  $\Delta = 0,0256$  (интерполяция может быть графической или аналитической). Заполняем табл. 7, в и получаем  $H_4^{(1)} = +0,0004$ , что составляет

$$\frac{0,0004}{0,1536} \cdot 100 \approx 0,25\%$$

и может быть принято как достаточно близкое приближение к истинному значению корня частотного уравнения.

4. Найдя постоянную цилиндра по формуле (3.27), получим частоту свободных колебаний одноузловой формы (3.28)

$$a = 9,55 \sqrt{\frac{1}{\theta_0 e_0}} = 9,55 \sqrt{\frac{10^{10}}{7440 \cdot 6,03}} = 4510 \text{ кол/мин.}$$

$$N = a \sqrt{\Delta} = 4510 \sqrt{0,0256} = 4510 \cdot 0,16 = 722 \text{ кол/мин.}$$

Определение безразмерных амплитуд производим в 4-й и 5-й строках, предусмотренных для этой цели в последней таблице (табл. 7, в). Положив  $\alpha_1 = 1$ , производим вычисления, соответствующие указанным в табличной схеме (табл. 3) и находим: в четвертой строке — безразмерные амплитуды колебаний, а в пятой — безразмерные эластические моменты. На основании полученных значений  $\alpha$  строим форму колебаний (рис. 32, в). Последняя еще раз подтверждает, что рассчитанная форма колебаний является одноузловой.

**Пример 3.** Найти частоты свободных колебаний одноузловой и двухузловой форм валопровода силовой установки танкера с двигателем 6Ч 35/42.

Дано:

схема валопровода, представленная на рис. 33, а;

приведенные моменты инерции масс в  $\text{кг см сек}^2$ :

кривошипно-шатунных механизмов —  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_6 = 22,2$

маховика —  $\theta_7 = 113,2$ ;

гребного винта с учетом присоединенной к нему воды —  $\theta_8 = 122$ ;

податливости соединений в  $\text{кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$

$$e_{1,2} = e_{2,3} = \dots = e_{5,6} = 3,2 \cdot 10^{-9};$$

$$e_{6,7} = 3,84 \cdot 10^{-9}; \quad e_{7,8} = 49 \cdot 10^{-9}.$$

1. В качестве постоянных системы принимаем  $\theta_0 = \theta_1$  и  $e_0 = e_{1,2}$ . Найдим безразмерные массы и податливости (рис. 33, а):

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_6 = \frac{\theta_1}{\theta_0} = 1;$$

$$\vartheta_7 = \frac{\theta_7}{\theta_0} = \frac{113,2}{22,2} = 5,1;$$

$$\vartheta_8 = \frac{\theta_8}{\theta_0} = \frac{122}{22,2} = 5,5;$$

$$E_{1,2} = E_{2,3} = \dots = E_{5,6} = \frac{e_{1,2}}{e_0} = 1;$$



$$E_{6,7} = \frac{e_{6,7}}{e_0} = \frac{3,84 \cdot 10^{-9}}{3,2 \cdot 10^{-9}} = 1,2;$$

$$E_{7,8} = \frac{e_{7,8}}{e_0} = \frac{49 \cdot 10^{-9}}{3,2 \cdot 10^{-9}} = 15,3.$$

2. Для ориентировочного определения частот свободных колебаний приводим систему к двухмассовой, заменяя все массы двигателя и маховика

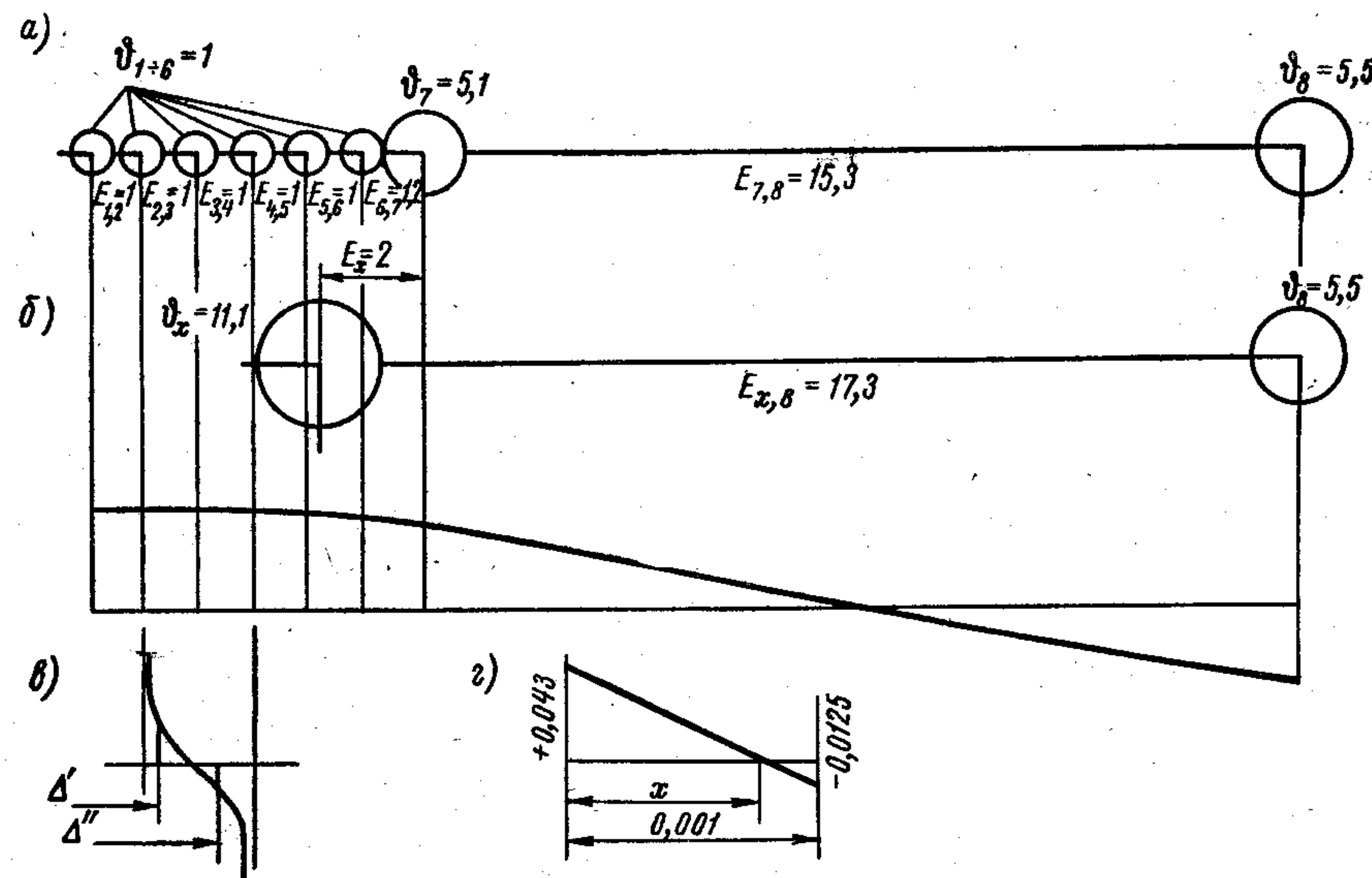


Рис. 33. К примеру 3.

одной массой  $\vartheta_x = 6\vartheta_1 + \vartheta_7 = 6 + 5,1 = 11,1$ , которая расположена на крутильной схеме на расстоянии  $E_{x,7}$  от массы  $\vartheta_7$ .  $E_{x,7}$  находим из уравнения моментов по отношению к точке приложения последней (рис. 33, б)

$$E_{x,7} = \frac{1}{\vartheta_x} (1 \cdot 1,2 + 1 \cdot 2,2 + 1 \cdot 3,2 + 1 \cdot 4,2 + 1 \cdot 5,2 + 1 \cdot 6,2) = \frac{22,2}{11,1} = 2;$$

$$E_{x,8} = E_{x,7} = E_{7,8} = 2 + 15,3 = 17,3.$$

3. Ориентировочное значение  $\Delta$  (3.76)

$$\Delta = \frac{\vartheta_x + \vartheta_8}{\vartheta_x \vartheta_8 E_{x,8}} = \frac{11,1 + 5,5}{11,1 \cdot 5,5 \cdot 17,3} = 0,0157.$$

4. Заполняем табл. 8, а при  $\Delta = 0,016$  (ближайшее значение из имеющихся в табл. II). Надлом производим на 7-й массе

$$H_1 = H_2 = \dots = H_6 = -\vartheta_1 \Delta = -1 \cdot 0,016 = -0,016;$$

$$H_7 = -\vartheta_7 \Delta = -5,1 \cdot 0,016 = -0,0816; \quad H_8 = -\vartheta_8 \Delta = -5,5 \cdot 0,016 = -0,088;$$

$$H_6^{(1)} = -0,1135 \text{ (по данным табл. II).}$$

Таблица 8

К примеру 3

а) 6	7	8
-0,016	1,2	-0,0816
	-8,81	-0,1315
-0,1135	-7,61	0,256
		+3,9
		+0,043
б) 6	7	8
-0,017	1,2	-0,0865
	-8,19	-0,143
-0,1221	-6,99	0,217
		4,6
		-0,0125
в) 6	7	8
-0,11	1,2	-0,561
	0,858	0,485
+1,166y	2,058	0,0733
		13,65
		-0,023

Стойкость всей системы  $H_7^{(1)(8)} = +0,043$  находим в столбце с надломом, что составляет

$$\delta = \frac{H_7^{(1)(8)}}{H_7} \cdot 100 = \frac{0,043}{0,0816} \cdot 100 = 50\%.$$

5. Убедившись, что в системе только один узел колебаний (в соединении 7—8) на основании эскиза (рис. 33, в) устанавливаем необходимость увеличения  $\Delta$ . Принимая ближайшее значение  $\Delta = 0,017$  из табл. II, находим  $H_6^{(1)} = -0,1221$ . Пересчитываем значения стойкостей масс и заполняем табл. 8, б. Стойкость системы  $H_7^{(1)} = -0,0125$  получена при сохранении одноузловой формы.

6. Точное значение  $\Delta_1$  одноузловой формы колебаний находим интерполяцией

$$\frac{x}{0,001 - x} = \frac{0,043}{0,0125}; \quad \frac{x}{0,001} = \frac{0,043}{0,0555}; \quad x = 0,0008;$$

$$\Delta_1 = \Delta + x = 0,016 + 0,0008 = 0,0168.$$

В таблице без «надлома» (здесь не приводится) устанавливаем, что эта величина удовлетворяет корню уравнения.

7. Постоянная цилиндра и точное значение частоты свободных колебаний одноузловой формы (3.27), (3.28)

$$a = 9,55 \sqrt{\frac{1}{\vartheta_0 e_0}} = 9,55 \sqrt{\frac{10^{-9}}{22,2 \cdot 3,2}} = 11350 \text{ кол/мин};$$

$$N = a \sqrt{\Delta} = 11350 \sqrt{0,0168} = 11350 \cdot 0,1296 = 1470 \text{ кол/мин}.$$



$$\Delta_2 \approx \Delta_1^* = 0,11.$$

a)

Diagram showing a transmission line with a series of shunt loads and a shunt capacitor at the receiving end. The line is represented by a horizontal line with a series of shunt loads (circles) and a shunt capacitor (circle) at the receiving end. The line is labeled with  $\vartheta_y = 0,5$  and  $E_{y,y+1} = 0,4$ . The receiving end is labeled with  $\vartheta_8 = 54$  and  $g$ .

b)

Diagram showing a transmission line with a series of shunt loads and a shunt capacitor at the receiving end. The line is represented by a horizontal line with a series of shunt loads (circles) and a shunt capacitor (circle) at the receiving end. The line is labeled with  $H_2^2 = -0,0493$  and  $H_7^2 = 0,0493$ . The receiving end is labeled with  $H_8 = -0,864$  and  $E_{7,8} = g$ . The distance between the shunt loads is labeled  $E_{2,7}^3 = 4,69$ .

в § 19, что отмечается символом «у» при значении  $H_6^{(1)}$ ). Точность расчета частоты признаем удовлетворительной, так как  $\delta \approx 0,6\%$ .

$$N_2 = a \sqrt{\Delta_2} = 11350 \sqrt{0,11} = 11350 \cdot 0,332 = 3770 \text{ кол./мин.}$$

Двигатель заменяем двумя эквивалентными массами, связанными инертным соединением. Стойкости этих масс  $N_2^3 = N_7^3 = -0,0493$  и податливость соединения  $E_{1,6}^3 = 4,69$  находим с помощью табл. III (приложение), аналитически они вычислены также в § 26. Система принимает вид, изображенный на рис. 34, б. Для уточнения  $\Delta$  составляем табл. 9, состоящую из семи столбцов (без надлома).

**Таблица 9.**

### К примеру 4

Стоимость всей системы определяется  $N_8^{(1)} = -0,002 \approx 0$ . Следовательно, точное значение  $\Delta$  не отличается от принятого ориентировочно.

a)  $y = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$   
 $\bar{y} = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2$   
 $E = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 16$   
 $E_{x,9} = 4,8$   
 $E_{x,10} = 22,8$   
 $\bar{y}_H = 4$   
 $\bar{y}_{10} = 11,75$   
 $18,00$

b)  $\bar{y}_x = 10$   
 $E_{x,10} = 22,8$   
 $\bar{y}_H = 11,75$

c)  $H_9^{(m)}$   
 $H_9$   
 $H_{10}$   
 $H_H$

**Пример 5.** Определение частоты свободных колебаний одноузловой формы валопровода судовой установки с дизелем, снабженным ротативной воздушной дувкой (разветвленная система).

1. Ориентировочное значение  $\Delta$  находим для приближенно-эквивалентной двухмассовой системы, представленной на рис. 35, б. Массу  $\vartheta_{11}$  не учитываем, так как она связана с системой весьма большой податливостью.

$$\vartheta_x = \sum_{v=1}^9 \vartheta_y = 8 + 2 = 10; \quad E_{x,10} = E_{x,9} + E_{9,10} = 4,8 + 18 = 22,8;$$

$$\Delta = \frac{g_x + g_{10}}{g_x g_{10} E_{x, 10}} = \frac{10 + 11,7}{10 \cdot 11,7 \cdot 22,8} = 0,0085.$$

$$H_9^{(1)(10)(11)} = H_9 + \frac{1}{E_{9,11}^{(11)}} + \frac{1}{E_{8,9}^{(1)}} + \frac{1}{E_{9,10}^{(10)}} = H_9^{(11)} + \frac{1}{E_{8,9} + \frac{1}{H_8^{(1)}}} + \frac{1}{E_{9,10} + \frac{1}{H_{10}}} = 0.$$



Стойкость упругой массы  $H_8^{(1)}$  находим при  $\Delta = 0,008$  из табл. II. Стойкость упругой массы  $H_9^{(1)}$  с ответвлением вычисляем в табл. 10. Там же, в правой части таблицы производим дальнейший расчет, в результате которого устанавливается, что  $\Delta$  достаточно близко к корню частотного уравнения.

Таблица 10

К примеру 5

9	11	8	9	10
-0,012	23,8	-0,008	1,6	-0,0489
	-83,3	-0,0489	18	-0,094
	-59,5	-0,0169	-13,3	-0,0855
		-0,0489	-10,6	
			7,4	0,0006

**Пример 6.** Найти частоту свободных колебаний одноузловой формы системы, заданной в примере 1 способом Толле.

Безразмерные параметры рассматриваемой установки найдены при постоянных системы  $\theta_0 = 7740 \text{ кгсмсек}^2$  и  $e_0' = 6,03 \cdot 10^{-10} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$ :

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 1; \quad \vartheta_4 = 6; \quad E_{1,2} = E_{2,3} = 1; \quad E_{3,4} = 19.$$

Ориентировочное значение квадрата частоты свободных колебаний найдено в примере 2  $\Delta' = 0,025$ . Там же подсчитаны стойкости масс системы  $H_1 = H_2 = H_3 = -\vartheta_1 \Delta' = -0,025$  и  $H_4 = -0,15$ .

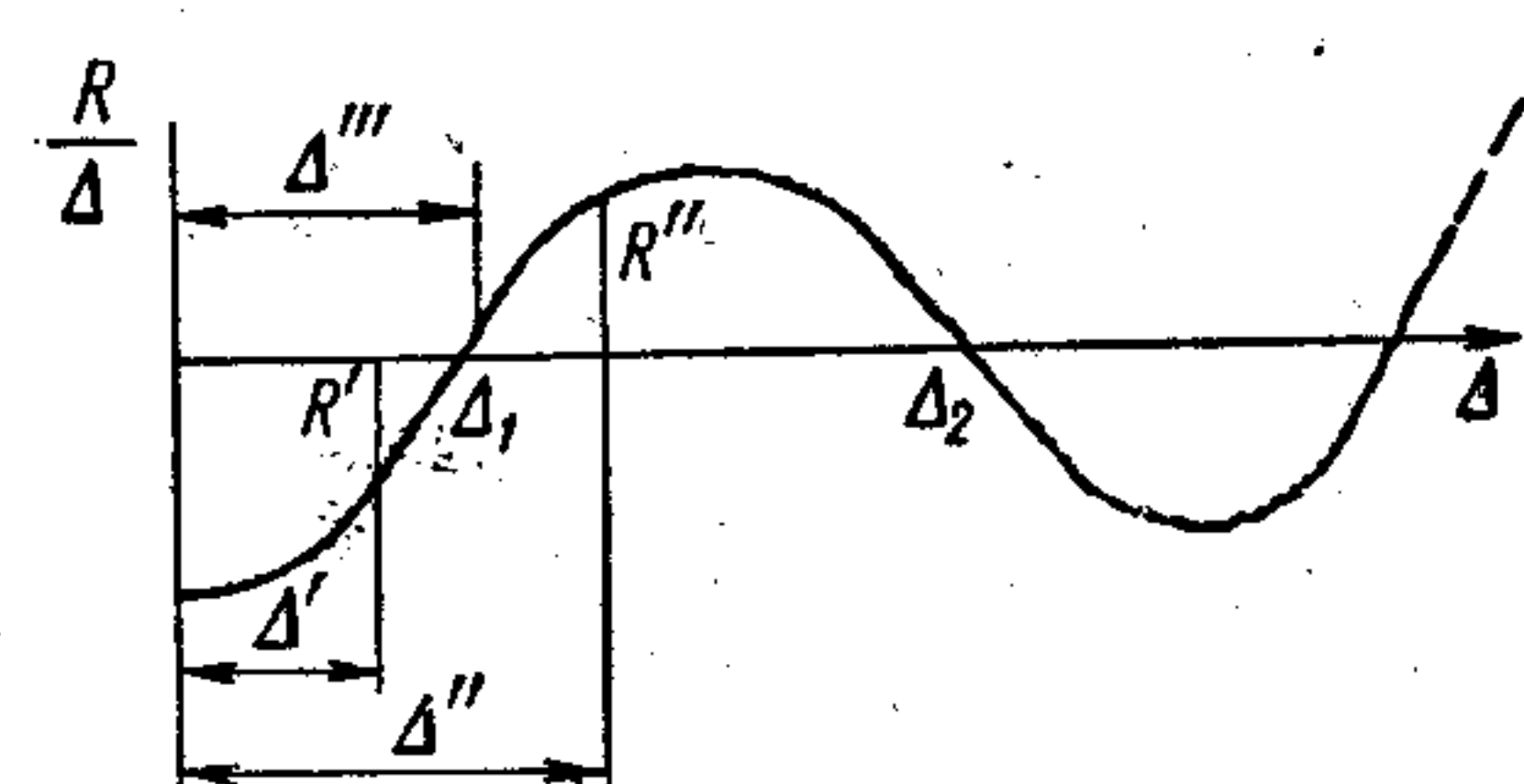


Рис. 36. К примеру 6.

Составим таблицу Толле, как описано в § 31 (табл. 11, а), производим в ней необходимые вычисления и получаем остаточный момент  $R' = -0,0047$ . Изобразив от руки кривую остаточного момента (рис. 36), приходим к заключению, что принятое значение  $\Delta$  следует увеличить. Задав  $\Delta'' = 0,026$ , после соответствующих вычислений, находим

остаточный момент  $R'' = +0,042$  (расчетной таблицы здесь не приводится).

По числу перемен знака  $\alpha$  устанавливаем, что в обоих случаях рассчитана одноузловая форма колебаний. Так как абсолютная величина остаточных моментов почти одинакова, но знаки их различны, третью таблицу (табл. 11, б) заполняем при среднем значении  $\Delta''' = 0,0255$ . Стойкости масс системы здесь:

$$H_1 = H_2 = H_3 = -\vartheta_1 \Delta''' = -0,0255 \text{ и } H_4 = -\vartheta_4 \Delta''' = -0,0255 \cdot 6 = -0,153.$$

После вычислений в этой таблице убеждаемся, что остаточный момент  $R = -0,0005$  достаточно мал

$$\frac{R \cdot 100}{\delta_{3,4}} = \frac{0,0005 \cdot 100}{0,0739} < 1\%.$$

Воспользовавшись значением постоянной цилиндра, найденной в примере 2, определяем число колебаний в минуту (3.28)

$$N = a \sqrt{\Delta'''} = 4510 \sqrt{0,0255} \approx 4510 \cdot 0,16 = 722 \text{ кол/мин.}$$

Форма колебаний представлена на рис. 32 по данным таблицы.

а)

$$\Delta' = 0,025$$

y	$\alpha_y$	$H_y = -\vartheta_y \Delta'$	$E_{y, y+1}$	$\delta_{y, y+1}$	y, y + 1
1	1	-0,025	→	-0,0250	1—2
	-0,0250	←	1	-0,0250	
2	0,9750	-0,0250	→	-0,0244	2—3
	-0,0494	←	1	-0,0494	
3	0,9256	-0,0250	→	-0,0231	3—4
	-1,3775	←	19	-0,0725	
4	-0,4519	-0,15	→	+0,0678	
				$R' = -0,0047$	

б)

$$\Delta''' = 0,0255$$

y	$\alpha_y$	$H_y = -\vartheta_y \Delta'''$	$E_{y, y+1}$	$\delta_{y, y+1}$	y, y + 1
1	1	-0,0255	→	-0,0255	1—2
	-0,0255	←	1	-0,0255	
2	0,9745	-0,0255	→	-0,0248	2—3
	-0,0503	←	1	-0,0503	
3	0,9242	-0,0255	→	-0,0236	3—4
	-1,4041	←	19	-0,0739	
4	-0,4799	-0,153	→	-0,0734	
				$R''' = -0,0005$	

**Пример 7.** Найти частоту свободных колебаний одноузловой формы установки, заданной в примере 3, если вместо шестицилиндрового в ней принят семицилиндровый двигатель той же модели.

Расчет выполняем способом Толле. Безразмерные параметры найдены в примере 3 (где постоянные  $e_0 = 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ;  $\theta_0 = 22,2 \text{ кгсмсек}^2$ ):

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_7 = 1; \quad \vartheta_8 = 5,1; \quad \vartheta_9 = 5,5;$$

$$E_{1,2} = E_{2,3} = \dots = E_{6,7} = 1; \quad E_{7,8} = 1,2; \quad E_{8,9} = 15,3.$$

Заменив данную систему двухмассовой, находим (как в примере 3) ориентировочное значение квадрата безразмерной частоты  $\Delta = 0,015$ .

Для первого приближения принимаем  $\Delta = 0,016$  и находим стойкости масс системы:  $H_1 = H_2 = \dots = H_7 = -0,016$ ;  $H_8 = -0,0816$ ;  $H_9 = -0,088$ .



Заполняем табл. 12, а данными системы и выполняем необходимые вычисления. Учитывая, что в начале системы расположена группа равных масс, воспользуемся упрощением расчета, рекомендованным в § 32. При этом безразмерные амплитуды заимствуем из табл. IV, а амплитуду эlastического момента подсчитываем по формуле (3.101):

$$\alpha_6 = 0,766; \quad \alpha_7 = 0,682; \quad \delta_{6,7} = \alpha_7 - \alpha_6 = 0,682 - 0,766 = -0,076.$$

Таблица 12

а)  $\Delta' = 0,016$

$y$	$\alpha_y$	$H_y = -\delta_y \Delta'$	$E_{y, y+1}$	$\delta_{y, y+1}$	$y, y+1$
6	0,768				
	-0,0760	←	1	-0,076	6—7
7	0,6820	-0,016	→	-0,0109	
	-0,1042	←	1,2	-0,0869	7—8
8	0,5778	-0,0816	→	-0,0471	
	-2,0500	←	15,3	-0,1340	8—9
9	-1,4722	-0,088	→	+0,1295	
				$R' = -0,0045$	

б)  $\Delta'' = 0,017$

$y$	$\alpha_y$	$H_y = -\delta_y \Delta''$	$E_{y, y+1}$	$\delta_{y, y+1}$	$y, y+1$
6	0,7545				
	-0,0910	←	1	-0,0910	6—7
7	0,6635	-0,017	→	-0,0113	
	-0,1228	←	1,2	-0,1023	7—8
8	0,5407	-0,0865	→	-0,0468	
	-2,2843	←	15,3	-0,1491	8—9
9	-1,7436	-0,0935	→	+0,1630	
				$R'' = +0,0139$	

Записав эти величины в табл. 12, а (пояснения даны в § 32), выполняем последующие вычисления и находим остаточный момент  $R' = -0,0045$ . Отложив  $R'$  на графике вида 31, заключаем о необходимости увеличить значение  $\Delta$ . Примем  $\Delta'' = 0,017$ . Безразмерные амплитуды масс находим с помощью табл. IV посредством интерполяции

$$\alpha_6 = 0,7545; \quad \alpha_7 = 0,6635; \quad \delta_{6,7} = \alpha_7 - \alpha_6 = -0,0910.$$

Повторный расчет выполняем в табл. 12, б. Находим  $R'' = +0,0139$ .

С помощью интерполяции определяем значение  $\Delta$  для третьего приближения  $\Delta''' = 0,01625$ . Оно обусловливает достаточно близкое к нулю значение остаточного момента. Соответствующий расчет в таблице, составленной для всей системы (без использования приведенного упрощения), предоставляется осуществить с помощью логарифмической линейки  $L=500$  мм или арифмометра.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

### § 33. Уравнение вынужденных колебаний

Вынужденными называются такие незатухающие крутильные колебания системы, которые устанавливаются в результате непрерывного воздействия периодически изменяющихся моментов.

Рассмотрим простейший случай вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. В качестве такой системы примем крутильный маятник, полагая, что все его точки могут перемещаться только по дугам окружностей вокруг неподвижной оси.

Допустим, что данный маятник можно рассматривать как дискретную систему (см. допущения а и б в § 2.) На нее действуют и в ней возникают:

$M^* = M \sin \omega t$  — гармонический возмущающий момент;

$U = -\varphi/e$  — эlastический момент, пропорциональный перемещению массы  $\varphi$ ;

$M_c = -B\varphi'$  — момент сил сопротивления, пропорциональный скорости колебаний  $\varphi'$ ;

$M_\pi = -\theta\varphi''$  — инерционный момент, зависящий от ускорения массы  $\varphi''$ .

Момент сил сопротивления принят пропорциональным скорости колебаний потому, что это соответствует большей части сопротивлений, рассматриваемых в данном курсе. Если этот момент находится в иной зависимости от  $\varphi$ , то последующее решение существенно меняется.

Для некоторого упрощения последующих выводов возмущающий момент принят с начальной фазой равной нулю. Все моменты, помещенные в левой части уравнения, имеют знак, обратный знаку возмущающего момента.

Перечисленные моменты представим приложенными к диску маятника, как это условно показано на рис. 37.

Дифференциальное уравнение движения диска составим суммируя эти моменты

$$\theta\varphi'' + B\varphi' + \frac{\varphi}{e} = M \sin \omega t. \quad (4.01)$$

Выполняя обычные преобразования полученного неоднородного дифференциального уравнения со свободным членом в правой



части, обозначим коэффициенты новыми символами

$$\varphi'' + \frac{B}{\theta} \varphi' + \frac{1}{\theta e} \varphi = \frac{M}{\theta} \sin \omega t;$$

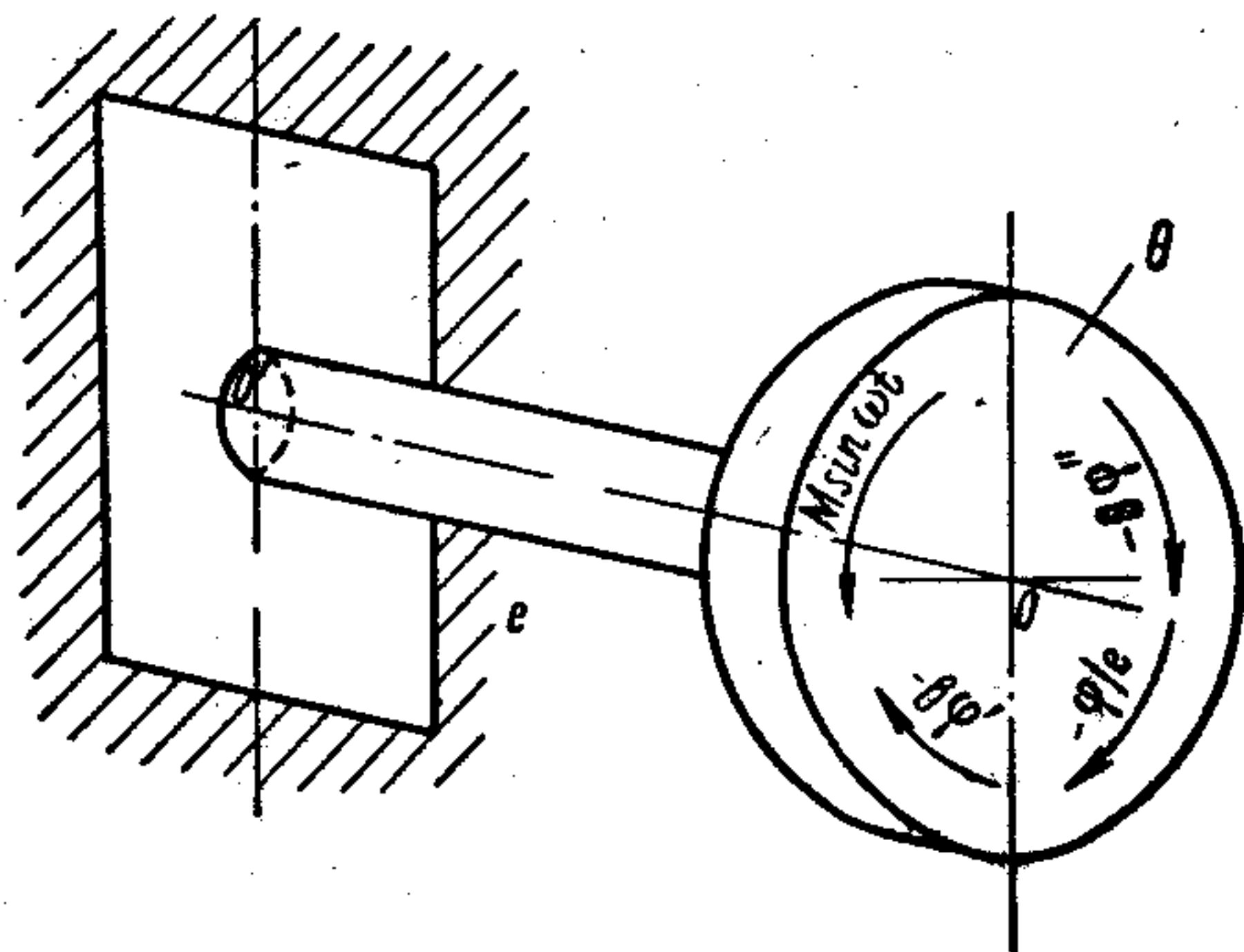
$$\varphi'' + 2n\varphi' + \omega_e^2 \varphi = h \sin \omega t, \quad (4.02)$$

где  $2n = B/\theta$  — коэффициент затухания;

$\omega_e^2 = 1/\theta e$  — квадрат частоты свободных колебаний той же системы без учета демпфирования (см. § 2);

$h = M/\theta$  — коэффициент амплитуды возмущающего момента.

Общий интеграл (4.03) этого уравнения состоит из общего интеграла однородного дифференциального уравнения  $\varphi'' + 2n\varphi' + \omega_e^2 \varphi = 0$  [66, стр. 41] и частного решения, которое будем искать в виде гармонической функции



$$\varphi = e^{-nt} A_1 \sin(\sqrt{\omega_e^2 - n^2} t + \psi) + A \sin(\omega t - \varepsilon), \quad (4.03)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Первый член правой части общего интеграла представлен здесь для случая малого трения, т. е. когда  $n < \omega_e$ . Этот член

описывает колебательный процесс, на который трение ( $n$ ) оказывает существенное влияние, сказывающееся прежде всего в том, что его амплитуда  $A_1 e^{-nt}$  с течением времени быстро уменьшается. Не останавливаясь на этом кратковременном процессе, представляющем собой затухающие колебания, рассмотрим установившееся движение

$$\varphi = A \sin(\omega t - \varepsilon) \quad (4.04)$$

и найдем значения постоянных  $A$  и  $\varepsilon$ , т. е. амплитуду и начальную фазу вынужденных колебаний. Подставляя производные  $\varphi$  в уравнение (4.02), последовательно находим

$$\varphi = A \sin(\omega t - \varepsilon); \quad \varphi' = A\omega \cos(\omega t - \varepsilon); \quad \varphi'' = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon);$$

$$\varphi'' + 2n\varphi' + \omega_e^2 \varphi = h \sin \omega t; \quad (4.05)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon) + 2nA\omega \cos(\omega t - \varepsilon) + A\omega_e^2 \sin(\omega t - \varepsilon) = h \sin \omega t;$$

$$(\omega_e^2 - \omega^2) A \sin(\omega t - \varepsilon) + 2nA\omega \cos(\omega t - \varepsilon) = h \sin \omega t.$$

Полученное тождество справедливо при любом значении  $\omega t$ , поэтому, полагая  $\omega t = 0$  и  $\omega t = 90^\circ$ , находим

$$-(\omega_e^2 - \omega^2) A \sin \varepsilon + 2nA\omega \cos \varepsilon = 0;$$

$$(\omega_e^2 - \omega^2) A \cos \varepsilon + 2nA\omega \sin \varepsilon = h.$$

Поделив эти выражения на  $\omega_e^2$ , выразим их через новые коэффициенты

$\delta = n/\omega_e$  — безразмерный коэффициент рассеивания энергии,

$\lambda = \omega/\omega_e$  — отношение частоты возмущающего момента к частоте свободных колебаний

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right) A \sin \varepsilon - \frac{2n}{\omega_e} \cdot \frac{\omega}{\omega_e} A \cos \varepsilon = 0;$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right) A \cos \varepsilon + \frac{2n}{\omega_e} \cdot \frac{\omega}{\omega_e} A \sin \varepsilon = \frac{h}{\omega_e^2};$$

$$(1 - \lambda^2) A \sin \varepsilon - 2\delta\lambda A \cos \varepsilon = 0;$$

$$(1 - \lambda^2) A \cos \varepsilon + 2\delta\lambda A \sin \varepsilon = A_{ст}. \quad (4.06)$$

Физический смысл величины  $A_{ст}$  раскроем на основании (4.02)

$$A_{ст} = \frac{h}{\omega_e^2} = \frac{M}{\theta} \cdot \frac{\theta e}{1} = Me = \varphi.$$

Очевидно, что она представляет собой угловое отклонение массы под действием постоянного момента, равного амплитудному значению возмущающего момента, а поэтому называется статистической амплитудой ( $A_{ст} = \text{const}$ ).

Начальную фазу вынужденных колебаний найдем из первого выражения (4.06)

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{2\delta\lambda}{1 - \lambda^2}. \quad (4.07)$$

Амплитуду вынужденных колебаний получим суммируя квадраты тех же выражений (4.06)

$$(1 - \lambda^2) A^2 + 4\delta^2 \lambda^2 A^2 = A_{ст}^2 \dots A = \frac{A_{ст}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\delta^2 \lambda^2}}. \quad (4.08)$$

Таким образом, вынужденные колебания системы описываются зависимостью

$$\varphi = A \sin(\omega t - \varepsilon).$$



Этим колебаниям свойственны неизменяющиеся со временем амплитуда и начальная фаза, поэтому они являются незатухающими, несмотря на наличие сопротивления. Частота вынужденных колебаний совпадает с частотой возбуждающего их гармонического возмущающего момента.

### § 34. Фазы вынужденных колебаний

Фаза вынужденных колебаний, как видно из формулы (4.03), всегда отстает от фазы возмущающего момента на угол  $\varepsilon$ , называемый *углом сдвига фаз*. Исследуя, в каких пределах он изменяется, рассмотрим три возможных случая, которые анализируются на основании (4.07):

Случай 1:	Случай 2:	Случай 3:
$\lambda < 1;$	$\lambda = 1;$	$\lambda > 1;$
$\omega < \omega_e;$	$\omega = \omega_e;$	$\omega > \omega_e;$
$\operatorname{tg} \varepsilon > 0;$	$\operatorname{tg} \varepsilon = \infty;$	$\operatorname{tg} \varepsilon < 0;$
$0 < \varepsilon < 90^\circ.$	$\varepsilon = 90^\circ.$	$90^\circ < \varepsilon < 180^\circ.$

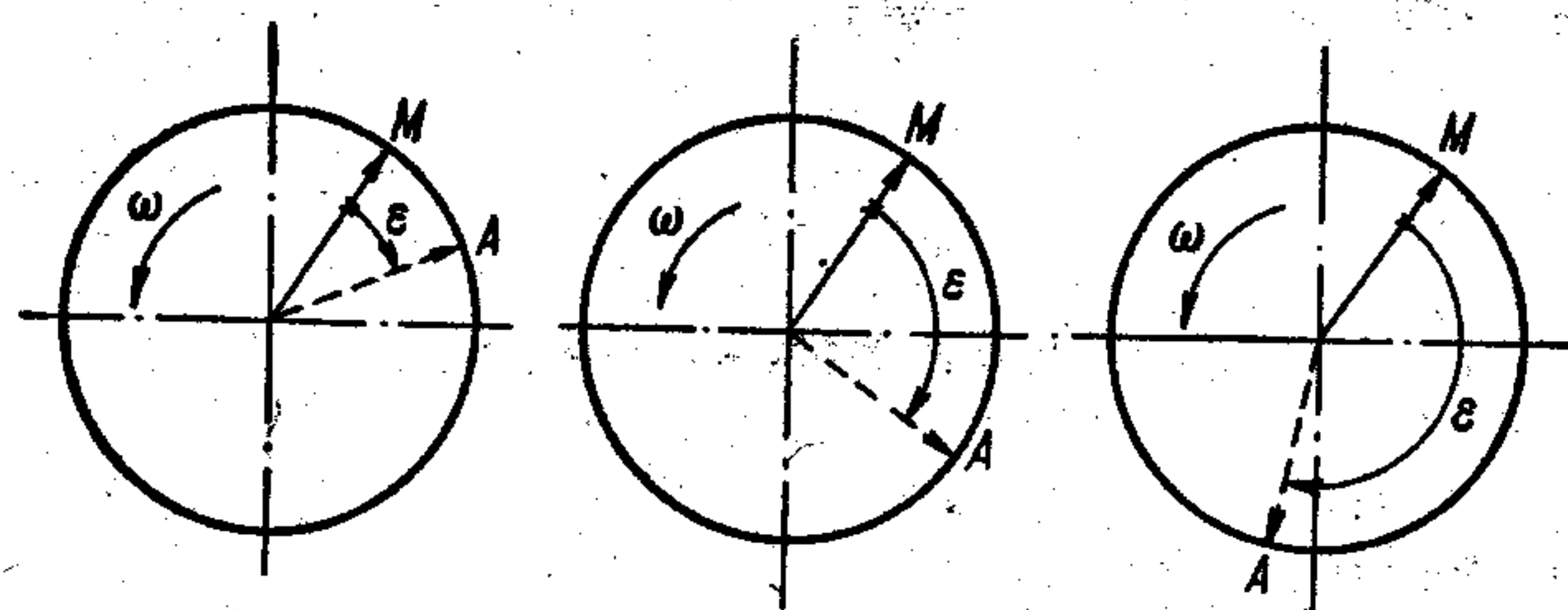


Рис. 38. Сдвиг фаз колебаний.

Эти случаи иллюстрируются рис. 38, на котором вектор момента  $M$  представлен в одинаковом положении, а вектор колебания  $A$  показан отстающим от него на угол сдвига фаз. Случай 2 соответствует резонансу. Частоты свободных и вынужденных колебаний здесь совпадают, а угол сдвига фаз устанавливается равным  $90^\circ$ , что, как это будет показано ниже, соответствует максимальной передаче системе работы возмущающего момента.

При отсутствии сопротивлений (теоретический случай), [66, стр. 65], угол сдвига фаз на всем дорезонансном диапазоне ( $\omega < \omega_e$ ) равен нулю, при резонансе равен  $90^\circ$ , а в послерезонансной зоне ( $\omega > \omega_e$ ) равен  $180^\circ$ . На основании этих сведений построен график б на рис. 39, при различных значениях  $\delta$ .

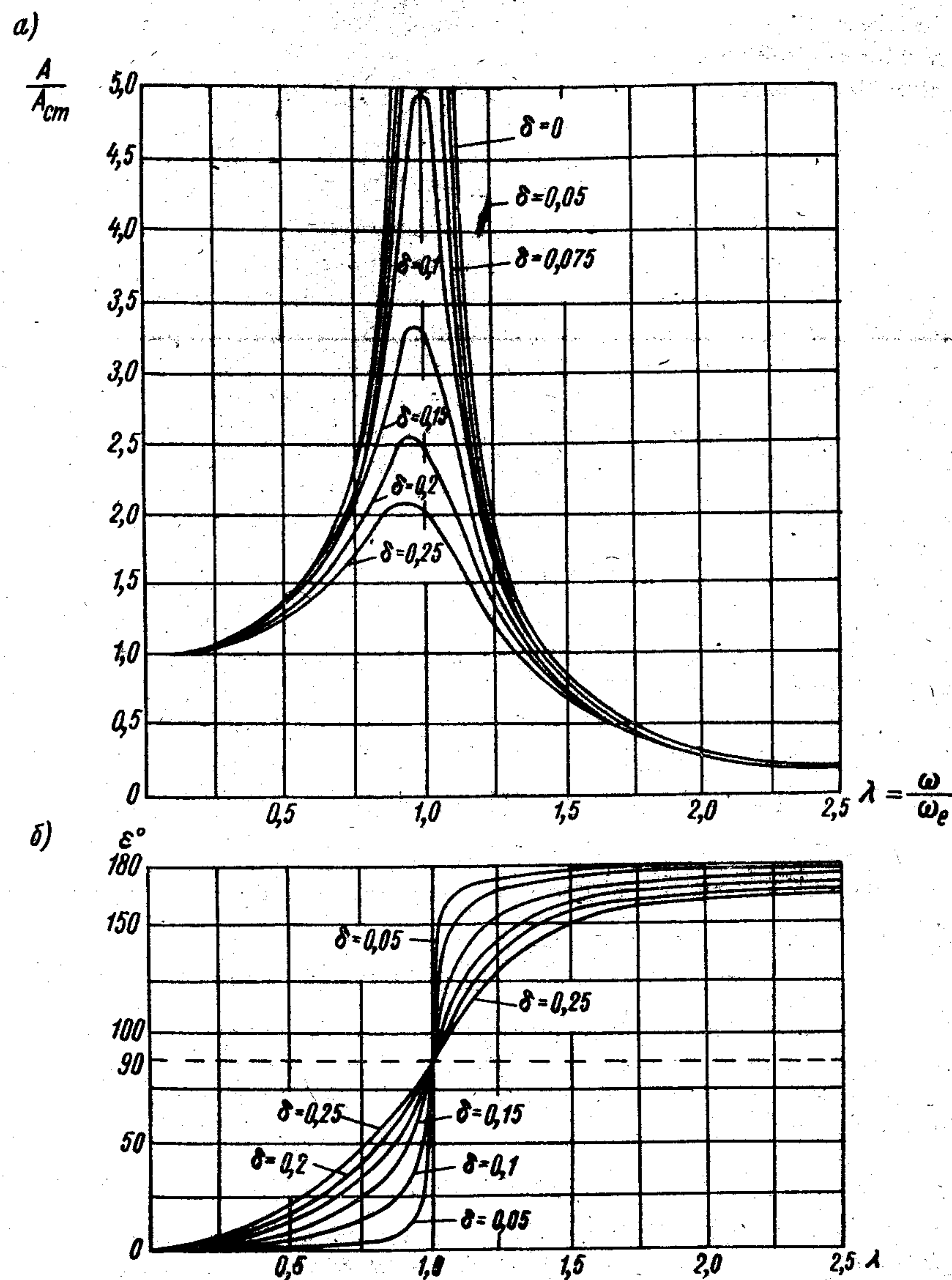


Рис. 39. Амплитуды (а) и фазы (б) вынужденных колебаний.



### § 35. Амплитуды вынужденных колебаний

Амплитуды вынужденных колебаний исследуются на базе зависимости (4.08), которую целесообразно представить в виде отношения действительной амплитуды колебаний к статической амплитуде, называемого *коэффициентом динамичности*  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{A}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\delta^2\lambda^2}}; \quad A = \beta A_{ст}. \quad (4.09)$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 39, а.

Независимо от величины сопротивлений при  $\omega \approx 0$  (или, когда частота вынужденных колебаний близка к нулю), амплитуда колебаний не отличается от статической ( $A_{ст}$ ). При возрастании частоты вынужденных колебаний (или, что то же — возрастании частоты возмущающего момента) амплитуда вынужденных колебаний растет и при отсутствии сопротивлений ( $\delta = 0$ ), по мере приближения к резонансу, стремится к бесконечности [66, стр. 52], а затем в послерезонансной зоне постепенно уменьшается, стремясь к нулю (рис. 39, а). При наличии сопротивлений резонансная амплитуда вынужденных колебаний уже не будет достигать бесконечности. Ее максимальная величина тем меньше, чем больше коэффициент рассеивания энергии  $\delta$ .

Из того же рисунка можно заметить, что максимум амплитуды вынужденных колебаний достигается не точно при резонансе, а в дорезонансной зоне. Это можно показать, найдя минимум подкоренного выражения (4.09) при  $\lambda = \text{var}$ ,  $\delta = \text{const}$ .

$$[(1 - \lambda^2)^2 + 4\delta^2\lambda^2]' = [1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 4\delta^2\lambda^2]' = -4\lambda + 4\lambda^3 + 8\delta^2\lambda^2 = 0,$$

откуда получаем, что в данном случае максимум амплитуды имеет место при

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_e} = \sqrt{1 - 2\delta^2} < 1; \quad \text{т. е. при } \omega < \omega_e. \quad (4.10)$$

Таким образом, сопротивление здесь уменьшает резонансную амплитуду, сдвигает ее максимальное значение в дорезонансную зону и вызывает отставание фазы колебания от фазы возмущающего момента.

### § 36. Особенности вынужденных колебаний одномассовой системы

Подставим в дифференциальное уравнение (4.01) его частное решение  $\varphi = A \sin(\omega t - \varepsilon)$  и умножим все члены на  $-1$

$$\begin{aligned} \theta\varphi'' + B\varphi' + \frac{\varphi}{e} - M \sin \omega t &= 0; \\ \theta A\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon) - BA\omega \cos(\omega t - \varepsilon) - \frac{A}{e} \sin(\omega t - \varepsilon) + M \sin \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для удобства построения векторной интерпретации приведем это уравнение к виду, содержащему только синусы аргумента. Для этого преобразуем второй и третий его члены

$$\begin{aligned} -BA\omega \cos(\omega t - \varepsilon) &= -BA \sin[90^\circ - (\omega t - \varepsilon)] = \\ &= BA\omega \sin[(\omega t - \varepsilon) - 90^\circ]; \\ -\frac{A}{e} \sin(\omega t - \varepsilon) &= \frac{A}{e} \sin[(\omega t - \varepsilon) + 180^\circ]; \end{aligned} \quad (4.11, a)$$

$$\theta A\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon) - BA\omega \sin[(\omega t - \varepsilon) - 90^\circ] + \frac{A}{e} \sin[(\omega t - \varepsilon) + 180^\circ] + M \sin \omega t = 0.$$

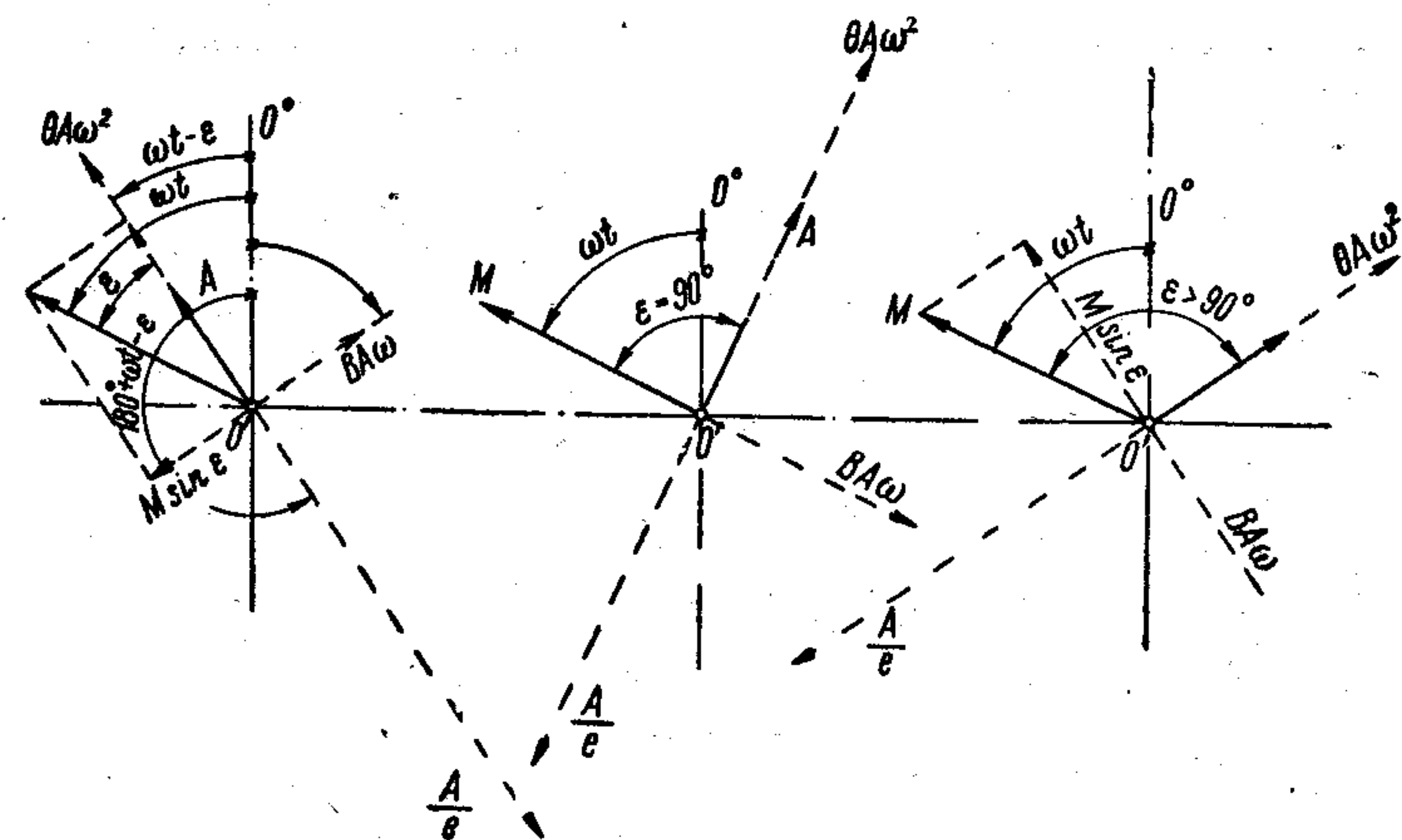


Рис. 40. Векторные диаграммы моментов.

На рис. 40 представлены векторные диаграммы для дорезонансного, резонансного и послерезонансного режимов. Векторы изображают здесь инерционный момент, эластический момент, момент сопротивления и возмущающий момент. Модули векторов равны амплитудам соответствующих моментов, а начальные фазы отложены от вертикальной оси. Геометрическая сумма этих векторов всегда равна нулю, а рассматриваемое уравнение представляется суммой горизонтальных проекций всех векторов.

Векторные диаграммы моментов следует мыслить в виде жесткой системы, вращающейся в указанном направлении с угловой скоростью  $\omega$ .

Теперь спроектируем вектор возмущающего момента  $M$  на вектор амплитуды  $A$  и перпендикулярное ему направление. Аналитически это представляется преобразованием

$$\begin{aligned} M \sin \omega t &= M \sin[\omega t - \varepsilon + \varepsilon] = M \cos \varepsilon \sin(\omega t - \varepsilon) + \\ &+ M \sin \varepsilon \cos(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}$$



Подставляя полученное выражение в (4.11), находим

$$A\theta\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon) - BA\omega \cos(\omega t - \varepsilon) - \frac{A}{e} \sin(\omega t - \varepsilon) + \\ + M \cos \varepsilon \sin(\omega t - \varepsilon) + M \sin \varepsilon \cos(\omega t - \varepsilon) = 0.$$

Это равенство может иметь место только в случае, когда суммы членов, содержащих синусы и косинусы одних и тех же аргументов, одновременно равны нулю.

$$A\theta\omega^2 - \frac{A}{e} + M \cos \varepsilon = 0; \quad M \sin \varepsilon - BA\omega = 0. \quad (4.12)$$

Это позволяет сделать ряд заключений;

1. В нерезонансных режимах.

Момент сил сопротивления с амплитудой  $BA\omega$  уравнивается одной составляющей  $M \sin \varepsilon$  вектора возмущающего момента. Разность инерционного и эластического моментов уравнивается другой составляющей  $M \cos \varepsilon$  вектора возмущающего момента.

2. При резонансе ( $\omega = \omega_e$ ,  $\varepsilon = 90^\circ$ ) эти выражения приобретают вид

$$A\theta\omega_e^2 = \frac{A}{e} \quad \text{и} \quad M = BA\omega_e, \quad (4.13)$$

откуда следует, что в названном режиме возмущающий момент целиком расходуется на преодоление сопротивлений, а инерционный момент  $A\theta\omega_e^2$  полностью уравнивается эластическим моментом  $A/e$ .

3. Равенство эластического момента и инерционного момента в любой момент времени характерно для свободных колебаний (§ 2); это дает возможность сделать важное заключение: резонансные колебания подчиняются закону свободных колебаний и позволяют утверждать, что форма резонансных колебаний совпадает с формой свободных колебаний.

4. Первое из уравнений (4.12) позволяет рассчитать частоту свободных колебаний системы (оно аналогично рассмотренному в § 2), а второе может служить для расчета амплитуды резонансных колебаний, которая, как видно из рассматриваемой зависимости, пропорциональна амплитуде возмущающего момента, обратно пропорциональна сопротивлению и частоте свободных колебаний.

5. Коэффициент динамичности  $\beta$ , а следовательно, и амплитуда вынужденных колебаний при  $\lambda > 1,41$  (т. е. в зарезонансной зоне) оказывается значительно меньше, чем до резонанса.

Указанная особенность вынужденных колебаний распространяется на многомассовые системы с малым трением. По этим соображениям эксплуатация установок более целесообразна на режимах, превышающих критические обороты. Однако эти соображе-

ния не являются решающими и в ряде случаев не могут быть приняты вследствие специфических особенностей системы. С другой стороны, эксплуатация силовых установок на зарезонансных режимах неизбежно сопровождается переходом через критическую зону при каждом пуске и каждой остановке двигателя, а иногда даже при изменении режима. Обычно это не влечет за собой возникновения больших амплитуд вынужденных колебаний, так как переход через критическую зону осуществляется весьма быстро и амплитуды не успевают достичь большой величины, но в некоторых случаях является опасным.



## ВОЗМУЩАЮЩИЕ МОМЕНТЫ И ИХ РАБОТА

## § 37. Общие соображения

Крутильные колебания возбуждаются периодическими моментами от сил газов, сил инерции и сил тяжести, возникающими в каждом кривошипно-шатунном механизме, а также периодическими моментами от некоторых приемников энергии.

Последующий расчет вынужденных крутильных колебаний производится для отдельных порядков, поэтому в нем учитываются лишь те гармонические составляющие перечисленных возмущающих моментов, которые имеют соответствующую частоту. Порядки колебаний, подлежащих исследованию, устанавливаются, как показано в § 25.

Порядком в расчетах крутильных колебаний называется отношение периода одного оборота коленчатого вала  $T$  к периоду данной гармонической составляющей  $T_v$ . Гармонические составляющие с порядками, определяемыми указанным способом, называются «моторными».

$$\nu = \frac{T}{T_v} = \frac{\omega_v}{\Omega}.$$

Такое определение порядка отличается от принятого в математике, где вместо периода одного оборота вала учитывается период всей функции. Таким образом номера математических порядков при гармоническом анализе крутящего момента от сил газов совпадают с номерами рассматриваемых здесь «моторных» гармоник только для двухтактных двигателей и представляются числами

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Период низшей гармонической составляющей крутящего момента четырехтактных двигателей  $T_{\nu \min}$  равен продолжительности двух оборотов вала  $2T$ , поэтому номер низшей «моторной» гармоники здесь будет

$$\nu_{\min} = \frac{T}{T_v} = \frac{T}{2T} = \frac{1}{2},$$

а последующие получаются умножением этого номера на числа натурального ряда

$$\nu = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, \infty.$$

Частоты гармонических составляющих моментов от сил тяжести и сил инерции являются кратными по отношению к угловой скорости коленчатого вала  $\omega_v = \nu\Omega$  и не зависят от тактности двигателя. Поэтому их порядки выражаются целыми числами.

Для двухтактных двигателей двойного действия за период одного оборота вала осуществляется два цикла теплового процесса, но для нижней и верхней полостей эти циклы не одинаковы, так как обычно отличаются значениями средних индикаторных давлений. Кроме того, площадь, на которую действуют газы в нижней полости, меньше аналогичной площади верхней полости на величину площади сечения штока. Поэтому период цикла крутящего момента будет равен периоду одного оборота коленчатого вала, а номера порядков гармонических составляющих будут такими же, как у двухтактных двигателей простого действия.

## § 38. Моменты от сил тяжести

Моменты сил тяжести деталей кривошипно-шатунного механизма соизмеримы с возмущающими моментами сил инерции и сил газов только в малооборотных двигателях тяжелого типа. Для всех других двигателей веса этих деталей учитывать нет необходимости, так как их относительная величина оказывается значительно меньшей. Если для крейцкопфных малооборотных дизелей среднее значение веса поступательно-движущихся деталей, отнесенное к площади поршня, составляет  $g_s = 1 \text{ кг см}^{-2}$  [20, стр. 86], то для дизелей средней быстроходности оно снижается до  $0,2 \text{ кг см}^{-2}$ , а для быстроходных — до  $0,05 \text{ кг см}^{-2}$  (т. е. будет в 20 раз меньше).

Возмущающий момент сил тяжести неуравновешенных вращающихся деталей  $M'_{TR}$  в вертикальном двигателе, как следует из рис. 41, равен

$$M'_{TR} = G_R R \sin \Omega z.$$

Его амплитуда и начальная фаза будут

$$M_{TR} = G_R R \text{ и } \psi_{TR} = 0. \quad (5.01)$$

Это момент первого порядка.

Сила тяжести неуравновешенных вращающихся деталей  $G_R$  состоит из приведенного к радиусу кривошипа веса колена  $G_k$  и веса шатуна, отнесенного к его нижней головке. Эти веса находят по чертежам соответствующих деталей или непосредственно — взве-

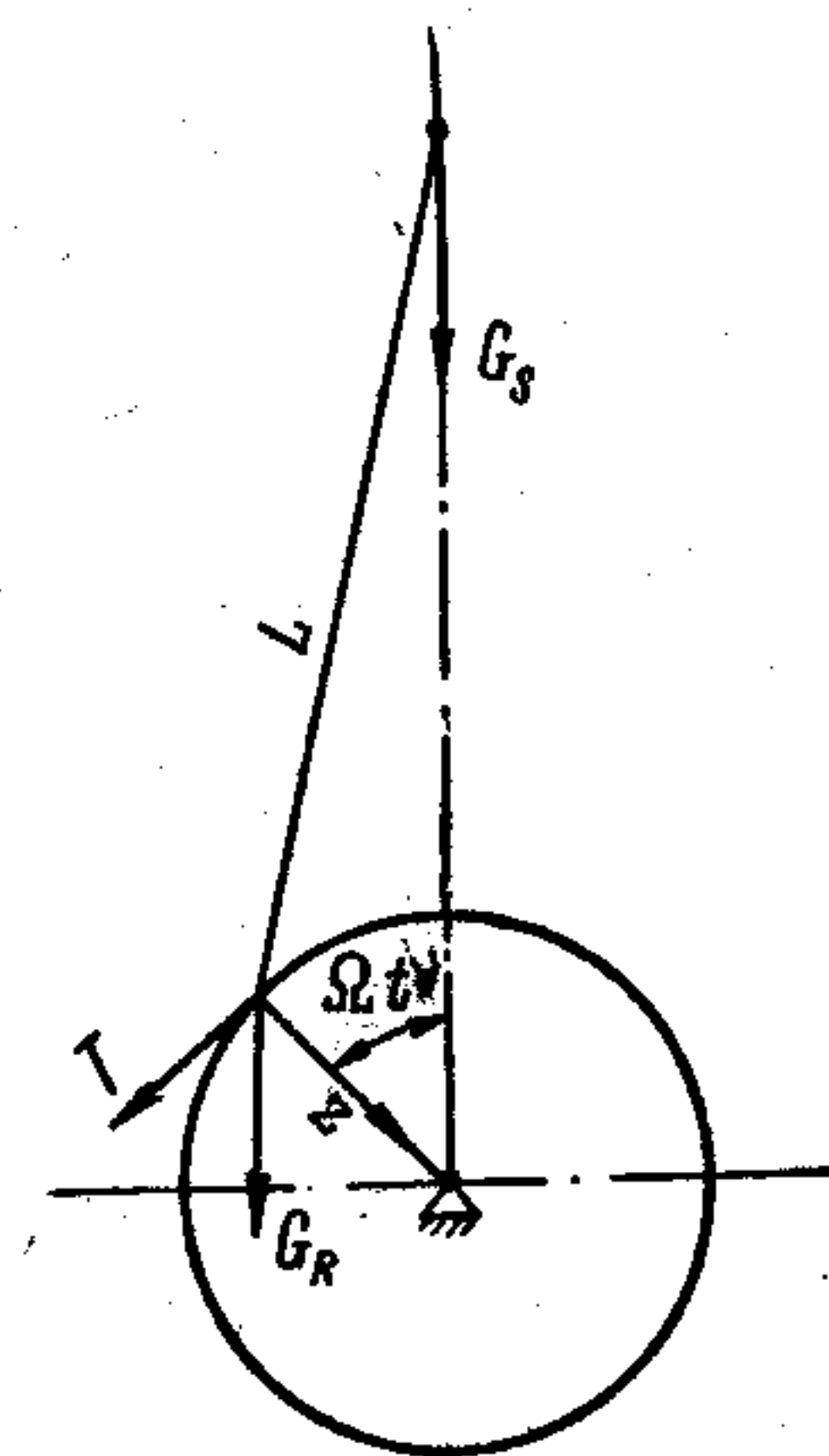


Рис. 41. К расчету возмущающих моментов от сил тяжести.



шиванием. Если вес шатуна —  $G_{ш}$ , а  $s$  — доля веса шатуна, отнесенная к его поршневой головке, то

$$G_R = G_k + G_{шR} = G_k + (1 - s) G_{ш}, \quad (5.02)$$

где  $s$  с достаточной точностью может быть принято по эмпирической формуле [56, стр. 126]

$$s = \frac{G_{шс}}{G_{ш}} = 0,2 \frac{(0,001n)^2 + 2}{(0,001n)^2 + 1} \quad (5.03)$$

в зависимости от номинального числа оборотов двигателя в минуту  $n$ .

Возмущающий момент сил тяжести поступательно-движущихся деталей  $M'_T$  найдем приравняв его работу на элементарном перемещении  $d\Omega t$  работе рассматриваемых сил тяжести  $G_s$  на элементарном перемещении поршня  $dS$  (рис. 41)

$$M'_{TS} d\Omega t = G_s dS.$$

Отсюда

$$M'_{TS} = G_s \frac{dS}{\Omega dt} = G_s \frac{V}{\Omega} = G_s \frac{R\Omega v}{\Omega} = G_s Rv, \quad (5.04)$$

где  $V$  и  $v$  — действительная и безразмерная скорости поршня.

Последняя может быть принята с учетом двух первых гармонических составляющих [20, стр. 25], тогда

$$M'_{TS} = G_s R (\sin \Omega t + 0,5\lambda \sin 2\Omega t). \quad (5.05)$$

Таким образом возмущающий момент сил тяжести поступательно-движущихся масс выражается двумя гармониками с указанными ниже амплитудами и начальными фазами

$$\begin{aligned} v = 1 \dots M_{1TS} &= G_s R \dots \psi_{1TS} = 0; \\ v = 2 \dots M_{2TS} &= 0,5\lambda G_s R \dots \psi_{2TS} = 0; \end{aligned} \quad (5.06)$$

Сила тяжести поступательно-движущихся деталей  $G_s$  состоит из веса деталей, совершающих чисто поступательное движение, и веса отнесенной к ним части шатуна  $sG_{ш}$

$$G_s = G_n + sG_{ш}. \quad (5.07)$$

Так как возмущающие моменты первого порядка от вращающихся и поступательно-движущихся деталей действуют всегда в одной фазе (начальные фазы  $\psi_{TR} = \psi_{1TS} = 0$ ), то их амплитуды можно просуммировать арифметически. Тогда возмущающие моменты сил тяжести всех деталей кривошипно-шатунного механизма на основании (5.01), (5.02), (5.05) и (5.06) могут быть охарактеризованы амплитудами и начальными фазами:

$$v = 1 \dots M_{1T} = M_{TR} + M_{1TS} = (G_k + G_n + G_{ш})R; \psi_{1T} = 0; \quad (5.08)$$

$$v = 2 \dots M_{2T} = M_{2TS} = 0,5\lambda (G_n + sG_{ш})R; \psi_{2T} = 0; \quad (5.09)$$

### § 39. Моменты от сил инерции

Силы инерции неуравновешенных вращающихся масс, как центробежные силы, вращающих моментов не создают, поэтому интерес представляют лишь возмущающие моменты сил инерции поступательно-движущихся масс. Вес этих деталей устанавливается формулой (5.07).

Сила инерции этих масс  $P_n$  находится из обычной зависимости

$$P_n = -\frac{G_s}{g} J = -\frac{G_s}{g} R\Omega^2 j,$$

где  $J$  и  $j$  — действительное и безразмерное ускорения поршня [20, стр. 25].

Сила инерции пропорциональна массе деталей и квадрату угловой скорости коленчатого вала. В малооборотных двигателях значительна величина массы деталей, а в быстроходных — угловая скорость, поэтому возмущающие моменты от сил инерции оказываются существенными для двигателей всех типов.

Сила инерции поступательно-движущихся масс мыслится приложенной к поршневому или крейцкопфному пальцу, т. е. так же, как сила тяжести этих деталей, а поэтому момент этой силы  $M'_n$  может быть найден из зависимости вида (5.04). Подставляя в нее  $P_n$  вместо  $G_s$ , находим

$$M'_n = P_n Rv = -\frac{G_s}{g} R^2 \Omega^2 v j = -\frac{G_s}{g} R^2 \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 v \cdot j.$$

Последующие подстановка точных значений  $v$  и  $j$  [20, стр. 27] и ряд преобразований [30, стр. 88] позволяют представить это выражение в виде гармонического ряда, в котором существенное значение могут иметь только четыре первые гармонические составляющие. Их амплитуды и начальные фазы имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} v = 1 \dots M_{1n} &= 1,02\lambda kn^2 \dots \psi_{1n} = 0; \\ v = 2 \dots M_{2n} &= 2,04kn^2 \dots \psi_{2n} = 180^\circ; \end{aligned} \quad (5.09, a)$$

$$\begin{aligned} v = 3 \dots M_{3n} &= 2,8\lambda kn^2 \dots \psi_{3n} = 180^\circ; \\ v = 4 \dots M_{4n} &= \lambda^2 kn^2 \dots \psi_{4n} = 180^\circ, \end{aligned}$$

где

$$k = 2,8 \cdot 10^{-6} (G_n + sG_{ш}) R^2 \text{ кгсммин}^2.$$

### § 40. Моменты от силы газов

Сила давления газов на поршень в кривошипно-шатунном механизме преобразуется в крутящий момент, действующий в каждом колене вала. Переменная величина этого момента может быть выражена рядом Фурье, т. е. суммой постоянного члена — среднего крутящего момента и некоторого числа гармонических



составляющих. Эти составляющие являются основными возбудителями крутильных колебаний в установках с двигателями внутреннего сгорания и другими поршневыми машинами.

Разложение крутящего момента от сил газов одного цилиндра может быть выполнено различными аналитическими способами гармонического анализа или с помощью гармонических анализаторов [56, стр. 139], [29, стр. 187], [43, стр. 185].

Результаты такого разложения представляются в виде

$$M'_r = M_{cp} + \sum_{v=v_{min}}^{\sim 10} M_{vr} \sin(v\Omega t + \psi_{vr})^* \quad (5.10)$$

Каждая гармоническая составляющая  $v$ -го порядка характеризуется амплитудой  $M_{vr}$ , начальной фазой  $\psi_{vr}$  и частотой  $\omega_v = v\Omega$ .

Порядки моторных гармоник для четырехтактных дизелей, как указывалось в § 37, начинаются и возрастают в последовательности  $v = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3$  и т. д., а для двухтактных двигателей  $v = 1; 2; 3; 4$  и т. д.

Таким образом, записанный выше ряд Фурье для двухтактного двигателя приобретает вид

$$M_r = M_{cp} + M_{1r} \sin(\Omega t + \psi_{1r}) + M_{2r} \sin(2\Omega t + \psi_{2r}) + M_{3r} \sin(3\Omega t + \psi_{3r}) + \dots \quad (5.10, a)$$

Пример такого разложения представлен на рис. 42.

Первоначально, лет 50 назад, подобное разложение выполнялось для каждого двигателя. Однако скоро было замечено, что амплитуды гармонических составляющих для двигателей одинаковой тактности и с близким рабочим процессом пропорциональны объемам их цилиндров, а начальные фазы практически не отличаются. Тогда результаты гармонического анализа стали выражать в виде так называемых гармонических коэффициентов  $c_v$ , представляющих собой отношения действительных амплитуд момента  $M_{vr}$  к произведению площади поршня  $F$  на радиус кривошипа (т. е. к половине объема, описываемого поршнем).

$$c_v = \frac{M_{vr}}{FR} \text{ кгсм/см}^3. \quad (5.11)$$

Такие гармонические коэффициенты и начальные фазы представлялись кривыми для каждого порядка в функции среднего индикаторного давления. Амплитуда каждой  $v$ -й гармоники любого подобного двигателя с иными размерами при заданном  $p_i$  на основании такого графика могла быть подсчитана по формуле

$$M_{vr} = FRc_v = 0,785D^2Rc_v, \text{ кгсм}, \quad (5.12)$$

а начальная фаза находилась непосредственно из другого графика.

\*  $v_{min} = 0,5$  для 4-тактных и 1 для двухтактных ДВС.

В качестве примера на рис. 43 представлены графики Коломенского машиностроительного завода, полученные им для четырехтактных двигателей с наддувом.

По мере накопления опыта подобные материалы были опубликованы и для двухтактных двигателей различных типов. Однако в связи с возрастающей форсировкой параметры теплового процесса

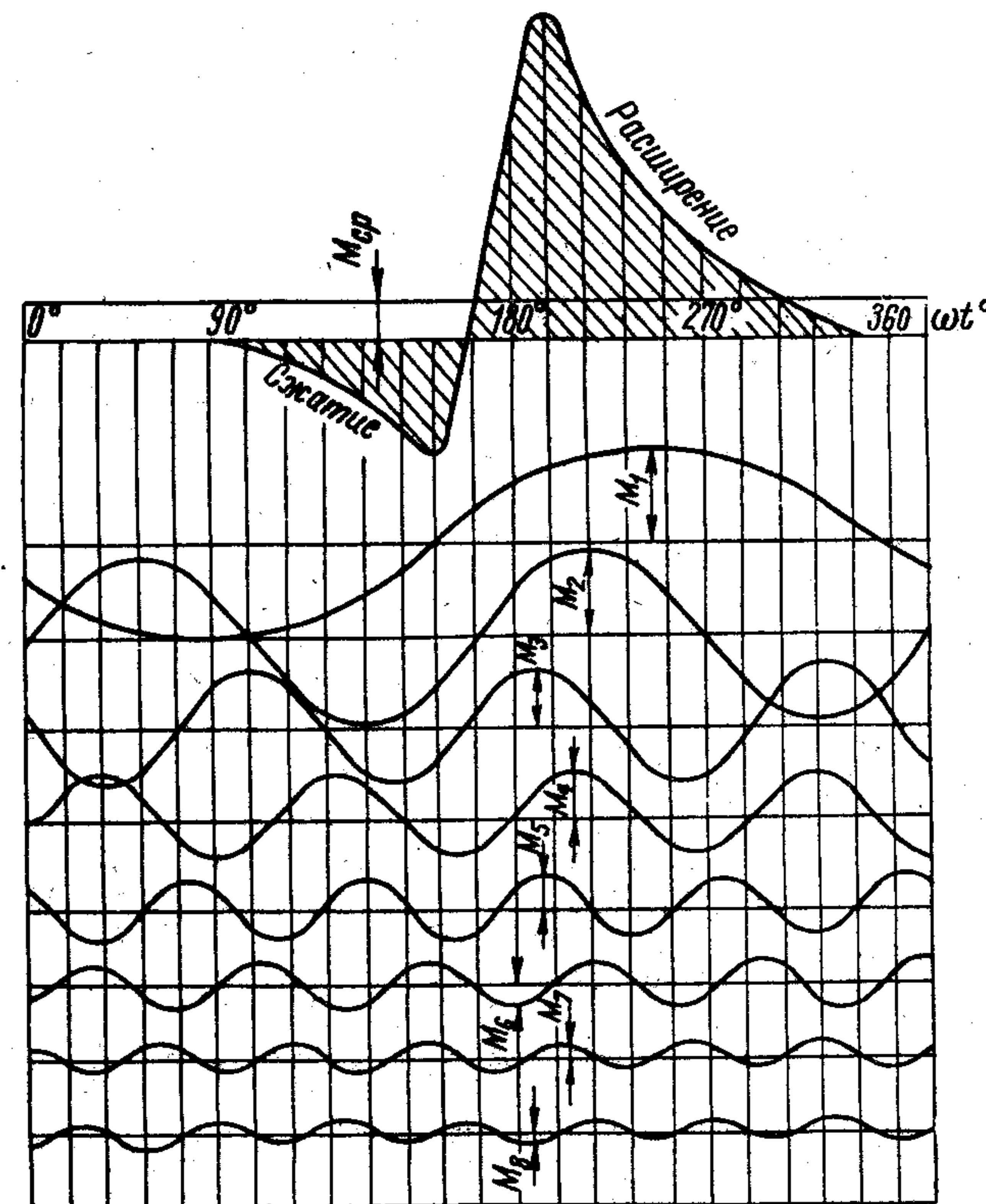


Рис. 42. Разложение возмущающих моментов от сил газов на гармонические составляющие.

новых дизелей стали существенно отличаться от параметров тех моделей, для которых были найдены описанные гармонические коэффициенты.

В результате анализа тангенциальных диаграмм Терских были предложены эмпирические формулы, позволяющие более обоснованно находить амплитуды возмущающих моментов от сил газов. Они учитывают не только геометрические размеры двигателя, тактность и среднее индикаторное давление, но также давление сжатия и механический к. п. д. двигателя. Такие формулы предложены для двигателей с обычной конструктивной схемой, для двигателей двойного действия и с расходящимися поршнями.



Для дизелей простого действия с центральным кривошипно-шатунным механизмом амплитуды гармонических составляющих возмущающего момента рекомендуется находить по формуле

$$M_{\text{вг}} = \frac{\pi}{m} D^2 R p_c y, \text{ кгсм}, \quad (5.13)$$

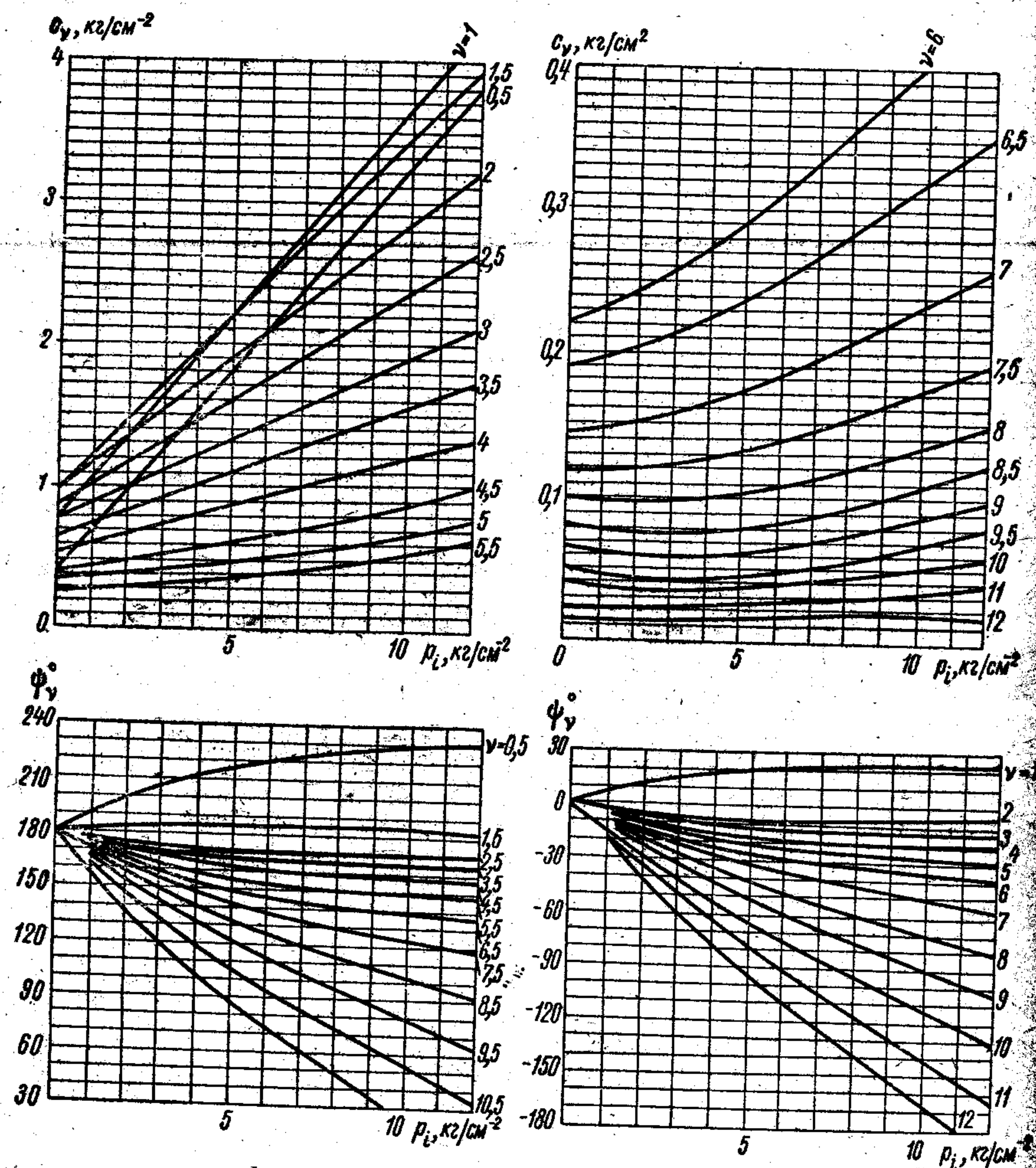


Рис. 43. Гармонические коэффициенты.

где  $m$  — число тактов, в течение которых осуществляется рабочий процесс;  
 $D$  и  $R$  — диаметр цилиндра и радиус кривошипа;  
 $p_c$  — давление сжатия в цилиндре;

$y$ , — коэффициент, определяемый по номограмме (рис. 44) посредством вспомогательной величины  $p$

$$p = \frac{p_i}{p_c}. \quad (5.14)$$

Входящие в эти выражения параметры определяются следующим образом (индекс  $n$  указывает на значение параметра при номинальном режиме).

1. Давление сжатия  $p_c$  для двигателей без наддува может приниматься независимым от режима и равным его номинальному значению, а при наличии наддува определяется в зависимости от типа нагнетателя по формуле

$$p_c = a + b \left( \frac{n}{n_n} \right)^2; \quad (5.15)$$

при поршневом нагнетателе  $a = 29$ ,  $b = 5$ ;  
 при ротативном нагнетателе  $a = 28$ ,  $b = 10$ ;  
 при центробежном нагнетателе  $a = b = 27$ .

2. Среднее эффективное давление  $p_e$  зависит от режима и характеристики, на которых работает двигатель.

Для судовых двигателей:

при пуске ( $0 < n < 0,3 n_n$ ) об/мин

$$p_e \approx p_{en};$$

при режимах ( $0,3 n_n < n < 1,1 n_n$ ) об/мин и остановке

$$p_e = p_{en} \left( \frac{n}{n_n} \right)^k, \quad (5.16)$$

где  $k = 2$  при работе двигателя по винтовой характеристике и  $k = 1$  при работе по катерной характеристике.

3. Для дизель-генераторов и стационарных двигателей:

при пуске ( $0 < n < 0,5 n_n$ ) об/мин

$$p_e \approx p_{en};$$

при режимах ( $0,5 n_n < n < n_n$ ) об/мин  $p_e$  изменяется пропорционально мощности двигателя (при остановке и холостом ходе  $p_e \approx 0$ )

$$p_e = p_{en} \frac{N}{N_n}. \quad (5.17)$$

Среднее давление механических потерь  $p_{\text{мех}}$  оценивается также по эмпирической формуле в зависимости от числа оборотов двигателя и его механического к. п. д. при номинальном режиме

$$p_{\text{мех}} = p_i - p_e \approx 0,6 + 0,45 \frac{n}{n_n} \left( 1,2 + \frac{n}{n_n} \right) \left( \frac{1 - \eta_m}{\eta_m} p_{en} - 0,6 \right). \quad (5.18)$$



Значения механического коэффициента полезного действия:

Для четырехтактного двигателя:	
без наддува . . . . .	0,75—0,85
с наддувом . . . . .	0,80—0,90
Для двухтактных двигателей:	
без наддува . . . . .	0,70—0,80
с наддувом . . . . .	0,75—0,92

Приведенные данные относятся к двигателям простого действия. В двигателях двойного действия механический к. п. д. достигает 0,80 — 0,95.

Вычислив с помощью найденных параметров величину  $p$  по формуле (5.14), по номограмме рис. 44 находят коэффициент  $y$ , который следует подставить в формулу (5.13).

Использование номограммы (рис. 44) не представляет затруднений. Найдя значение  $p$  на двух крайних верхних шкалах, на них накладывают линейку, позволяющую прочесть значение  $y$  на шкале искомого порядка  $v$ . Пользуясь нижними шкалами, таким же способом находят значение начальной фазы  $\psi_{vr}$ . Текущее значение гармонического момента  $v$ -го порядка  $M_{vr}$  на основании полученных параметров можно записать в виде

$$M'_{vr} = M_{vr} \sin(v\Omega t + \psi_{vr}). \quad (5.19)$$

Отчет начальных фаз производится от положения кривошипа в в. м. т. в момент начала хода расширения.

#### § 41. Моменты от некоторых приемников энергии и передач к ним

Цилиндры поршневых компрессоров обычно выполняются неидентичными, так как в них осуществляются процессы, соответствующие различным ступеням сжатия воздуха или другого газа. Поэтому возмущающие моменты от сил инерции и сил газов на отдельных кривошипах отличаются не только по фазе, но и по амплитудам.

Параметры гармонических составляющих от сил инерции в этом случае находят так же, как для дизелей, а от сил газов — посредством гармонического анализа кривых крутящего момента на каждом кривошипе. Приблизительно последние могут быть найдены по номограммам Терских.

Амплитуды гармонических составляющих таких приемников энергии, как центробежные водяные насосы и воздуходувки, обычно не достигают существенной величины, а потому не учитываются.

То же относится к электрогенераторам.

В некоторых случаях источником возмущающих моментов является главная зубчатая передача, на одной из шестерен которой имеет место циклическая погрешность шага зацепления. Иногда она образовывается на обкаточных стендах, реже — в процессе

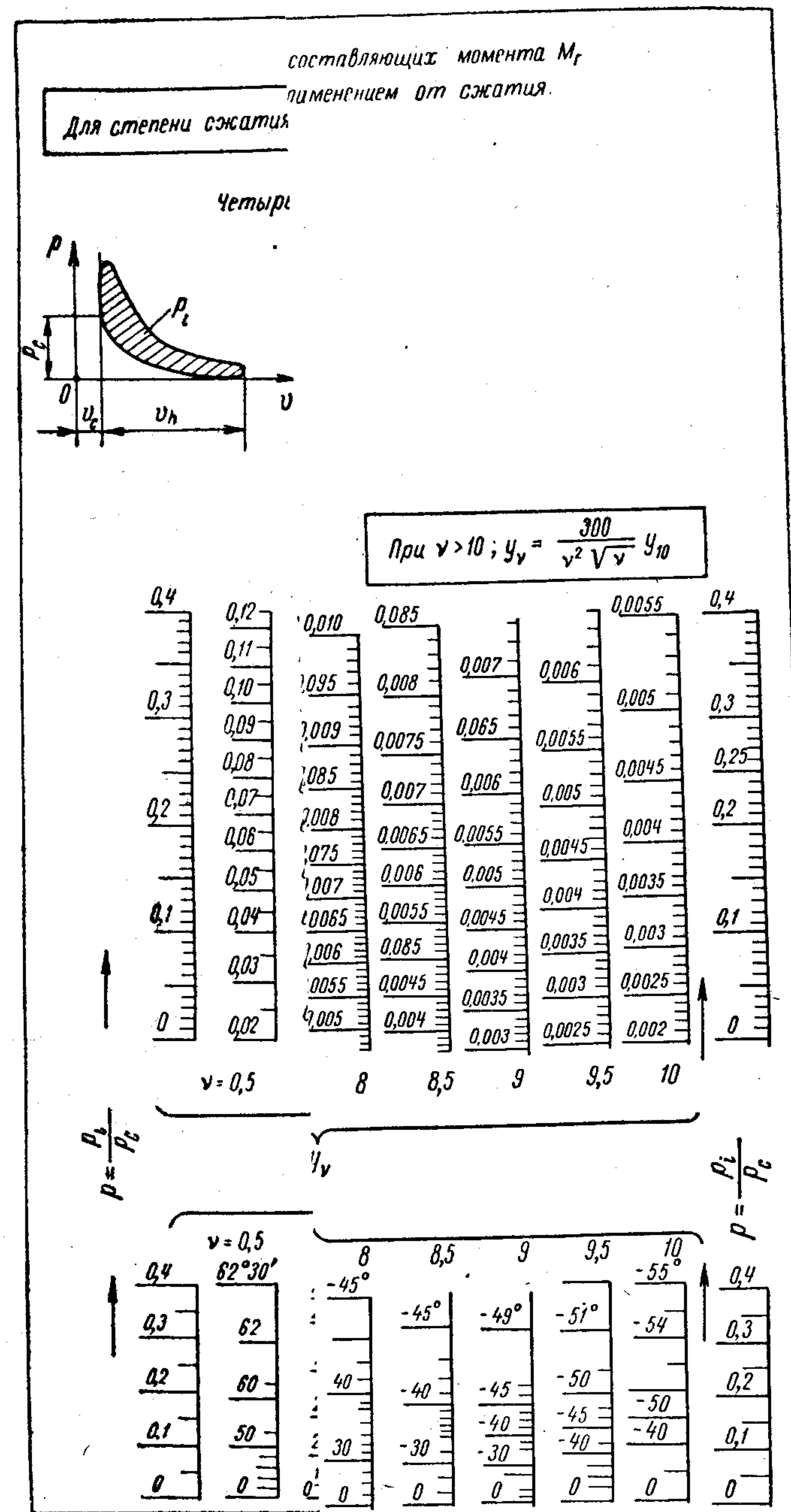


Рис. 44. Номограммы для определения составляющих от сил газов.

П. А. Истомин

момента  
итуда —  
лебаний  
ественно

называе-  
естерен.  
начения

ип  
на мас-  
л, рас-  
ка у на

0°  
векторов  
тов.

их на-  
еличине  
 $\psi$ , на-  
гальной  
ляющие  
оборот-

ких мо-  
игателя  
никают  
гателях  
оник от  
ми, как  
тельно.



ного действия:

0,75—0,85  
0,80—0,90

0,70—0,80  
0,75—0,92

ростого действия.

к. п. д. достигает

в величину  $p$  по  
коэффициент  $y$ ,

ставляет затрудне-  
х шкалах, на них  
чение  $y$ , на шкале  
ми, таким же спо-  
екущее значение  
новании получен-

(5.19)

жения кривошипа

и передач к ним

выполняются не-  
оцессы, соответст-  
или другого газа.  
и сил газов на от-  
зе, но и по ампли-

ил инерции в этом  
газов — посредст-  
момента на каж-  
быть найдены по

таких приемников  
духотулки, обычно  
не учитываются.

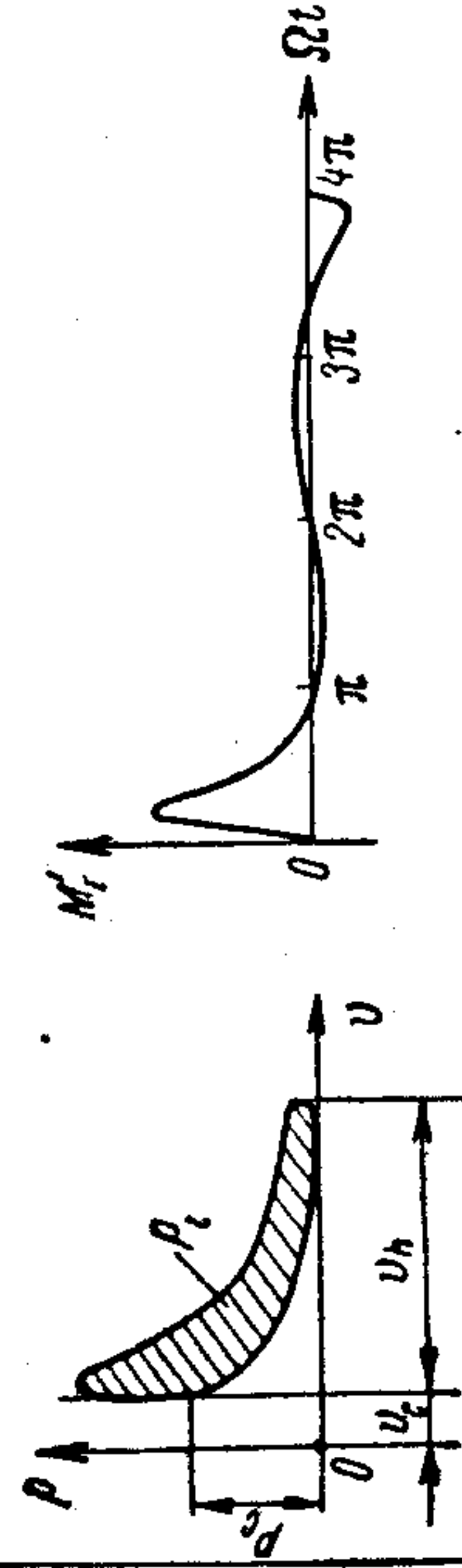
щих моментов яв-  
шестерен которой  
цепления. Иногда  
реже — в процессе

Амплитуды  $M_{\gamma}$  и начальные фазы  $\phi_{\gamma}$  гармонических  
касательной силы от давления газов в двигателе с восприимчивым от сжатия.

$$\lambda = \frac{R}{L} = 0,2 - 0,3$$

$$\text{Для степеней сжатия } \varepsilon = 1 + \frac{v_h}{v_c} = 11 - 13$$

Четырехтактный цикл



Двухтактный цикл

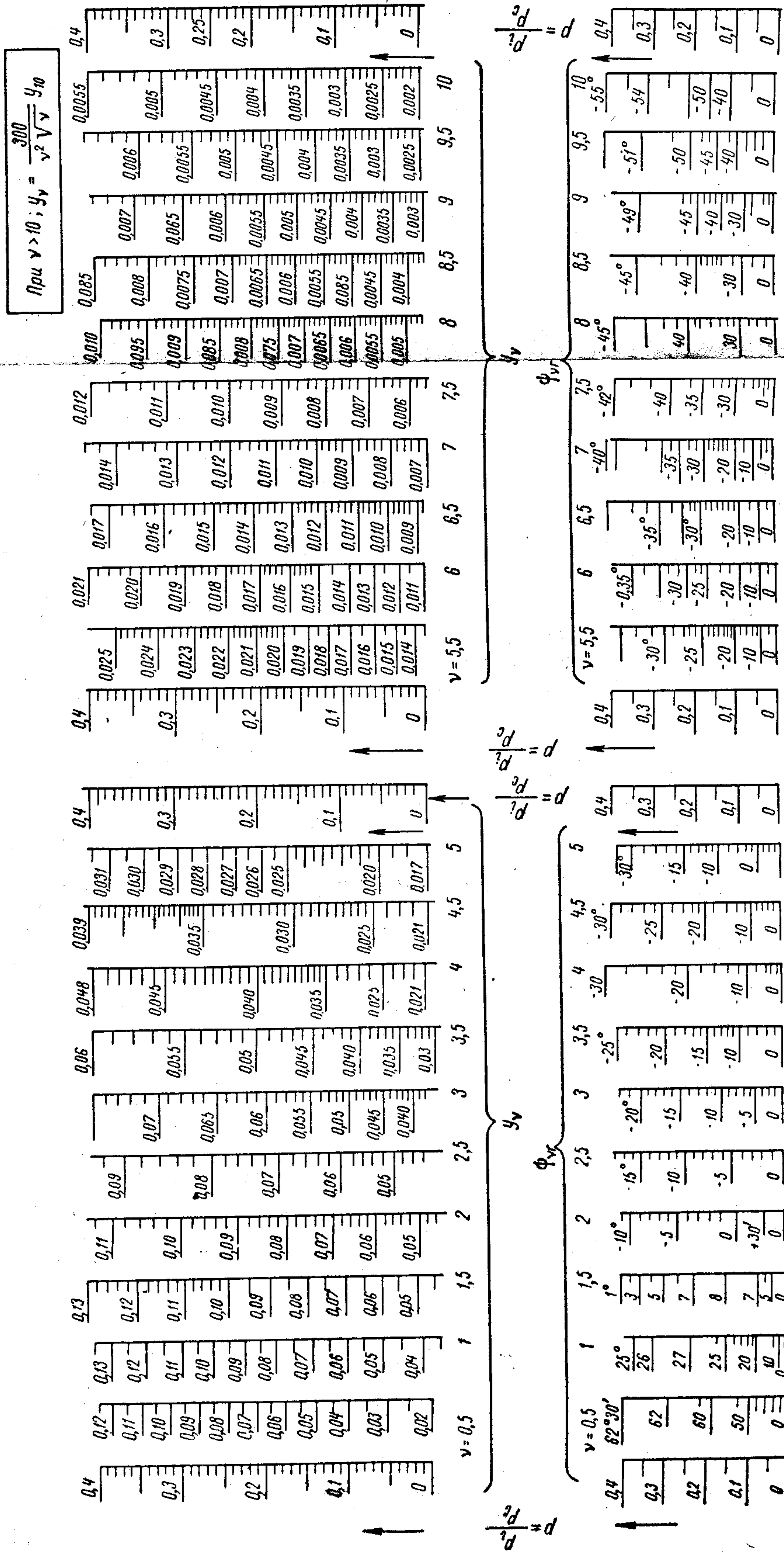
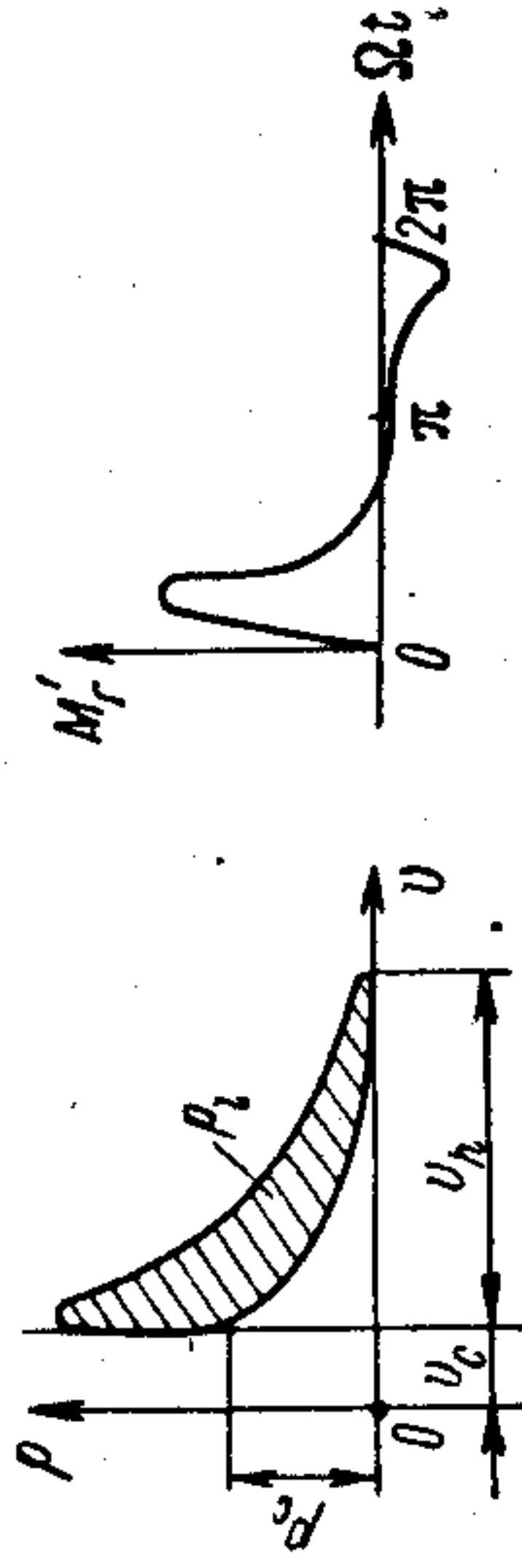


Рис. 44. Номограмма Терских для определения амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих от сил газов.



изготовления шестерен. Частота этого возмущающего момента пропорциональна числу оборотов зубчатого колеса, а амплитуда — незначительна. Если частота наблюдаемых резонансных колебаний близка к указанной, а частоты других возбудителей существенно от нее отличаются, то это явление следует иметь в виду.

Погрешность профиля зубцов шестерен вызывает так называемую зубцовую частоту, пропорционально числу зубцов шестерен. Иногда она заметна на торсиограммах. Существенного значения соответствующий возбудитель не имеет.

## § 42. Суммарные моменты, действующие на каждый кривошип

Гармонические составляющие возмущающих моментов на массах двигателя и поршневого компрессора от различных сил, рассмотренные в § 38—41, суммируются для каждого порядка  $\nu$  на каждом расчетном режиме работы машинной установки. В общем случае находят суммарные амплитуды  $M_\nu$  и начальные фазы  $\psi_\nu$  всех этих гармонических составляющих

$$\begin{aligned} M'_\nu &= M'_{\nu r} + M'_{\nu n} + M'_{\nu t} = \\ &= M_\nu \sin(\nu \Omega t + \psi_\nu). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Суммирование выполняется графически. При этом амплитуды рассматриваются как векторы, отложенные от горизонтальной координатной оси против часовой стрелки под углами, равными их начальным фазам. Суммарный вектор  $M_\nu$  определяется по величине как замыкающая составляющих векторов. Начальная фаза  $\psi_\nu$  находится как угол наклона этой замыкающей к горизонтальной координатной оси (рис. 45).

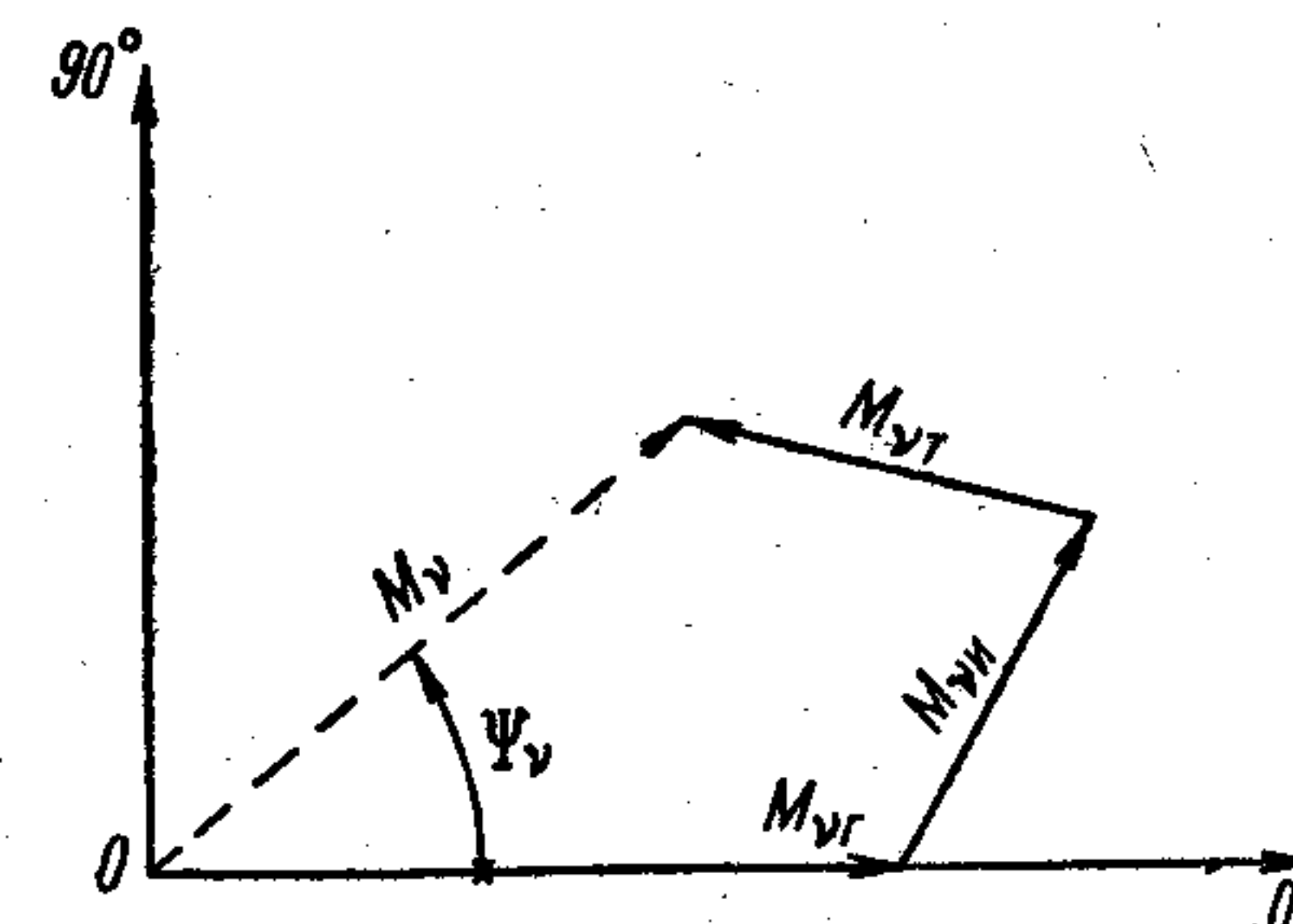


Рис. 45. Суммирование векторов возмущающих моментов.

При суммировании учитывают гармонические составляющие возмущающих моментов:

сил тяжести — двух первых порядков (только для малооборотных двигателей тяжелого типа);

сил инерции — трех или четырех первых порядков;

сил газов — до 10-го порядка включительно.

Гармоническая составляющая  $\nu$ -го порядка возмущающих моментов, действующих на кривошип вала V-образного двигателя  $M_{\nu \Sigma}$ , складывается из двух гармоник  $M'_\nu$  и  $M''_\nu$ , которые возникают от двух цилиндров, работающих на один кривошип. В двигателях с центральным сочленением шатунов амплитуды этих гармоник от сил газов одинаковы, а в двигателях с прицепными шатунами, как показывает исследование Киммеля [71], отличаются незначительно.



Наиболее заметным это отличие оказывается для третьего и 9-го порядков. Третий порядок гармоник возмущающего момента от сил инерции, кроме того, имеет место только в механизме с прицепным шатуном. Амплитуды этих гармоник обычно бывают меньше, чем для 7,5 порядка, свойственного возмущающим моментам от сил газов в цилиндре с центральным кривошипно-шатунным механизмом. Этот порядок редко оказывается опасным.

Просуммируем гармонические составляющие  $\nu$ -го порядка  $M_{\nu}$  и  $M'_{\nu}$ , обозначив угол поворота коленчатого вала между вспышками в цилиндрах, связанных с данным коленом символом  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} M_{\nu\Sigma} &= M'_{\nu} + M_{\nu} = M_{\nu} \sin(\nu\Omega t + \psi_{\nu}) + M_{\nu} \sin(\nu\Omega t + \psi_{\nu} + \nu\xi) \\ &= M_{\nu} [\sin(\nu\Omega t + \psi_{\nu}) + \sin(\nu\Omega t + \psi_{\nu} + \nu\xi)] = \\ &= 2M_{\nu} \cos 0,5\nu\xi \sin(\nu\Omega t + \psi_{\nu} + 0,5\nu\xi). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Таким образом, амплитуда и начальная фаза гармонической составляющей возмущающего момента на каждом кривошипе получают значения

$$M_{\nu\Sigma} = 2M_{\nu} \cos 0,5\nu\xi; \quad \psi_{\nu\Sigma} = \psi_{\nu} + 0,5\nu\xi. \quad (5.22)$$

Эти выражения будут точными для двигателей с центральным сочленением и приближенными для двигателей с прицепными шатунами.

Аналогичным образом можно найти  $M_{\nu\Sigma}$  для W-образных и звездообразных двигателей.

### § 43. Моменты от гребного винта

В момент прохождения лопасти около выступающей части (или частей) кормовой оконечности корпуса судна она встречает повышенное сопротивление воды — это служит источником неравномерности крутящего момента, затрачиваемого на вращение гребного винта. Период этого момента  $T_{\nu}$  равен отношению периода одного оборота вала  $T$  к числу лопастей винта  $z$ . Порядок основной гармоник поэтому равен числу лопастей, а порядок последующих гармоник в два и три раза выше

$$\nu = \frac{T}{T_{\nu}} = z, 2z, 3z \text{ и т. д.}$$

Амплитуды гармонических составляющих этого момента исследованы Бремсом [69, стр. 78]; в зависимости от среднего крутящего момента они характеризуются величинами:

$$z = 3 \dots M_{3B} \approx 0,042M_{cp}; \quad M_{6B} \approx 0,043M_{cp}; \quad M_{9B} \approx 0,027M_{cp};$$

$$z = 4 \dots M_{4B} \approx 0,076M_{cp}; \quad M_{8B} \approx 0,026M_{cp}; \quad M_{12B} \approx 0,008M_{cp};$$

$$z = 5 \dots M_{5B} \approx 0,09M_{cp}; \quad M_{10B} \approx 0,015M_{cp}; \quad M_{15B} \approx 0.$$

В многовальных установках величины этих амплитуд зависят от расположения винтов и взаимодействия отбрасываемых ими потоков. Так как абсолютная величина амплитуд этих возмущающих моментов невелика, то в расчете их учитывают только для тех частей валопровода (например, участки между гидромuftой и гребным винтом), где действие других возбудителей не сказывается.

### § 44. Безразмерные возмущающие моменты

Безразмерные возмущающие моменты вычисляются, как и другие моменты, возникающие в валопроводе, по формуле вида (3.30)

$$M_{y\nu} = e_0 M_{\nu\nu}, \quad (5.23)$$

где  $M_{\nu\nu}$  — абсолютное значение момента  $\nu$ -го порядка на массе с номером  $y$ .

В случаях, когда момент приложен в той части системы, которая расположена за редуктором с передаточным числом  $i_y$ , безразмерный приведенный момент находят по формуле

$$M_{y\nu} = i_y e_0 M_{\nu\nu}. \quad (5.24)$$

### § 45. Работа, передаваемая системе одним гармоническим возмущающим моментом

Если на одну из масс системы с трением действует гармонический возмущающий момент

$$M'_{\nu} = M_{\nu} \sin \nu\Omega t = M_{\nu} \sin \omega t, \quad \text{где } \omega = \nu\Omega,$$

то, как известно из гл. 4, в ней возбуждаются колебания той же частоты, но со сдвигом фазы  $\varepsilon$

$$\varphi = A \sin(\omega t - \varepsilon) \dots d\varphi = A \cos(\omega t - \varepsilon) d\omega t. \quad (5.25)$$

Работа  $dW_m$  этого момента на элементарном перемещении  $d\varphi$  —

$$dW = M'_{\nu} d\varphi.$$

Найдем работу этого момента за цикл

$$\begin{aligned} W_m &= \int_0^{2\pi} dW_m = \int_0^{2\pi} M_{\nu} \sin \omega t A \cos(\omega t - \varepsilon) d\omega t = \\ &= M_{\nu} A \int_0^{2\pi} \sin \omega t (\cos \omega t \cos \varepsilon + \sin \omega t \sin \varepsilon) d\omega t = \\ &= M_{\nu} A \cos \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t d\omega t + M_{\nu} A \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d\omega t = \\ &= M_{\nu} A \cos \varepsilon \int_0^{2\pi} 0,5 \sin 2\omega t d\omega t + M_{\nu} A \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} 0,5 (1 - \cos 2\omega t) d\omega t = \end{aligned}$$



$$= 0 + \frac{1}{2} M_y A \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} d\omega t - \frac{1}{2} M_y A \sin \varepsilon \int_0^{2\pi} \cos 2\omega t d\omega t =$$

$$= \frac{1}{2} M_y A \sin \varepsilon \left| \omega t \right|_0^{2\pi} = \pi M_y A \sin \varepsilon.$$

Следовательно, работа за цикл гармонического момента, передаваемая системе, совершающей гармонические колебания, находится из простого выражения

$$W_m = \pi M_y A \sin \varepsilon \text{ кГсм/цикл.} \quad (5.26)$$

Она зависит от амплитуды возмущающего момента  $M_y$ , амплитуды  $A$  возбуждаемого этим моментом колебания и сдвига фаз  $\varepsilon$ . Наибольшая работа, передаваемая системе возмущающим моментом, наблюдается при  $\varepsilon = 90^\circ$ , что, как известно из § 31, имеет место при резонансе ( $A_R$  — резонансная амплитуда)

$$W_m = \pi M_y A_R \text{ кГсм/цикл} \quad (5.27)$$

и способствует интенсивному развитию колебаний при этом явлении.

#### § 46. Векторные диаграммы возмущающих моментов

В § 39 были выявлены гармонические составляющие суммарных возмущающих моментов, действующих на одну массу (один кривошип) двигателя. Вследствие идентичности цилиндров дизеля, амплитуды возмущающих моментов, действующих на все массы двигателя, обычно бывают одинаковыми для каждого порядка  $v$ , а фазы зависят от порядка, тактности дизеля и заклинки его кривошипов.

Векторные диаграммы служат для графического представления векторов гармонических составляющих возмущающего момента. Каждую такую диаграмму можно представить в виде проекции векторов гармоник данного порядка на плоскость, перпендикулярную к оси коленчатого вала. Если векторная диаграмма отражает фазы, в которых находятся эти векторы, но не учитывает их величины, то ее называют *фазовой диаграммой*.

Рассмотрим начальные фазы гармонических составляющих возмущающих моментов (5.20), приложенных ко всем массам двигателя  $M'_y = M_y \sin (v\Omega t + \psi_y)$ . Так как последующие расчеты выполняются для каждого порядка в отдельности, то с целью упрощения выражений от индекса  $v$  отказываются. Вместо него вводят индекс  $y$  — номер массы, соответствующий номеру цилиндра (считая от свободного конца коленчатого вала двигателя). Таким образом  $v$ -й гармонической составляющей возмущающего момента на массе с номером  $y$  присваивается выражение

$$M'_y = M_y \sin (v\Omega t + \psi_y). \quad (5.28)$$

Если угол поворота вала между вспышками в  $y$ -м и первом цилиндрах обозначить символом  $\xi_{y,1}$ , начальные фазы моментов на названных массах (кривошипах) для  $v$ -го порядка соответственно будут

$$\psi_1 \text{ и } \psi_y = \psi_1 + v\xi_{y,1}, \quad (5.29)$$

что интерпретируется векторной диаграммой, представленной на рис. 46, а и б для первого и 2-го порядков.

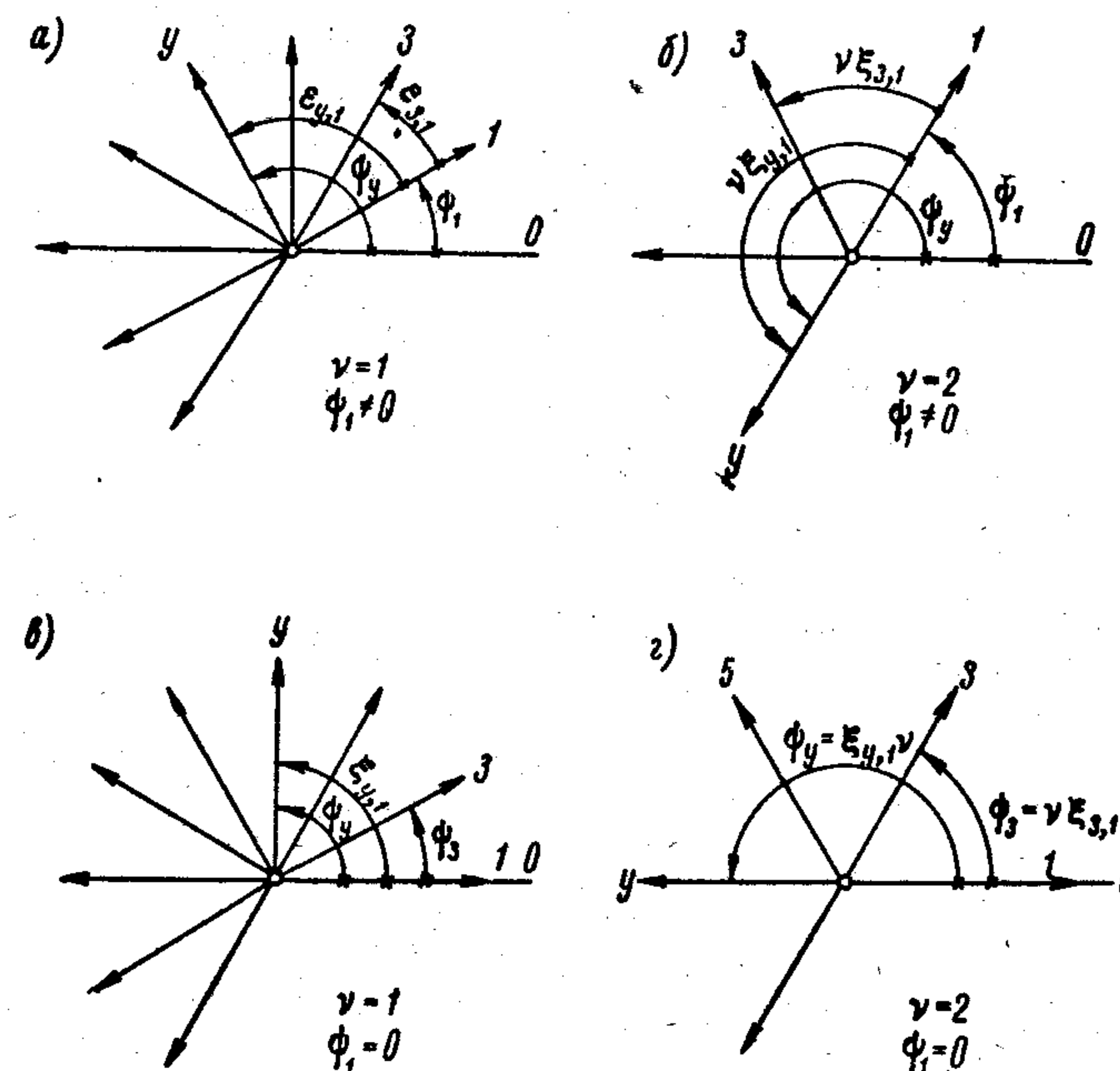


Рис. 46. Начальные фазы векторов.

Начальные фазы этих гармонических моментов обычно фиксируются при таком положении вала, когда кривошип первого цилиндра находится в в. м. т. и в этом цилиндре начинается такт расширения (это важно иметь в виду для четырехтактных двигателей). При построении векторных диаграмм полагаем

$$\psi_1 = 0 \text{ и } \psi_y = v\xi_{y,1}, \quad (5.30)$$

а векторные диаграммы оказываются повернутыми (рис. 46, в и г).

Так как углы заклинки кривошипов  $\xi_{y,1}$  постоянны, то взаимное положение векторов диаграммы данного порядка всегда остается неизменным. Если учесть вращение вала, то каждую векторную диаграмму следует представлять себе вращающейся с угловой скоростью  $v\Omega$ , так как положения всех векторов зависят от этой величины (5.28).



Построение векторных диаграмм следует выполнять на основании принятой для данного двигателя последовательности вспышек в цилиндрах. Для *двухтактных* моделей эта последовательность соответствует схеме заклинки кривошипов. Луч, вдоль которого направляется вектор момента первого цилиндра, располагается горизонтально, в правую сторону от центра диаграммы. Снабдив лучи схемы стрелками, получим векторную диаграмму первого порядка, а увеличив углы  $\xi_{y,1}$  в  $v$  раз, изобразим аналогичные диаграммы для любого порядка (рис. 47, в, г, д).

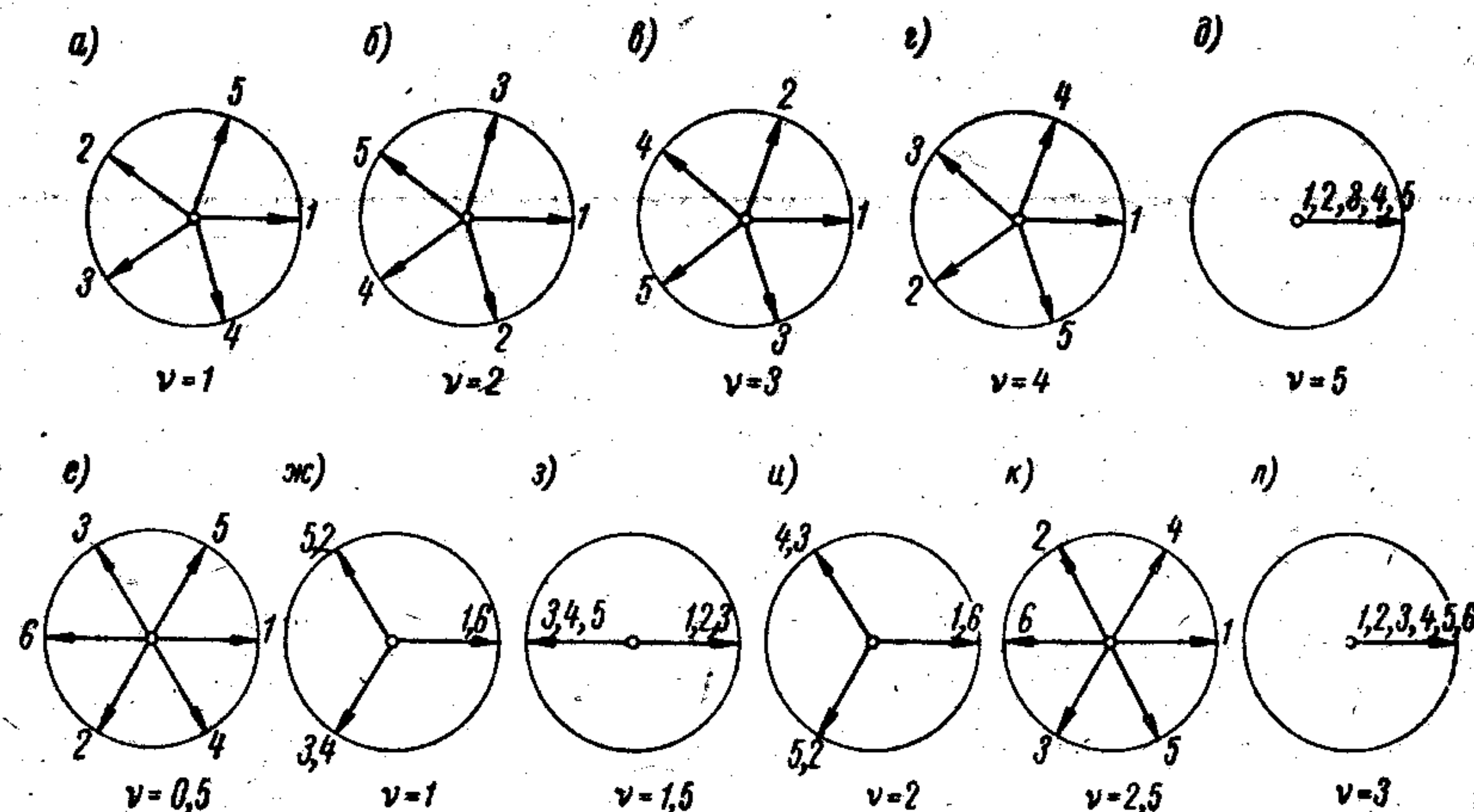


Рис. 47. Векторные диаграммы.

Для *четырёхтактных* моделей векторная диаграмма низшего порядка ( $v = 0,5$ ) при равномерном чередовании вспышек строится на базе правильной лучевой звезды — пучка лучей, исходящих из некоторой точки и разделяющих окружающую ее плоскость на секторы, число которых  $z$  равно числу цилиндров.

Направив вектор первого цилиндра, как указано выше, остальные лучи нумеруют в последовательности вспышек 1—4—2—6—3—5 (рис. 47, е). Нумерация может выполняться по направлению движения часовой стрелки и в обратном направлении, так как векторные диаграммы в расчете крутильных колебаний служат только для определения геометрической суммы векторов, характеризующих абсолютную величину возбудителя колебаний. Векторные диаграммы для других порядков  $v$  получаются из изображенной для половинного порядка путем умножения углов  $\xi_{y,1}$  на  $2v$  (рис. 47, е—к). Векторная диаграмма для первого порядка, как и в случае двухтактного двигателя, имеет вид схемы заклинки кривошипов.

Заметим, что векторные и фазовые диаграммы, характеризующие уравнивание двигателя, строятся так же, но векторы сил инерции масс первого цилиндра направляются вертикально

вверх, что соответствует принятой ориентации координатных осей [20, стр. 181]; в настоящем курсе это значения не имеет. Кроме того, силам инерции не свойственны дробные порядки.

Отметим некоторые особенности векторных диаграмм.

1. Для так называемых главных порядков, номер которых является кратным числу вспышек в двигателе за один оборот коленчатого вала, все векторы диаграммы получают направление, совпадающее с вектором первого цилиндра (см. рис. 47, д и л), это обуславливает наибольшую работу возмущающих моментов, передаваемую системе (§ 47), и влечет за собой возникновение сильных колебаний.

2. Векторные диаграммы для порядков  $zi + 1$  двухтактных двигателей и для порядков  $0,5zi + 1$  четырехтактных по форме совпадают со схемой заклинки кривошипов ( $z$  — число цилиндров,  $i$  — числа натурального ряда, начиная с нуля).

3. Векторные диаграммы оказываются одинаковыми (или зеркально подобными, что для нас не имеет значения) для тех порядков, сумма или разность номеров которых делится без остатка на число вспышек в двигателе за один оборот вала.

#### § 47. Работа, передаваемая системе группой возмущающих моментов одного порядка при резонансе

Допустим, что на все массы двигателя действуют гармонические возмущающие моменты одного порядка  $v$ . Учтем зависимость (5.30), определяющую начальные фазы этих моментов, которая базируется на схеме заклинки кривошипов данного вала (рис. 48, а) и отражена на векторной диаграмме (рис. 48, б). Тогда выражение (5.28) для момента на массе с номером  $y$  может быть представлено в виде (при  $\psi_1 = 0$ )

$$M'_y = M_y \sin(v\Omega t + \psi_y) = M_y \sin(v\Omega t + v\xi_{y,1}). \quad (5.31)$$

При некотором скоростном режиме двигателя наступает резонанс ( $v\Omega = \omega_y$ ). Форма резонансных колебаний при этом совпадает с формой свободных колебаний, а начальные фазы колебаний  $\xi_y$  всех масс установятся одинаковыми. Если в пределах двигателя имеется узел, то начальные фазы колебаний масс за узлом будут  $\xi_y + 180^\circ$  — это соответствует изменению знака перед амплитудой и учитывается формой колебаний.

Колебания массы с номером  $y$  будут описываться выражением

$$\varphi_y = A_{yR} \sin(v\Omega t + \xi_y).$$

Каждый возмущающий момент будет передавать системе работу  $W_{my}$  (5.26)

$$W_{my} = \pi M_y A_{yR} \sin \varepsilon_y,$$



где угол сдвига фаз  $\varepsilon_y$  определяется разностью фаз момента и колебания

$$\varepsilon_y = (\nu\Omega t + \nu\xi_{y,1}) - (\nu\Omega t + \xi_y) = \nu\xi_{y,1} - \xi_y. \quad (5.32)$$

От всех  $z$  возмущающих моментов системе будет передаваться работа

$$W_m = \sum_{y=1}^z W_{my} = \sum_{y=1}^z \pi M_y A_{yR} \sin(\psi_y - \xi_y). \quad (5.33)$$

Как и в случае действия на систему одного возмущающего момента, работа, передаваемая системе, будет увеличиваться по мере

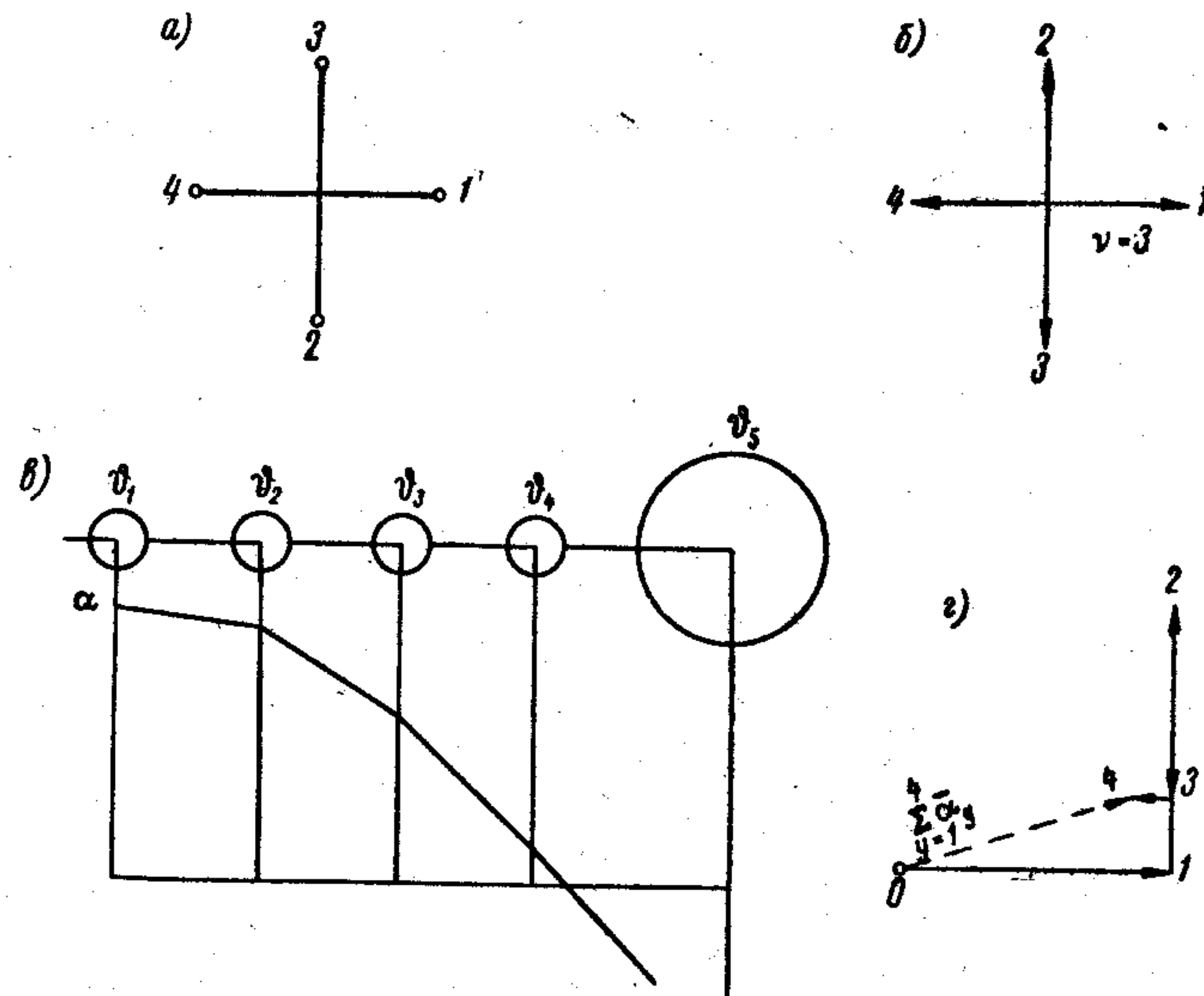


Рис. 48. К определению работы возмущающих моментов: а — схема заклинки кривошипов; б — векторная диаграмма третьего порядка; в — форма колебаний; г — векторный многоугольник.

приближения угла сдвига фаз  $\varepsilon_y$  к  $90^\circ$ , но этого не достигается потому, что все  $\varepsilon_y$  различны. Первый из компонентов  $\varepsilon_y$ , т. е.  $\nu\xi_{y,1}$ , определяется в зависимости от заклинки кривошипов, а второй  $\xi_y$  является постоянным для данной формы колебаний. Углы сдвига фаз  $\varepsilon_y$  устанавливаются при резонансе такими, при которых осуществляется наибольшая передача системе энергии от всех возмущающих моментов.

В обычных двигателях цилиндры и тепловые процессы в них одинаковы. Пренебрегая некоторым различием в индикаторных диаграммах, зависящим от качества регулировки, можно считать, что амплитуды гармонических составляющих крутящего момента каждого порядка на всех кривошипах также одинаковы ( $M_1 =$

$= M_2 = \dots = M_z$ ). Амплитуды колебаний масс можно выразить (на основании известного предположения о совпадении формы резонансных и формы свободных колебаний) через амплитуду первой массы  $A_{1R}$ . При  $\alpha_1 = 1$  имеем  $A_y = \alpha_y A_{1R}$ . Тогда (5.33) примет вид

$$W_m = \pi M_1 A_{1R} \sum_{y=1}^z \alpha_y \sin(\psi_y - \xi_y). \quad (5.34)$$

Если дальнейшая проработка курса предполагается на основании способа Терских, то здесь следует перейти к изучению § 48, не рассматривая оставшейся части данного параграфа.

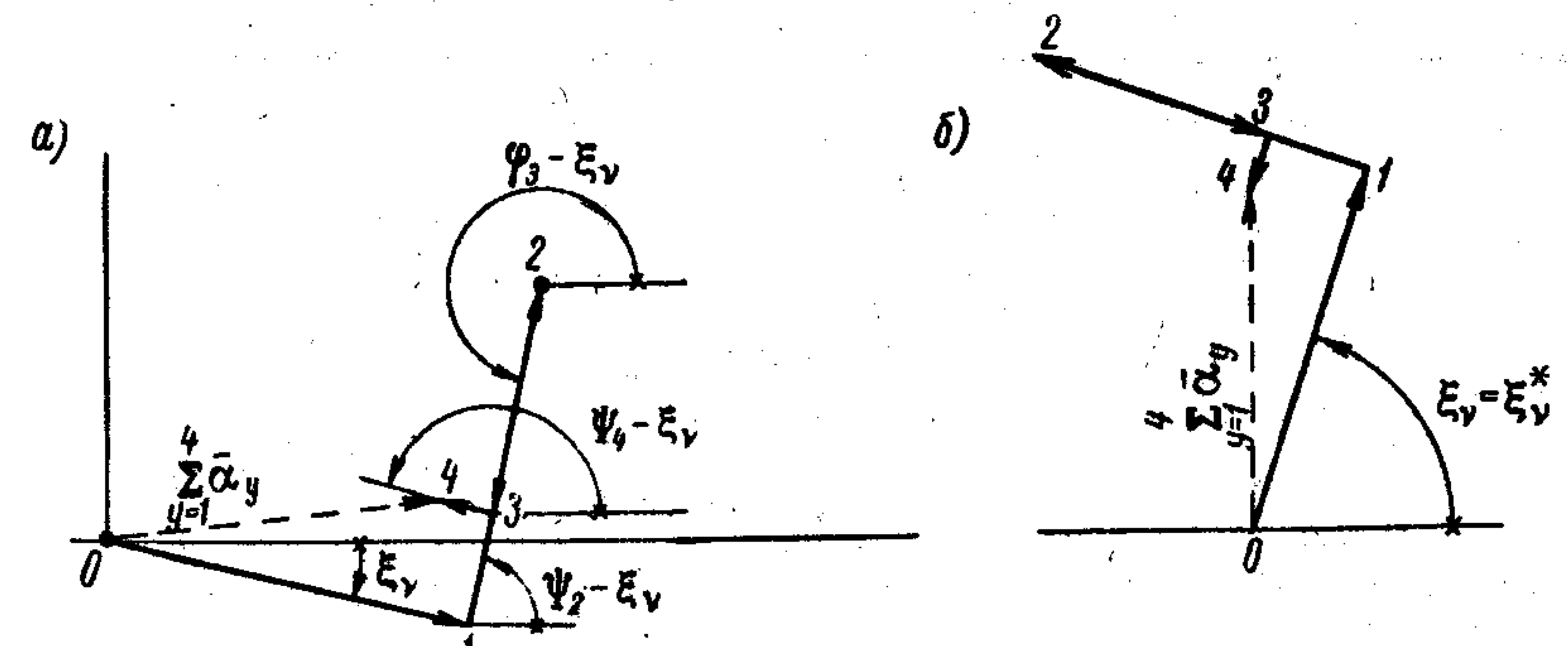


Рис. 49. К определению работы возмущающих моментов при резонансе.

Входящую в это выражение сумму гармоник можно представить в координатной системе в виде вертикальной проекции геометрической суммы векторов  $\bar{\alpha}_y$ , направленных под углами  $\psi_y - \xi_y$  к горизонтальной оси этой системы (рис. 49, а—б), или как вертикальную проекцию геометрической суммы тех же векторов, направленных к горизонтальной оси под углами  $\psi_y$ , а затем повернутых на угол  $\xi_y$ . Такую же вертикальную проекцию дает замыкающий вектор, обозначенный  $\sum \bar{\alpha}_y$ . При некотором значении  $\xi_y = \xi_y^*$  этот замыкающий вектор совместится с вертикальной координатной осью и определит максимальную величину работы, передаваемой системе всеми возмущающими моментами при резонансе.

Эти соображения позволяют представить выражение работы возмущающих моментов (5.34) для резонансного режима в виде

$$W_m = \pi M_1 A_{1R} \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y. \quad (5.35)$$

Во всех выражениях, вместо резонансной амплитуды первой массы  $A_{1R}$  может быть введено отношение  $A_{1R}/\alpha_1$  (3.24). Последняя



зависимость при этом принимает вид

$$W_m = \pi M_1 \left( \frac{A_{tR}}{a_t} \right) \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y, \quad (5.36)$$

что позволяет выразить работу возмущающих моментов в функции безразмерной и резонансной амплитуды любой массы с номером  $y$ .

Построение замыкающего вектора  $\sum \bar{\alpha}_y$ , называемого геометрической суммой безразмерных амплитуд, одноузловой формы колебаний для моментов третьего порядка четырехцилиндрового двухтактного двигателя показано на рис. 48. На основании схемы заклинки кривошипов  $a$  построена векторная диаграмма третьего порядка  $b$ . Векторный многоугольник  $z$  строим откладывая векторы  $\alpha_y$ , заимствуемые из формы колебаний  $b$ , в направлениях одноименных лучей векторной диаграммы. Геометрическая сумма амплитуд получается как замыкающая  $\sum \bar{\alpha}_y$ .

Вместо описанного построения, геометрическую сумму безразмерных амплитуд можно найти аналитически, как диагональ прямоугольника, стороны которого представляют собой суммы проекций векторов  $\bar{\alpha}$  на координатные оси

$$\left| \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y \right| = \sqrt{\left( \sum_{y=1}^z \alpha_y \cos \psi_y \right)^2 + \left( \sum_{y=1}^z \alpha_y \sin \psi_y \right)^2}. \quad (5.37)$$

Для главных порядков, когда  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_z$ , геометрическая сумма превращается в алгебраическую

$$\sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y = \sum_{y=1}^z \alpha_y. \quad (5.38)$$

Если двигатель находится не в начале, а в середине системы, то ни расчетные зависимости, ни построения по существу не меняются. Лишь геометрическая сумма безразмерных амплитуд в соответствии с обозначениями, принятыми в § 25, записывается в виде

$$\left| \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_{c+y} \right| = \sqrt{\left( \sum_{y=1}^z \alpha_{c+y} \cos \psi_{c+y} \right)^2 + \left( \sum_{y=1}^z \alpha_{c+y} \sin \psi_{c+y} \right)^2}. \quad (5.39)$$

#### § 48. Комплексные амплитуды возмущающих моментов

Как было показано в § 47, динамическое воздействие возмущающих моментов связано с величиной геометрической суммы их векторов. Последнюю удобно находить, представив амплитуды этих моментов в комплексных выражениях.

Если на массы части системы, заключенной в двигателе, действуют  $z$  моментов вида

$$M'_y = M_y \sin(\nu \Omega t + \psi_y),$$

то их амплитуды могут быть выражены комплексными числами

$$\bar{M}_y = M_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y). \quad (5.40)$$

Символ  $\bar{M}_y$  — комплексная амплитуда возмущающего момента на массе с номером  $y$  — определяет не только действительную величину амплитуды этого момента — модуль комплексного числа  $M_y$  — но и его начальную фазу  $\psi_y$ .

На комплексной плоскости с вещественной и мнимой координатными осями, которая представлена на рис. 50, амплитуда возмущающего момента изображается вектором  $\bar{M}_y$ , т. е. определяется по величине и начальной фазе. Последняя задается аналитически или векторной диаграммой. Безразмерная комплексная амплитуда возмущающего момента согласно (5.23) обозначается тем же символом, но представлена прямым шрифтом:

$$\bar{M}_y = M_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y) = e_0 \bar{M}_y = e_0 M_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y). \quad (5.41)$$

Символом  $M_y$  (без черточки) обозначен здесь модуль комплексного числа — безразмерная амплитуда того же момента.

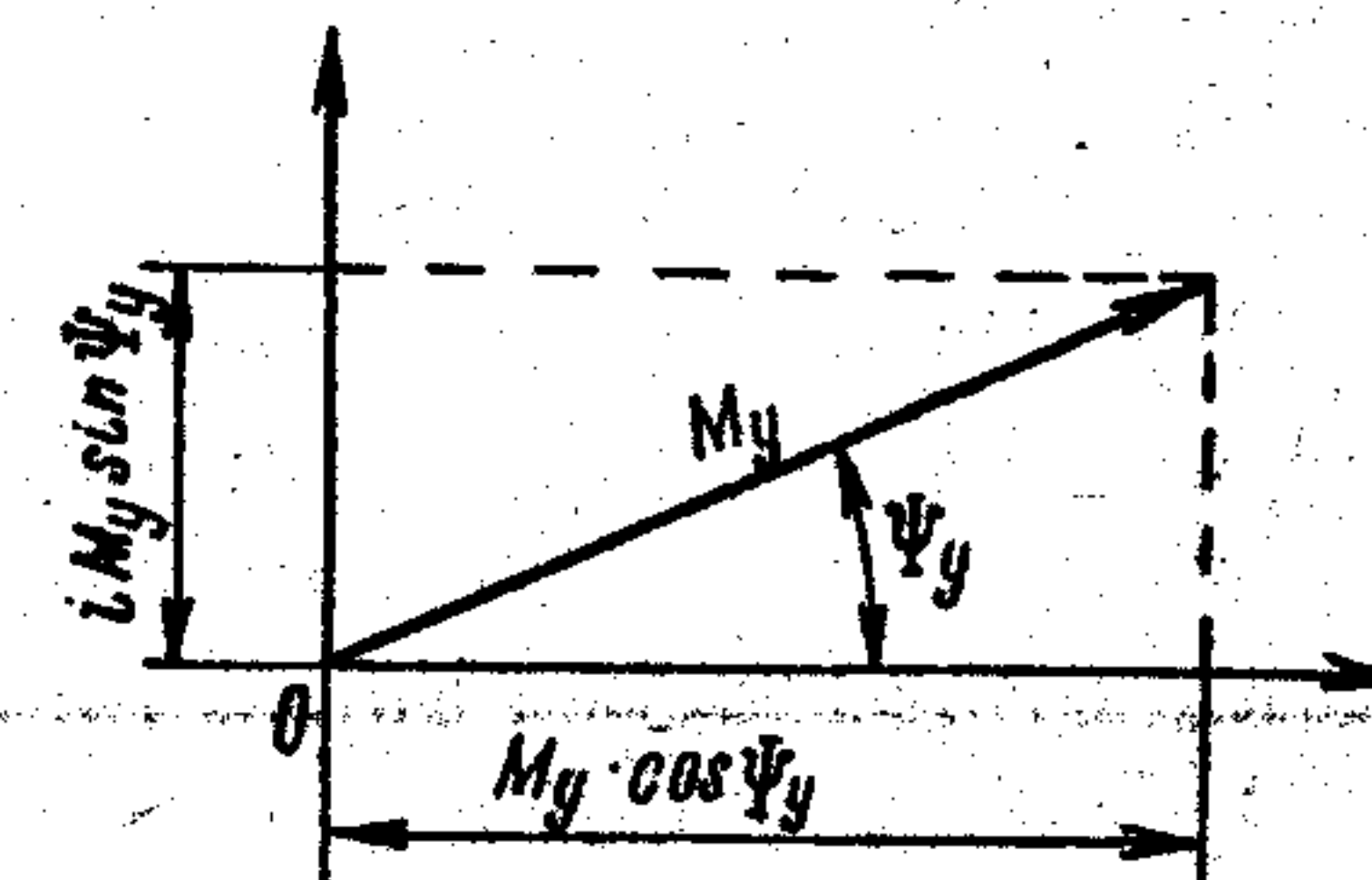


Рис. 50. Представление амплитуды гармонической составляющей в виде вектора на комплексной плоскости.

#### § 49. Учет работы возмущающих моментов двигателя, расположенного в начале системы, по способу Терских

В этой части расчет по способу Терских по существу не отличается от изложенного в § 44. Но формулы представляются в несколько ином, более общем виде.

Рассмотрим полученное выше выражение (5.33) для определения работы  $z$  возмущающих моментов. Сумму гармонических функций одного порядка всегда можно заменить одной гармоникой того же порядка. Работу всех моментов при этом мы выразим работой некоторого эквивалентного момента. Этот момент, называемый *резонансным возбудителем системы*, с амплитудой  $M_z^{(1)}$  представим приложенным к последней массе двигателя  $\theta_z$ , которая колеблется с амплитудой  $A_z$ . Работа резонансного возбудителя за цикл должна быть равна  $W_m$ . Поэтому

$$W_m = \sum_{y=1}^z \pi M_y A_y \sin(\psi_y - \xi_y) = \pi M_z^{(1)} A_z \sin(\gamma - \xi_y), \quad (5.42)$$

где сдвиг фаз обозначен некоторой величиной  $(\gamma - \xi_y)$ .



На абсолютное значение максимума работы возмущающих моментов, очевидно, не повлияет изменение начала отсчета фаз, поэтому положим  $\xi_y = 0$ . Тогда

$$W_m = \pi \sum_{y=1}^z M_y A_y \sin \psi_y = \pi M_z^{(1)} A_z \sin \gamma. \quad (5.43)$$

Максимум работы наступает при  $\gamma = 90^\circ$ , что сопровождается соответствующим изменением фаз всех векторов, но не отражается на их взаимном расположении.

Рассматривая это равенство, замечаем, что его средняя часть может интерпретироваться как сумма проекций  $z$  векторов  $\bar{M}_y A_y$  направленных к горизонтальной координатной оси под углами  $\psi_y$  соответствующими направлениям лучей векторной диаграммы того же порядка, а правая — как проекция результирующего вектора на ту же ось.

Комплексные амплитуды включают в себя соответствующие начальные фазы и позволяют выполнять указанное графическое построение в комплексной плоскости, а потому могут быть введены в выражение (5.43) вместо соответствующих им членов. При резонансе

$$W_m = \pi |(\bar{M}_1 A_{1R} + \bar{M}_2 A_{2R} + \dots + \bar{M}_z A_{zR})| = \pi \left| \sum_{y=1}^z \bar{M}_y A_{yR} \right| = \pi |\bar{M}_z^{(1)} A_{zR}|. \quad (5.44)$$

Запишем развернутые выражения комплексных амплитуд (5.40).

$$\bar{M}_y = M_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y); \quad \bar{M}_1 = M_1 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = M_1. \quad (5.45)$$

$\bar{M}_1$  выражается только вещественной частью, так как  $\psi_1$  принято равным нулю ( $\xi_{1,1} = 0$ ;  $\psi_1 = \nu \xi_{1,1} = 0$ ). Теперь выразим действительные амплитуды через безразмерные и  $A_{1R}$ . Согласно (3.25) при  $\alpha_k = \alpha_1 = 1$  и  $t = y$

$$A_{1R} = \frac{A_{tR}}{\alpha_t}; \quad A_{yR} = \alpha_y A_{1R}; \quad A_{zR} = \alpha_z A_{1R} \quad (5.46)$$

и введем новые величины — отношения комплексных амплитуд возмущающих моментов к амплитуде момента на первой массе (действительной или комплексной безразлично). Имея в виду, что все цилиндры дизеля и процессы в них одинаковы, а потому  $M_1 = M_2 = \dots = M_z$ , получим

$$\bar{m}_z^{(1)} = \frac{\bar{M}_z^{(1)}}{M_1}; \quad \bar{m}_y = \frac{\bar{M}_y}{M_1} = \frac{M_y}{M_1} (\cos \psi_y + i \sin \psi_y) = \cos \psi_y + i \sin \psi_y, \quad (5.47)$$

откуда находим

$$\bar{M}_z^{(1)} = M_1 \bar{m}_z^{(1)} \quad \text{и} \quad \bar{M}_y = M_1 \bar{m}_y. \quad (5.48)$$

На основании (5.46) и (5.48) выражение (5.44) может быть приведено к виду

$$W_m = \pi M_1 A_{1R} \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_y \alpha_y \right| = \pi M_1 A_{1R} |\bar{m}_z^{(1)} \alpha_z|. \quad (5.49)$$

Из последнего уравнения найдем величину  $\bar{m}_z^{(1)} \alpha_z$  и, используя (5.47), раскроем ее физический смысл.

$$|\bar{m}_z^{(1)} \alpha_z| = \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_y \alpha_y \right| = \left| \sum_{y=1}^z \alpha_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y) \right| = \left| \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y \right|. \quad (5.50)$$

Таким образом произведение относительной величины комплексной амплитуды резонансного возбудителя на амплитуду колебаний последней массы двигателя (к которой он мыслится приложенным) представляет собой геометрическую сумму безразмерных амплитуд. Последняя может быть найдена на основании построения, аналогичного выполненному на рис. 48. Безразмерные амплитуды заимствуются из 4-й строки таблицы Терских, а направления векторов — из векторной диаграммы соответствующего порядка.

Из выражения (5.50) та же величина может быть определена через вещественные и мнимые части комплексных безразмерных амплитуд возмущающих моментов

$$|\bar{m}_z^{(1)} \alpha_z| = \sqrt{\left( \sum_{y=1}^z \alpha_y \cos \psi_y \right)^2 + \left( \sum_{y=1}^z \alpha_y \sin \psi_y \right)^2}. \quad (5.51)$$

Для наиболее часто применяемых схем заклинки кривошипов и последовательностей вспышек эту величину можно получить непосредственно по специальным таблицам (табл. V).

Для главных порядков, при которых  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_z$  и все векторы векторной диаграммы приобретают одинаковые направления, на основании (5.51) находим

$$\bar{m}_z^{(1)} \alpha_z = \sum_{y=1}^z \alpha_y \sqrt{\cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1} = \sum_{y=1}^z \alpha_y = \frac{H_z^{(1)}}{-\Delta} \alpha_z, \quad (5.52)$$

что представляет собой алгебраическую сумму безразмерных амплитуд. Последнее равенство (5.52) дано без доказательства.  $H_z^{(1)}$  находится с помощью табл. II.

Вводя в выражение (5.49) безразмерную амплитуду возмущающего момента вместо действительной, а вместо комплексной амплитуды — ее модуль, окончательно получим

$$W_m = \frac{\pi}{e_0} M_1 A_{1R} m_z^{(1)} \alpha_z \text{ кгсм/цикл.} \quad (5.53)$$

Вычисление  $m_z^{(1)} \alpha_z$  показано в примере.

В некоторых случаях резонансный возбудитель целесообразно предполагать приложенным не к последней массе двигателя  $z$ ,



а к некоторой другой массе ( $t$ ), которая может находиться за пределами двигателя, т. е. к любой из  $p$  масс системы. Амплитуда такого возбудителя обозначается символом  $\bar{M}_{tR}^{(1)(p)}$ . Работа, передаваемая системе обоими возбудителями, должна быть одинаковой, поэтому на основании (5.49) запишем

$$W_m = \pi M_{tR}^{(1)(p)} A_{tR} = \pi M_1 A_{1R} m_z^{(1)} \alpha_z, \quad (5.54)$$

откуда, используя соотношение  $A_{tR} = \alpha_t A_{1R}$ , находим

$$M_{tR}^{(1)(p)} = \frac{A_{1R}}{A_{tR}} M_1 m_z^{(1)} \alpha_z = \frac{M_1}{\alpha_t} m_z^{(1)} \alpha_z. \quad (5.55)$$

В случаях, когда двигатель расположен в начале системы, при подсчете безразмерных амплитуд колебаний за единицу принимается колебание его первой массы, поэтому здесь целесообразно принять  $\alpha_t = \alpha_1 = 1$ . При этом

$$|M_{tR}^{(1)(p)}|_{\alpha_t=\alpha_1=1} = M_1 m_z^{(1)} \alpha_z = M_z^{(1)} \alpha_z. \quad (5.56)$$

#### § 50. Учет работы возмущающих моментов двигателя, расположенного в середине системы, по способу Терских

**Первый способ.** Если двигатель находится в середине системы, т. е. перед ним расположено  $c$  масс, то первая масса двигателя отличается индексом  $c+1$ , а последняя  $c+z$ . При определении работы, передаваемой системе возмущающими моментами, возникающими на массах двигателя, можно пользоваться полученными выше формулами с некоторыми отличиями.

Работу этих моментов при резонансе выразим зависимостью, аналогичной (5.44)

$$W_m = \pi \left| \sum_{y=1}^z \bar{M}_{c+y} A_{c+y} \right| = \pi M_{tR}^{(1)(p)} A_{tR}, \quad (5.57)$$

где резонансный возбудитель отнесен к  $t$  массе.

Амплитуду каждого момента обозначим  $M_1$  и положим

$$M_{c+1} = M_{c+2} = \dots = M_{c+z} = M_1.$$

Пользуясь соотношениями (5.46) и (5.48), перепишем среднюю часть равенства

$$W_m = \pi M_1 A_{1R} \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_{c+y} \alpha_{c+y} \right| = \pi M_{tR}^{(1)(p)} A_{tR}. \quad (5.58)$$

Отсюда получим значение амплитуды резонансного возбудителя

$$M_{tR}^{(1)(p)} = \frac{M_1 A_{1R}}{A_{tR}} \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_{c+y} \alpha_{c+y} \right| = \frac{M_1}{\alpha_t} \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_{c+y} \alpha_{c+y} \right| = \frac{M_1}{\alpha_t} \left| \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_{c+y} \right|. \quad (5.59)$$

Подставляя полученное выражение в первое равенство (5.54), находим работу возмущающих моментов

$$W_m = \pi M_{tR}^{(1)(p)} A_{tR} = \pi M_1 \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_{c+y} \alpha_{c+y} \right| \left( \frac{A_{tR}}{\alpha_t} \right) = \pi M_1 \left( \frac{A_{tR}}{\alpha_t} \right) \left| \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_{c+y} \right|. \quad (5.60)$$

Для главных порядков [аналогично (5.52)], когда  $|\bar{m}_{c+1}| = 1$ , находим

$$M_{tR}^{(1)(p)} = \frac{M_1}{\alpha_t} \sum_{y=1}^z \alpha_{c+y}. \quad (5.61)$$

Таким образом, при расположении двигателя в середине системы амплитуда резонансного возбудителя находится теми же графическим и аналитическим способами, но при  $\psi_{c+1} = 0$ . Значения начальных фаз  $\psi_y = v \xi_{c+y, c+1}$  сохраняются соответствующими векторной диаграмме данного порядка.

**Второй способ (основные зависимости).** В § 26 динамические свойства части системы, состоящей из группы равных масс, были выражены посредством двух «упругих» масс со стойкостями  $N_{c+1}^3$  и  $N_{c+z}^3$ , связанными между собой «инертным» соединением с податливостью  $E_{c+1, c+z}^3$ . Такое мероприятие позволило существенно упростить процесс уточнения частоты свободных колебаний системы.

Динамическое действие на систему группы возмущающих моментов заменяется действием двух эквивалентных возбудителей с амплитудами  $\bar{M}_{c+1}^3$  и  $\bar{M}_{c+z}^3$ , которые прилагаются к упомянутым выше «упругим» массам

$$\bar{M}_{c+1}^3 = \bar{M}_{c+1} \bar{m}_1^3 \quad \text{и} \quad \bar{M}_{c+z}^3 = \bar{M}_{c+1} \bar{m}_z^3,$$

где относительные величины возбудителей находятся по формулам

$$\bar{m}_1^3 = \frac{\bar{M}_{c+1}^3}{\bar{M}_{c+1}} = \frac{1}{\alpha_z^{[1]}} \sum_{y=1}^z \bar{m}_y \alpha_{z-y+1}^{[1]};$$

$$\bar{m}_z^3 = \frac{\bar{M}_{c+z}^3}{\bar{M}_{c+1}} = \frac{1}{\alpha_z^{[1]}} \sum_{y=1}^z \bar{m}_y \alpha_y^{[1]}. \quad (5.62)$$

Амплитуды колебаний, отмеченные верхним индексом [1], соответствуют случаю, когда первая масса двигателя закреплена (бесконечно велика). Они подсчитываются при заданной частоте возмущающих моментов, но при отсутствии последних, по формуле

$$\alpha_y^{[1]} = \frac{\sin 2(y-1)\varphi}{\sin 2\varphi}, \quad \text{где } \varphi = \arcsin 0,5\Delta, \quad (5.63)$$



Вычисление возбудителя системы  
(к примеру)

6, 12, ...		1, 5, 7, 11, ...		2, 4, 8, 10, ...		3, 9, 15	
№ цикл.	$a_y$	$\sum_{y=1}^6 a_y \cos \xi = -0,080$		$\sum_{y=1}^6 a_y \cos 2\xi = 0,152$		$\sum_{y=1}^6 a_y \cos 3\xi = 0,491$	
	1,000	$\sum_{y=1}^6 a_y \sin \xi = -0,045$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 2\xi = -0,105$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 3\xi = 0$	
	0,981	$\sum_{y=1}^6 a_y \cos \xi = -0,080$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 2\xi = -0,105$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 3\xi = 0$	
	0,947	$\sum_{y=1}^6 a_y \cos \xi = -0,080$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 2\xi = -0,105$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 3\xi = 0$	
	0,890	$\sum_{y=1}^6 a_y \cos \xi = -0,080$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 2\xi = -0,105$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 3\xi = 0$	
	0,817	$\sum_{y=1}^6 a_y \cos \xi = -0,080$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 2\xi = -0,105$		$\sum_{y=1}^6 a_y \sin 3\xi = 0$	
$\sum_{y=1}^6 a_y = 5,365$		$\sum_{y=1}^6 a_y = 0,092$		$\sum_{y=1}^6 a_y = 0,183$		$\sum_{y=1}^6 a_y = 0,491$	

на основании которой подсчитаны соответствующие таблицы (56, Прилож.).

Работа этих эквивалентных возбудителей определяется по формуле, аналогичной (5.56)

$$W_m = \frac{\pi}{e_0} |\bar{M}_{c+1}^3 A_{c+1} + \bar{M}_{c+z}^3 A_{c+z}| = \frac{\pi}{e_0} M_{iR}^{(1)(p)} A_{iR} \text{ кГсм/цикл. (5.63)}$$

Амплитуда резонансного возбудителя системы, приложенного к массе с номером  $t$ , определяется из зависимости

$$M_{iR}^{(1)(p)} = \frac{M}{a_t} \sqrt{(a_1 a_{c+1} + a_z a_{c+z})^2 + (b_1 a_{c+1} + b_z a_{c+z})^2}, \quad (5.64)$$

где  $a$  и  $b$  компоненты вещественных и мнимых частей комплексных выражений  $\bar{m}_1^3$  и  $\bar{m}_z^3$ , которые заимствуются из специальных таблиц, составленных для различных векторных диаграмм [57, Приложение].

Для главных порядков расчет существенно упрощается. В этом случае эквивалентные возбудители будут одинаковы

$$\bar{M}_{c+1}^3 = \bar{M}_{c+z}^3 = \bar{M}_{c+1}^3 \left( \frac{H_z^3}{-\Delta} \right),$$

а резонансный возбудитель системы и его работа получают выражения

$$M_{iR}^{(1)(p)} = \frac{M}{a_t} \left[ \frac{H_z^3}{-\Delta} (a_{c+1} + a_{c+z}) \right]; \quad W_m = \frac{\pi}{e_0} M_{iR}^{(1)(p)} A_{iR}. \quad (5.65)$$

**Пример.** Определение геометрических сумм безразмерных амплитуд (возбудителей) силовой установки танкера с двигателем 6ДР 30/50.

Форма — одноузловая. Последовательность вспышек 1—6—2—4—3—5.

Весь расчет выполнен в табл. 13. Безразмерные амплитуды (из таблицы Терских) помещены во втором столбце таблицы, которая составлена на основании формул (5.37), (5.38) или (5.50).

Если расчет производится с комплексными числами, то столбцы с синусными составляющими отвечают мнимым величинам.



## ДЕМПФИРУЮЩИЕ МОМЕНТЫ И ИХ РАБОТА

## § 51. Виды демпфирующих сопротивлений

Сопротивления, способствующие уменьшению амплитуд колебаний путем поглощения энергии колебаний, называются *демпфирующими*. Эти сопротивления обуславливаются различными видами трения, возникающими в кинематических парах кривошипно-шатунного механизма и в материале, из которого выполнены его звенья. Такие же или отличные от них сопротивления имеют место в валопроводах, их соединительных элементах (муфтах) и приемниках энергии.

Сила трения и момент этой силы  $V$  обычно определяются в зависимости от скорости колебаний в некоторой степени  $q$  и от постоянной коэффициента демпфирования  $b$ . Они всегда направлены в сторону, обратную скорости относительного перемещения деталей (это условно указывается введением в формулу символа  $\text{sign } \frac{d\varphi}{dt}$ ). В общем случае, когда  $q \neq 1$  и  $q \neq 0$

$$V = -b \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^q \text{sign } \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6.01)$$

Если трение пропорционально скорости колебаний — линейное, «вязкое» трение — ( $q = 1$ )

$$V = -b \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \text{sign } \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6.02)$$

Для сухого трения ( $q = 0$ )

$$V = -b \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^0 \text{sign } \frac{d\varphi}{dt} = -V_0 \text{sign } \frac{d\varphi}{dt}, \quad (6.03)$$

где  $V_0 = \text{const}$  представляет собой постоянную силу трения.

Сухое трение — термин условный, так как помимо Кулонова трения, которое наблюдается при перемещении деталей без смазки или при разрыве масляной пленки, такой же характер носит вязкое трение, встречающееся при дросселировании жидкости (в частности, масла). Этот вид трения будем называть *постоянным трением*.

Демпфирующие силы и их моменты частично поглощают энергию колебаний и преобразуют ее в тепловую энергию, которая отводится от системы посредством окружающей среды или циркулирующей

в двигателе охлаждающей жидкости. Так как энергия колебаний — кинетическая энергия, то с ее понижением уменьшаются амплитуды колебаний системы и амплитуды возникающих в ней эластических моментов. На этом явлении основан принцип работы демпфера — успокоителя колебаний.

## § 52. Работа демпфирующих сопротивлений

В принятом способе расчета малое трение заменяется эквивалентным по своему воздействию на систему приведенным линейным трением, которое, независимо от своего характера, изменяется при гармонических колебаниях по гармоническому закону.

Рассмотрим трение на массе  $y$  (например, фрикционные потери на приведенной массе кривошипно-шатунного механизма), которая перемещается по закону

$$\varphi_y = A_y \sin(\omega t + \xi_y); \quad \dot{\varphi}_y = A_y \omega \cos(\omega t + \xi_y). \quad (6.04)$$

Приведенный демпфирующий момент  $V_y$  здесь изменяется, как и скорость колебаний, по закону косинуса, но имеет отрицательный знак. Обозначив амплитуду демпфирующего момента  $G_y$ , получим

$$V_y = -G_y \cos(\omega t + \xi_y) = G_y \sin[(\omega t + \xi_y) + 270^\circ] = G_y \sin[(\omega t + \xi_y) - 90^\circ]. \quad (6.05)$$

По фазе, как видно из полученного выражения, этот момент отстает от колебания на  $90^\circ$  (сравнить с данными § 36), т. е. сдвиг фаз будет  $\varepsilon = -90^\circ$ .

Работа демпфирующего момента при этом получает выражение, аналогичное (5.27)

$$W_{\text{тр } y} = \pi G_y A_{yR} \sin \varepsilon = -\pi G_y A_{yR}.$$

В последующем принимается абсолютное значение работы

$$W_{\text{тр } y} = \pi G_y A_{yR} = \pi G_y A_{yR} \alpha_y. \quad (6.06)$$

Амплитуду  $G_y$  приведенного демпфирующего момента можно найти, приравнявая его работу за цикл работе действительного момента  $V_y^*$  за тот же цикл

$$W_{\text{тр } y} = \int_0^{2\pi} V_y d\varphi = \int_0^{2\pi} V_y^* d\varphi = \pi G_y A_{yR}; \quad G_y = \frac{W_{\text{тр } y}}{\pi A_{yR}}. \quad (6.07)$$

Так, работа постоянного (Кулонова) трения (6.03) на массе за цикл может быть найдена непосредственно

$$\left. \begin{aligned} dW_{\text{тр } y} &= V_0 d\varphi \\ \varphi_y &= A_y \sin \omega t \end{aligned} \right\} W_{\text{тр } y} = \int_0^{2\pi} V_0 A_y \cos \omega t d\omega t = \\ = 4V_0 A_y \int_0^{\pi/2} \cos \omega t d\omega t = 4V_0 A_y, \quad (6.08)$$



а приведенный демпфирующий момент на основании (6.07) буде

$$W_{\text{тр } y} = 4V_0 A_y = \pi G_y A_y \dots G_y = \frac{4}{\pi} V_0.$$

Если трение возникает в соединении  $y, y+1$ , то амплитуда деформации обозначается символом  $B_{y, y+1} = A_{y+1} - A_y$ , момент сил трения и его амплитуда обозначаются  $V_{y, y+1}$  и  $G_{y, y+1}$ , а работа этого момента —  $W_{\text{тр } y, y+1}$ . Выражающие их зависимости, полученные путем аналогичных рассуждений, оказываются идентичными (6.05 — 6.07)

$$V_{y, y+1} = G_{y, y+1} \cos(\omega t + \xi_{y, y+1}); \quad G_{y, y+1} = \frac{W_{\text{тр } y, y+1}}{\pi B_{y, y+1}};$$

$$W_{\text{тр } y, y+1} = \pi G_{y, y+1} B_{y, y+1}. \quad (6.09)$$

Работа постоянного трения аналогично (6.08) выражается зависимостью

$$W_{\text{тр } y, y+1} = 4V_0 B_{y, y+1} = 4V_0 e_{y, y+1} F_{y, y+1}. \quad (6.08, a)$$

Если момент сил трения на массе  $y$  пропорционален скорости колебаний, т. е.  $G_y = b\omega A_y$ , то работа такого момента на основании (6.06) будет пропорциональна квадрату амплитуды колебаний

$$W_{\text{тр } y} = \pi G_y A_y = \pi b\omega A_y^2, \quad (6.10)$$

где  $b$  — коэффициент демпфирования.

Для работы такого трения в соединении получается аналогичное выражение, которое представим в трех видах:

$$W_{\text{тр } y, y+1} = \pi b\omega B_{y, y+1}^2 = 0,33bNB_{y, y+1}^2 = 0,33bNe_{y, y+1}^2 F_{y, y+1}^2. \quad (6.11)$$

Работу демпфирующих сопротивлений удобно выражать через коэффициент пропорциональности  $\omega$ :

в случае, когда трение не зависит от скорости колебаний (постоянное),

$$W_{\text{тр } y} = \omega_y A_y, \quad \text{где } \omega_y = \pi G_y; \quad (6.12)$$

в случае, когда трение пропорционально скорости колебаний (линейное),

$$W_{\text{тр } y} = \omega_y A_y^2, \quad \text{где } \omega_y = \pi b\omega. \quad (6.13)$$

Аналогичные зависимости имеются для трения в соединениях.

### § 53. Удельное трение

Удельным трением  $\mu$  называется отношение амплитуды приведенного демпфирующего момента  $G_y$  на массе к амплитуде инерционного момента той же массы  $R_y = |\theta_y \ddot{\varphi}_y|_{\text{max}} = \theta_y \omega^2 A_y$ . Если

удельное трение вычисляется для некоторого соединения  $y, y+1$ , приведенный демпфирующий момент относят к амплитуде эластического момента  $F_{y, y+1}$  в этом соединении

$$\mu_y = \frac{G_y}{\theta_y \omega^2 A_y} \quad \text{и} \quad \mu_{y, y+1} = \frac{G_{y, y+1}}{F_{y, y+1}}. \quad (6.14)$$

Заменяя амплитуды демпфирующих моментов на основании (6.07) и (6.09), преобразуем выражения для удельного трения

$$\mu_y = \frac{G_y}{\theta_y \omega^2 A_y} = \frac{W_{\text{тр } y}}{\pi A_y \theta_y \omega^2 A_y} = \frac{W_{\text{тр } y}}{2\pi [0,5\theta_y (A_y \omega)^2]}; \quad (6.15)$$

$$\mu_{y, y+1} = \frac{G_{y, y+1}}{F_{y, y+1}} = \frac{W_{\text{тр } y, y+1}}{2\pi (0,5B_{y, y+1} F_{y, y+1})}.$$

Отсюда видно, что удельное трение на массе численно равно уменьшенному в  $2\pi$  раз отношению работы трения за одно колебание к максимальной кинетической энергии колебания массы,  $0,5\theta_y (A_y \omega)^2$ . Удельное трение в соединении находится в аналогичном отношении к максимальной потенциальной энергии деформации, запасаемой этим соединением ( $0,5 B_{y, y+1} F_{y, y+1}$ ).

Последнее выражение можно преобразовать на основании (3.32)

$$B_{y, y+1} = A_{y+1} - A_y = F_{y, y+1} e_{y, y+1}; \quad F_{y, y+1} = \frac{B_{y, y+1}}{e_{y, y+1}}. \quad (6.16)$$

$$\mu_{y, y+1} = \frac{W_{\text{тр } y, y+1}}{\pi e_{y, y+1} F_{y, y+1}^2} = \frac{W_{\text{тр } y, y+1} e_{y, y+1}}{\pi B_{y, y+1}^2}. \quad (6.17)$$

Таким образом, в случаях, когда мы располагаем данными по удельному трению, работа последнего учитывается по формулам

$$W_{\text{тр } y} = \pi \mu_y \theta_y \omega^2 A_y^2; \quad (6.18)$$

$$W_{\text{тр } y, y+1} = \pi \mu_{y, y+1} e_{y, y+1} F_{y, y+1}^2 = \pi \mu_{y, y+1} e_{y, y+1}^{-1} B_{y, y+1}^2 = \\ = \pi e_0 \mu_{y, y+1} E_{y, y+1}^{-1} B_{y, y+1}^2 = \pi e_0 \mu_{y, y+1} E_{y, y+1}^{-1} \delta_{y, y+1}^2 A_1^2. \quad (6.19)$$

Удельное трение будем использовать в качестве критерия оценки величины демпфирующих потерь, так как формы резонансных и свободных колебаний оказываются достаточно близкими только при малом удельном трении.

Найдем связь между удельным трением ( $\mu$ ) и коэффициентом демпфирования ( $b$ ) в случае линейного трения в соединении. Подставляя (6.11) в (6.17), находим

$$\mu_{y, y+1} = \frac{W_{\text{тр } y, y+1} e_{y, y+1}}{\pi B_{y, y+1}^2} = \frac{\pi b\omega B_{y, y+1}^2}{\pi B_{y, y+1}^2} = b\omega e_{y, y+1}. \quad (6.20)$$



Аналогичная зависимость для случая линейного трения на массе получается из (6.18) и (6.10)

$$\mu_y = \frac{W_{\text{тр } y}}{\pi \theta_y \omega^2 A_y^2} = \frac{\pi b \omega A_y^2}{\pi \theta_y \omega^2 A_y^2} = \frac{b}{\theta_y \omega} \quad (6.20, a)$$

Опыт показывает, что при  $\mu < 0,2$  трение можно относить к числу малых, а если этого нет, то к категории больших.

Описанный критерий не учитывает характера распределения демпфирующих потерь по элементам системы. В случае, когда эти потери сосредоточены на каком-либо одном элементе системы, и в случае, когда они более равномерно распределены по всем элементам системы, их влияние на искажение формы колебаний будет различным. Этот вопрос изучен еще недостаточно.

#### § 54. Кривошипно-шатунные механизмы

Демпфирующие моменты в двигателях возникают в основном за счет рассеивания энергии в кривошипно-шатунных механизмах, вследствие наличия трения и ударов в их кинематических парах. Кроме того, существенным может быть трение в приводе вспомогательных механизмов.

Исследованиями Ф. Ф. Болотина и Г. И. Бухариной [8] доказано, что междучастичное трение в материале коленчатого вала (гистерезис) оказывается пренебрежимо малым по сравнению с другими сопротивлениями, имеющимися в двигателе.

«Кажущееся» демпфирование в многоцилиндровых двигателях также является незначительным. Поясним это явление. Мгновенные значения приведенного момента инерции масс кривошипно-шатунного механизма зависят от положения механизма. Это показано в § 10. Отсюда следует, что при различных положениях коленчатого вала частота его свободных колебаний будет различной. С другой стороны, неравномерность вращения вала влечет за собой некоторое непостоянство частот гармонических составляющих возмущающих моментов. Оба эти явления обуславливают неполное совпадение частот свободных и вынужденных колебаний при резонансе, что в какой-то степени препятствует развитию резонансных амплитуд, а потому может рассматриваться как особого рода демпфирование.

В настоящее время может считаться установленным, что основными источниками демпфирующих потерь в кривошипно-шатунных механизмах являются:

- жидкостное трение поршня во втулке цилиндра и в подшипниках коленчатого вала;
- сухое трение или полусухое трение поршня и его колец во втулке цилиндра;
- удары в кинематических парах механизма.

Формулы Видлера, Хольцера, Шеннона и других, применявшиеся ранее для учета демпфирования, были получены в предположении, что все виды трения могут быть выражены эквивалентным трением, имеющим линейную или квадратичную характеристику. Однако практика показывает, что этого в действительности нет, а потому упомянутые формулы нередко обуславливают значительные погрешности расчетов.

Жидкостное трение зависит в основном от скорости относительного перемещения деталей. Работа трения при этом оказывается пропорциональной квадрату амплитуды колебаний (6.13). Постоянное же трение определяется давлением между трущимися поверхностями, а от скорости перемещения деталей не зависит, его работа пропорциональна амплитуде колебаний в первой степени (6.12).

На основании этих предпосылок Г. И. Бухариной [8], в результате обработки материалов большого числа экспериментальных данных, предложена эмпирическая формула для определения работы демпфирующих моментов в двигателе за одно колебание.

Для случая, который чаще всего встречается в расчетах валопроводов судовых установок, т. е. когда двигатель расположен в начале системы, эта формула имеет вид

$$W_{\text{тр дв}} = \omega_{\text{дв}}^2 A_1^2 + \omega_{\text{дв}}^0 A_1^* \quad (6.21)$$

Входящие сюда коэффициенты пропорциональности характеризуют: жидкостное трение шеек вала и поршня, зависящее от скорости колебаний,

$$\omega_{\text{дв}} = \pi M_v X_{qr} \sum_{y=1}^z \alpha_y^2; \quad (6.22)$$

сухое трение поршня и его колец, зависящее только от направления скорости колебаний,

$$\omega_{\text{дв}}^0 = \frac{0,02(\nu + 10)(0,7 + \lambda)M_v}{1 - 3,5_p + 25_p^2} \left| \sum_{y=1}^z \alpha_y \right|. \quad (6.23)$$

Здесь и в последующих зависимостях обозначены:

$N_R$  и  $\nu$  — частота резонансных колебаний и порядок гармоники возмущающего момента;

$m$  и  $z$  — число тактов рабочего процесса и число цилиндров двигателя;

$d_k, l_k, d_{ш}, l_{ш}$  — диаметры и длины шеек коренного и шатунного подшипников;

$D$  и  $L$  — диаметр и длина трущейся поверхности поршня;

$R$  — радиус кривошипа;

$p = \frac{p_i}{p_c}$  — отношение среднего индикаторного давления к давлению сжатия.

\* Пример вычисления по этой формуле приведен в конце гл. 8.



Работа жидкостного трения в поршне отражена коэффициентом

$$X = N_R \frac{N_R + 3820}{N_R + 5750} \approx N_R \left( 1 - \frac{2}{10^{-3} N_R + 6} \right).$$

Работа жидкостного трения в подшипниках коленчатого вала выражена коэффициентом, учитывающим размеры двигателя,

$$q = \frac{168m}{10^3 D^2 R} [(d_k^3 l_k + d_{ш}^3 l_{ш}) + (D + 0,5L) LR^2].$$

Совместное влияние среднего крутящего момента двигателя  $M_{\text{ср}}$  (индикаторного) и амплитуды резонирующей гармоники  $M_y$  возбуждающего момента \* на зазор между поршнями и втулками учитываются коэффициентом

$$r = \frac{\nu + 14}{17 + 40\rho} + \frac{\rho - 0,1}{11\rho + 0,3} \cdot \frac{M_{\text{ср}}}{M_y}.$$

Для случаев, когда двигатель располагается в середине системы (перед двигателем имеется  $s$  масс), формулы (6.21—6.23) приобретают вид

$$\begin{aligned} W_{\text{тр дв}} &= w_{\text{дв}} A_{c+1}^2 + w_{\text{дв}}^0 A_{c+1}; \\ w_{\text{дв}} &= \pi M_y X q r \sum_{y=1}^z \left( \frac{a_{c+y}}{a_{c+1}} \right)^2; \quad w_{\text{дв}}^0 = \frac{0,02 (\nu + 10) (0,7 + \lambda) M_y}{1 - 3,5\rho + 25\rho^2} \times \\ &\quad \times \left| \sum_{y=1}^z \bar{m}_y \frac{a_{c+y}}{a_{c+1}} \right|, \end{aligned} \quad (6.24)$$

а остальные коэффициенты сохраняют прежние значения.

При рассмотрении компонентов этой формулы обнаруживается:

Трение в двигателе имеет явно выраженный нелинейный характер, так как часть работы трения зависит от амплитуды колебаний в первой степени, а часть — от амплитуды во второй степени.

Работа сухого трения зависит от параметров рабочего процесса ( $p_i$  и  $p_e$ ) и от порядка резонирующей гармоники.

Работа жидкостного трения зависит от конструктивных размеров двигателя, частоты колебаний и величины поверхностей трения ( $D$ ,  $L$ ,  $d$  и  $l$ ).

Кроме того, явно проявляется влияние формы колебаний, так как в формулах присутствуют безразмерные амплитуды резонансных колебаний и их частота.

\* Для V-образных и звездообразных двигателей под  $M_y$  следует понимать суммарный момент от всех цилиндров, работающих на один кривошип.

Наблюдающаяся примерно гиперболическая зависимость удельного трения от частоты колебаний, как и возрастание работы трения с увеличением амплитуды возмущающих моментов, подтверждают, что по своей физической природе трение в двигателе в значительной мере обладает свойствами сухого или полусухого трения.

Формула обеспечивает повышенную точность расчета резонансных колебаний. На основании большого экспериментального материала (240 случаев) автором формулы установлено, что для 61% случаев отклонения наблюдаемых резонансных амплитуд от расчетных составляет  $\pm 10\%$ , а для остальных не превосходит  $\pm 30\%$ .

При вычислении удельного трения кривошипно-шатунных механизмов двигателя  $\mu_{\text{кр}}$  можно воспользоваться первой из формул (6.15), в знаменатель которой вместо кинетической энергии одной массы следует поставить кинетическую энергию всех масс двигателя, т. е.  $\sum 0,5 \theta_y (A_y \omega_e)^2$ .

По опытным данным величина удельного трения кривошипно-шатунных механизмов двигателя  $\mu_{\text{кр}}$  зависит от частоты  $N$  и колеблется в широких пределах:

$$\text{при } N \approx 3000 \div 10\,000 \text{ кол/мин } \mu_{\text{кр}} = 0,015 \div 0,08;$$

$$\text{при } N \approx 1000 \div 2\,000 \text{ кол/мин } \mu_{\text{кр}} = 0,03 \div 0,5,$$

а при очень низких частотах ( $N \approx 300$  кол/мин)  $\mu_{\text{кр}}$  может достигать двух.

При учете демпфирующих потерь в двигателе следует иметь в виду, что трение в шестеренчатых приводах к воздуходувкам может быть весьма большим, как на двигателе 37Д [56].

## § 55. Ротор генератора

При вращении ротора генератора с постоянной угловой скоростью проводники его обмотки пересекают каждую силовую линию магнитного поля статора всегда в одном направлении. Если же ротор, помимо основного движения, участвует в крутильных колебаниях, то его обмотка многократно пересекает силовые линии в прямом и обратном направлениях. Это влечет за собой возникновение соответствующих электрических токов переменного направления, определяющих электрические потери ротора, в которые переходит энергия его колебательного движения.

В первом приближении можно принять, что сопротивление ротора  $V$  пропорционально скорости его колебаний

$$V = -b \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $b$  — коэффициент демпфирования ротора.



Если  $M$  — крутящий момент ротора, а  $\Omega$  и  $n$  — его угловая скорость и число оборотов, то коэффициент демпфирования может быть выражен через их дифференциалы

$$b = \frac{dM}{d\Omega} \quad \text{или} \quad b = \frac{30}{\pi} \frac{dM}{dn}.$$

Как следует из теории электрических машин,

$$b = \frac{930E^2J}{(E - E_c)n^2}, \quad (6.25)$$

где  $E$  и  $E_c$  — электродвижущая сила генератора и противоэлектродвижущая сила приемника энергии — двигателя или батареи аккумуляторов (при работе генератора только на внешнее сопротивление  $E_c = 0$ ).

При работе генератора постоянного тока на сеть, а генератора переменного тока — на внешнее сопротивление (и не в параллель) выражение для работы магнитного сопротивления за одно колебание получим, подставив коэффициент демпфирования в (6.10),

$$W_{\text{тр ген}} = \pi b \omega A_{\text{ген}}^2 = \pi b \frac{\pi N}{30} A_{\text{ген}}^2 = \omega_{\text{ген}} A_{\text{ген}}^2 = \omega_{\text{ген}} \alpha_{\text{ген}}^2 A_{1R}^2, \quad (6.26)$$

где коэффициент пропорциональности находим на основании (6.25)

$$\omega_{\text{ген}} = \frac{\pi^2}{30} b N = \frac{305E^2JN}{(E - E_c)n^2}. \quad (6.27)$$

### § 56. Гребной винт

Демпфирование гребного винта возникает за счет трения его лопастей о воду в процессе крутильных колебаний. Это явление наблюдается независимо от основного движения (вращения) винта, создающего упор, обеспечивающий ход судна.

Впервые коэффициент демпфирования гребного винта был найден Льюисом на базе опытов Тейлора с моделями гребных винтов [72]. Он оказался равным

$$b \approx 30 \frac{M}{n},$$

где  $M$  — крутящий момент винта, а  $n$  — число его оборотов в минуту.

Однако найденная простая зависимость не обеспечивает достаточной точности определения работы демпфирования гребных винтов, так как не учитывает их конструктивных особенностей.

Значительно более совершенная формула с погрешностью, не превышающей 1,5%, была предложена Л. М. Кутузовым и М. В. Яковлевой [56, стр. 84] на базе теоретических и экспериментальных исследований.

Эта формула имеет вид

$$\omega_{\text{тр в}} = \omega_{\text{в}} A_{\text{в}}^2 = \omega_{\text{в}} \alpha_{\text{в}}^2 A_{1R}^2, \quad (6.28)$$

где коэффициент пропорциональности

$$\omega_{\text{в}} = \frac{13,2 \cdot 10^{-10} D^5 a h}{(a + h) [4,2 + \lambda_p (3,5 - a - h)]} \times \left\{ 1 + 0,06 \left[ 1 - \frac{100 N a}{n_{\text{в}} z (\lambda_p^2 + 9,7)} \right]^{-1} N n_{\text{в}} \right\}. \quad (6.29)$$

Все символы здесь сохраняют значения, указанные для формулы (2.11). Там же приведены необходимые пояснения к ним. При наличии редуктора  $\omega_{\text{в}}$  и  $A_{\text{в}}$  в этой формуле соответственно изменяются.

Для гребных винтов с регулируемым шагом эта формула дает максимальную величину работы при максимальном угле поворота лопастей. Для других положений лопастей работа трения уменьшается примерно пропорционально углу их поворота, а при флюгерном положении ее можно принять равной нулю.

### § 57. Роторы центробежных насосов, вентиляторов и гидромуфт

При работе гидравлических машин потребляемый ими крутящий момент  $M_{\text{ср}}$  пропорционален квадрату числа оборотов ротора  $n$ . В этом случае демпфирование ротора может быть найдено по ориентировочной формуле [56, стр. 83]

$$\omega_{\text{тр}} \approx 9,4 \frac{N}{n} M_{\text{ср}} A^2 = \omega A^2, \quad (6.30)$$

а коэффициент пропорциональности и удельное трение вычисляются по формулам

$$\omega \approx 9,4 \frac{N}{n} M_{\text{ср}}; \quad \mu \approx \frac{273 M_{\text{ср}}}{(\theta_p + \theta_c) N n}, \quad (6.31)$$

где  $N$  — частота колебаний ротора, а  $\theta_p + \theta_c$  — момент инерции ротора и увлекаемой им среды, которая учитывается в объеме, описываемом лопастями.

Демпфирующие потери в шинно-пневматических муфтах были исследованы И. А. Лурье, который предложил формулу

$$W_{\text{трм}} = \omega_{b, b+1} F_{b, b+1}^2 = \delta_{b, b+1}^2 e_0^{-2} \omega_{b, b+1} A_{1R}^2; \quad \omega_{b, b+1} \approx \approx k \left( 1 - \frac{F_{b, b+1}}{28,5 D^3} \right), \quad (6.32)$$



где  $F_{b, b+1}$  — амплитуда эластического момента в соединении  $b, b+1$ , включающем в себя муфту,  $D$  — средний диаметр шипа, а  $k$  — эмпирический коэффициент, равный  $35 \div 50$  для муфты 4ШМ и  $110 \div 170$  для муфты 2 ШМ. Более точные данные см. [56, гл. 14]

### § 58. Подшипники скольжения

В судовых установках с длинными валопроводами демпфирование в опорных подшипниках может быть значительным в тех случаях, когда форма колебаний обуславливает значительные амплитуды в тех сечениях вала, где эти подшипники располагаются.

Демпфирование в подшипниках двигателя учитывается в формулах (6.21) — (6.24) одновременно с другими видами трения.

Трение в подшипниках носит линейный характер, т. е. пропорционально скорости колебаний, поэтому его работа может быть найдена по формуле (6.13)

$$W_{тр} = \omega A^2; \omega = \pi b \omega. \quad (6.33)$$

Коэффициент демпфирования  $b$  вычисляется при этом по формуле [9]

$$b = \frac{\pi}{4\delta} \rho \omega d^3,$$

где  $d$  и  $l$  — диаметр и длина подшипника, м;

$\delta$  — средний диаметральный зазор в подшипнике, м;

$\rho$  и  $\nu$  — плотность  $\text{кг/м}^3$  и вязкость масла при рабочей температуре,  $\text{м}^2/\text{сек}$ .

Так как демпфирование в подшипниках зависит от амплитуд колебаний вала  $A$  (в их средних сечениях), то при одних формах колебаний оно может быть значительным, а при других оказывается несущественным.

### § 59. Упругий гистерезис

Гистерезис — междучастичное трение в материале валопровода — согласно последним исследованиям обуславливает демпфирующие потери только в длинных валопроводах судовых установок за пределами двигателя, так как гистерезис коленчатого вала во всех случаях оказывается незначительным.

Как известно, упругие материалы не следуют в точности закону Гука. При нагружении образца его сопротивление деформации оказывается больше, а при разгрузке — меньше, чем определяемое по упомянутой линейной зависимости. На диаграмме сила — деформация (рис. 51) во всех подобных случаях обнаруживается так называемая «петля гистерезиса», площадь которой характеризует величину работы междучастичного трения в материале, из которого выполнен образец. Это трение поглощает энергию колебаний

и превращает ее в тепло, которое рассеивается в окружающую среду.

На величину работы, поглощаемой гистерезисом, как установлено рядом экспериментов, скорость деформации влияния не оказывает, она зависит от величины напряжения, возникающего в материале образца, и от свойств этого материала.

Одним из первых подобные эксперименты осуществил Роветт [29], [75], путем скручивания полых стержней (трубок), выполненных из различных материалов. При этом было обнаружено, что пока напряжение в материале всех образцов не превосходит  $550 \text{ кг/см}^2$ , работа гистерезиса за цикл в единице объема возрастает плавно, а за указанным пределом резко увеличивается.

В последующих работах Дорей [70], Нечаева и Болгова [38] и других было показано, что удельная работа гистерезиса  $\delta W_r$  существенно зависит от химического состава стали, а для углеродистых сталей — от содержания углерода.

Результаты экспериментов названных авторов можно обобщить. Представим работу упругого гистерезиса в одном кубическом сантиметре материала углеродистых сталей за цикл одной формулой \*

$$\delta W_r = k_r \tau_{\max}^x, \quad (6.34)$$

где

$$x = 2,2C + 2,34; k_r = 8,3 \cdot 10^4 (3,04C^2 + 11,5C + 1)^{-4,3},$$

а  $C$  — содержание углерода, %.

Работа гистерезиса за цикл в участке валопровода с постоянными наружным ( $d$ ) и внутренним ( $\delta$ ) диаметрами длиной ( $l$ ) при амплитуде нагружающего его эластического момента  $F$  может быть найдена по формуле

$$W_{тр г} = a F^x l \frac{1 - \rho^{x+2}}{k_c^x d^{3x-2}} \approx a F^x l \frac{1}{k_c d^{3x-2}} = \omega_r F^x, \quad (6.35)$$

где  $k_c$  принимается по формуле (2.17), а

$$a = \frac{2\pi k_r 10^{-12}}{4(x+2)} \left(\frac{16}{\pi}\right)^x = \frac{1,57 \cdot 10^{-12} k_r}{x+2} (5,1)^x; \omega_r = \frac{al}{k_c d^{3x-2}}.$$

Дорей испытывал стали с содержанием углерода 0,21 и 0,3%, а Нечаев и Болгов — с содержанием 0,07%. Для этих материалов формула дает точный результат, а для остальных — приближенный. Зависимость, установленная Роветтом и использованная

\* Данная зависимость найдена инженером В. Севастакиевым.

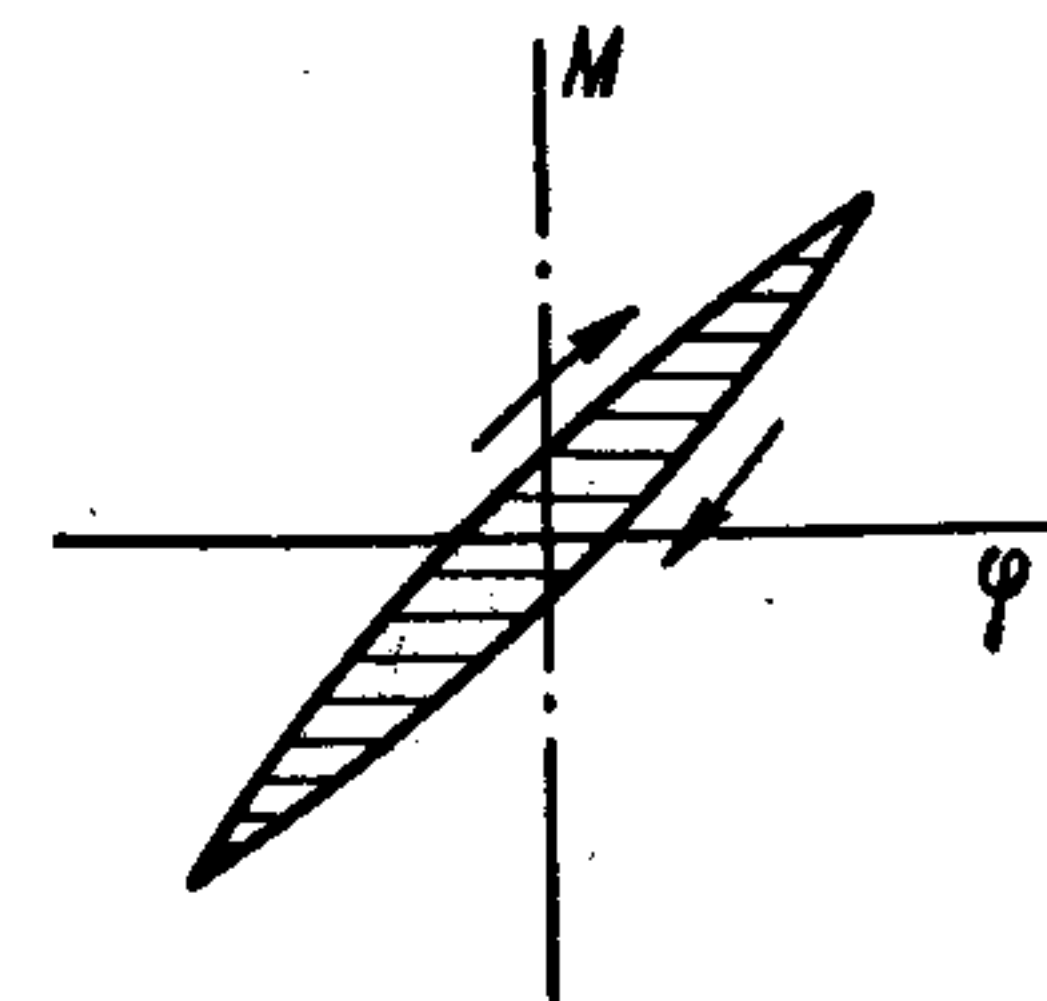


Рис. 51. Петля гистерезиса.



Льюисом, здесь не учитывается, так как она была получена более 50 лет назад, когда методы и аппаратура подобных исследований были менее совершенны.

Для валопроводов, выполненных из углеродистых сталей и других материалов, можно пользоваться той же формулой (6.35) с коэффициентами, заимствованными из работ других авторов и помещенными в табл. 14.

Таблица 14

Данные по упругому гистерезису для некоторых материалов

Марка материала		$x$	$k_t$	$a$
Конструкционные стали	Сталь 10	2,56	3720	$812 \cdot 10^{-10}$
	» 15	2,67	410	$107 \cdot 10^{-10}$
	» 20	2,80	63	$19,68 \cdot 10^{-10}$
	» 25	2,89	24,30	$9,42 \cdot 10^{-10}$
	» 30	3,00	8,90	$3,70 \cdot 10^{-10}$
	» 35	3,11	3,90	$1,84 \cdot 10^{-10}$
	» 40	3,22	1,86	$1,02 \cdot 10^{-10}$
Легированная сталь	» 40ХФ	2,80	7,00	$2,18 \cdot 10^{-10}$
	» 25НЗ	3,20	1,80	$0,99 \cdot 10^{-10}$
	» 30ХНЗ	2,70	25	$6,78 \cdot 10^{-10}$
Чугуны	Чугун с пластинчатым графитом	2,50	210	$430 \cdot 10^{-10}$
	Чугун с глобулярным графитом	2,50	54,2	$111 \cdot 10^{-10}$

**Пример.** Определение работы демпфирования гребного винта при резонансах 5, 6 и 7-го порядков одноузловой формы колебаний ( $N = 1500$  кол/мин;  $\alpha_B = 1,25$ ).

Параметры гребного винта указаны в примере 2, гл. 2.

1. Коэффициент пропорциональности в выражении для работы демпфирования гребного винта находим из зависимости (6.29) (переменную часть этого коэффициента обозначаем символом  $k$ )

$$\omega_B = \frac{13,2 (0,01D)^5 \cdot a \cdot h^2 \cdot k}{(a + h) [4,2 + \lambda_p (3,5 - a - h)]} =$$

$$= \frac{13,2 (0,01 \cdot 192)^5 \cdot 0,506 \cdot 0,585^2 \cdot k}{(0,506 + 0,585) [4,2 + 0,285 (3,5 - 0,506 - 0,585)]} = 11,24k;$$

$$k = \left\{ 1 + 0,06 \left[ 1 - \frac{100N \cdot a}{n_R^2 (\lambda_p^2 + 9,7)} \right]^{-1} \right\} N n_R =$$

$$= \left\{ 1 + 0,06 \left[ 1 - \frac{100 \cdot 1500 \cdot 0,506}{n_R^4 \cdot (0,285^2 + 9,7)} \right]^{-1} \right\} 1500 n_R =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{0,06}{1 - \frac{10^4}{5,16 n_R}} \right\} 1500 n_R.$$

2. Найдем значения этого коэффициента для каждого резонанса

$\nu =$	5	6	7
$n_R = \frac{N}{\nu} =$	300	250	214
$k =$	$44,5 \cdot 10^4$	$37,1 \cdot 10^4$	$31,9 \cdot 10^4$
$\omega_B =$	$5,00 \cdot 10^6$	$4,17 \cdot 10^6$	$3,58 \cdot 10^6$
$\alpha_B^2 \omega_B =$	$7,8 \cdot 10^6$	$6,5 \cdot 10^6$	$5,6 \cdot 10^6$

3. Последующий расчет выполняется по формуле (6.28)

$$W_{гв} = \alpha_B^2 \omega_B A_{1R}^2 \text{ кГ см/цикл.}$$



## РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

## § 60. Резонансные колебания

В процессе резонансных колебаний при установившемся режиме работы силовой установки на массы в пределах двигателя действуют моменты от сил газов, сил инерции поступательно-движущихся масс и сил тяжести поступательно-движущихся и неуравновешенных вращающихся деталей. На массы вне двигателя действуют моменты, свойственные приемнику энергии. При наличии карданной передачи возникают моменты в соответствующем соединении.

Этим моментам противодействуют моменты сил инерции вращающихся масс, эластические моменты в соединениях и моменты сил трения на массах и в соединениях.

Резонансные колебания — колебания незатухающие, т. е. каждой массе системы при установившемся режиме соответствуют постоянные по величине амплитуды колебаний. Амплитуды деформаций соединений и возникающих в них эластических моментов также постоянны, а сумма кинетической и потенциальной энергий системы имеет неизменную величину.

Так как это наблюдается несмотря на наличие сил трения, обуславливающих непрерывный отвод энергии от системы, то следует прийти к выводу, что к ней одновременно подводится энергия от какого-то источника.

Рассмотрим, какие из перечисленных выше моментов могут подводить энергию к системе за один оборот коленчатого вала.

Моменты от сил тяжести деталей кривошипно-шатунного механизма не могут подводить энергию к системе, так как после поворота вала на один оборот эти детали принимают первоначальное положение и приобретают тот же запас потенциальной энергии.

Моменты сил инерции поступательно-движущихся масс также не могут подводить энергии к системе, так как запас энергии в системе при установившемся режиме остается постоянным.

Однако эти моменты, будучи периодическими, способны возбуждать и действительно возбуждают крутильные колебания валопровода.

Если представить себе двигатель со снятыми крышками цилиндров, коленчатый вал которого равномерно вращается от электродвигателя, то в нем возникнут крутильные колебания именно за

счет действия рассматриваемых моментов. При медленном повышении числа оборотов вала и последующем совпадении частоты какой-либо гармонической составляющей этих моментов с частотой свободных колебаний валопровода в нем возникают резонансы с соответствующим увеличением амплитуд колебаний. Одновременно возрастают амплитуды деформаций соединений и эластических моментов в них. Работа трения, зависящая от амплитуд колебаний масс и деформаций соединений, будет также возрастать, что потребует повышения мощности, развиваемой электродвигателем. Моменты сил тяжести и сил инерции поступательно-движущихся масс, являясь возмущающими моментами, при этом только транспортируют системе энергию электродвигателя. По-видимому, возбуждая колебания, моменты сил тяжести и сил инерции поступательно-движущихся масс совершают некоторую работу, но она одновременно пополняется за счет работы электродвигателя. Являясь возмущающими моментами, они, таким образом, передают системе энергию от другого источника.

Переходя от рассмотренного случая с двигателем без цилиндрических крышек, но с электродвигателем, к реальной установке с работающим двигателем, замечаем, что источником энергии здесь будет работа газов в цилиндрах двигателя. Параллельно с расходом энергии на преодоление полезного сопротивления, часть работы сил газов передается системе непосредственно гармоническими составляющими крутящего момента от этих сил, а часть — описанным выше путем, т. е. посредством возмущающих моментов от сил тяжести и сил инерции поступательно-движущихся масс.

При увеличении цикловой подачи топлива растут энергия давления газов в цилиндрах двигателя, средний крутящий момент на его валу и амплитуды всех гармоник возмущающего момента от сил газов. Если средний крутящий момент, развиваемый на валу двигателя, становится больше момента сил полезного сопротивления, то избыточный момент расходуется на увеличение кинетической энергии системы (как жесткого целого), что сопровождается увеличением угловой скорости вала. Амплитуды гармонических составляющих моментов от сил инерции при этом возрастают пропорционально квадрату числа оборотов вала, а гармоники моментов от сил тяжести остаются прежними. Если частота какой-либо гармонической составляющей приближается к частоте свободных колебаний системы, то, по мере развития амплитуд, возрастает работа соответствующих сил трения. При достаточно сильном резонансе увеличение амплитуд колебаний и преодоление сил трения, а также передача энергии системе посредством возмущающих моментов от сил инерции и сил тяжести сопровождается столь значительной затратой энергии газов, что возрастание угловой скорости вращения вала может не только замедлиться, но даже временно прекратиться, несмотря на дальнейшее увеличение цикловой подачи топлива в цилиндры.



Таким образом, в процессе резонансных колебаний к системе подводится энергия только от одного источника — сил газов, но в количестве, отвечающем сумме работ возмущающих моментов резонирующего порядка от сил газов, сил инерции поступательно-движущихся масс и сил тяжести деталей кривошипно-шатунного механизма. Поэтому для учета подводимой к системе энергии предварительно находят геометрическую сумму амплитуд всех этих моментов (см. § 42).

Нетрудно показать, что работа гармонического момента, действующего на систему с частотой, отличной от собственной частоты системы, равна нулю для любого целого числа циклов. Поэтому при подсчете величины работы, передаваемой системе возмущающими моментами, учитывают только те гармонические составляющие, которые имеют резонирующую частоту, а действием других гармоник пренебрегают. Это — первое допущение, положенное в основу расчета резонансных колебаний, вносит существенную погрешность только в тех случаях, когда в системе имеются другие близкорасположенные резонансы.

В качестве второго допущения принимается, что в системах с малым трением формы резонансных и свободных колебаний совпадают — оно также обуславливает некоторую погрешность расчета.

Расчет резонансных колебаний выполняется двумя методами.

*Первый метод* [42, стр. 180] предполагает замену действительной многомассовой системы эквивалентной одномассовой системой с такой же частотой свободных колебаний. Обе системы при этой частоте должны обладать одинаковыми кинетическими энергиями масс и возбудителями. Расчетная формула приобретает вид (4.09), где  $\beta$  — коэффициент динамического усиления при резонансе — включает все виды демпфирующих сопротивлений и принимается по усредненным данным.

*Второй (энергетический) метод* базируется на балансе работ возмущающих и демпфирующих моментов. Как видно из материала, изложенного в § 47, 49 и 50, работа возмущающих моментов и работа демпфирующих сопротивлений могут быть выражены в зависимости от резонансной амплитуды колебаний какой-либо из масс системы (допустим  $A_{1R}$ ). Приравнявая полученные выражения, получают уравнение, из которого однозначно находится  $A_{1R}$ , что позволяет вычислить амплитуды колебаний и эластических моментов для всей системы.

Поясним сущность этого метода с помощью его графической интерпретации.

Если на графике (рис. 52) в координатах  $W — A_1$  изобразить работу возмущающих моментов на основании зависимости  $W_m = \omega A_{1R}$  (5.35, 5.53), то получим прямую в виде луча, исходящего из начала координат.

Допустим, что для данной установки единственным существенным видом трения является демпфирование гребного винта  $W_{тр в} = \omega_B \alpha_B^2 A_{1R}^2$  (6.28). Изобразив эту функцию на том же графике (она имеет вид параболы), найдем точку пересечения и резонансную амплитуду  $A_{1R}$ , при которой работа, подводимая к системе возмущающими моментами, и работа, отводимая от нее демпфирующими сопротивлениями, равны.

Если мы допустим, что по каким-либо причинам установилась меньшая величина резонансной амплитуды  $A_1^*$ , то по тому же графику обнаружим, что работа демпфирующих сопротивлений станет меньше работы возмущающих моментов. Появится избыточная работа. Она пойдет на увеличение кинетической энергии системы, которая будет расти до тех пор, пока амплитуда не достигнет прежней величины  $A_{1R}$ , соответствующей балансу работ.

Обратное явление будет наблюдаться, если допустить, что амплитуда колебаний окажется больше, чем  $A_{1R}$ .

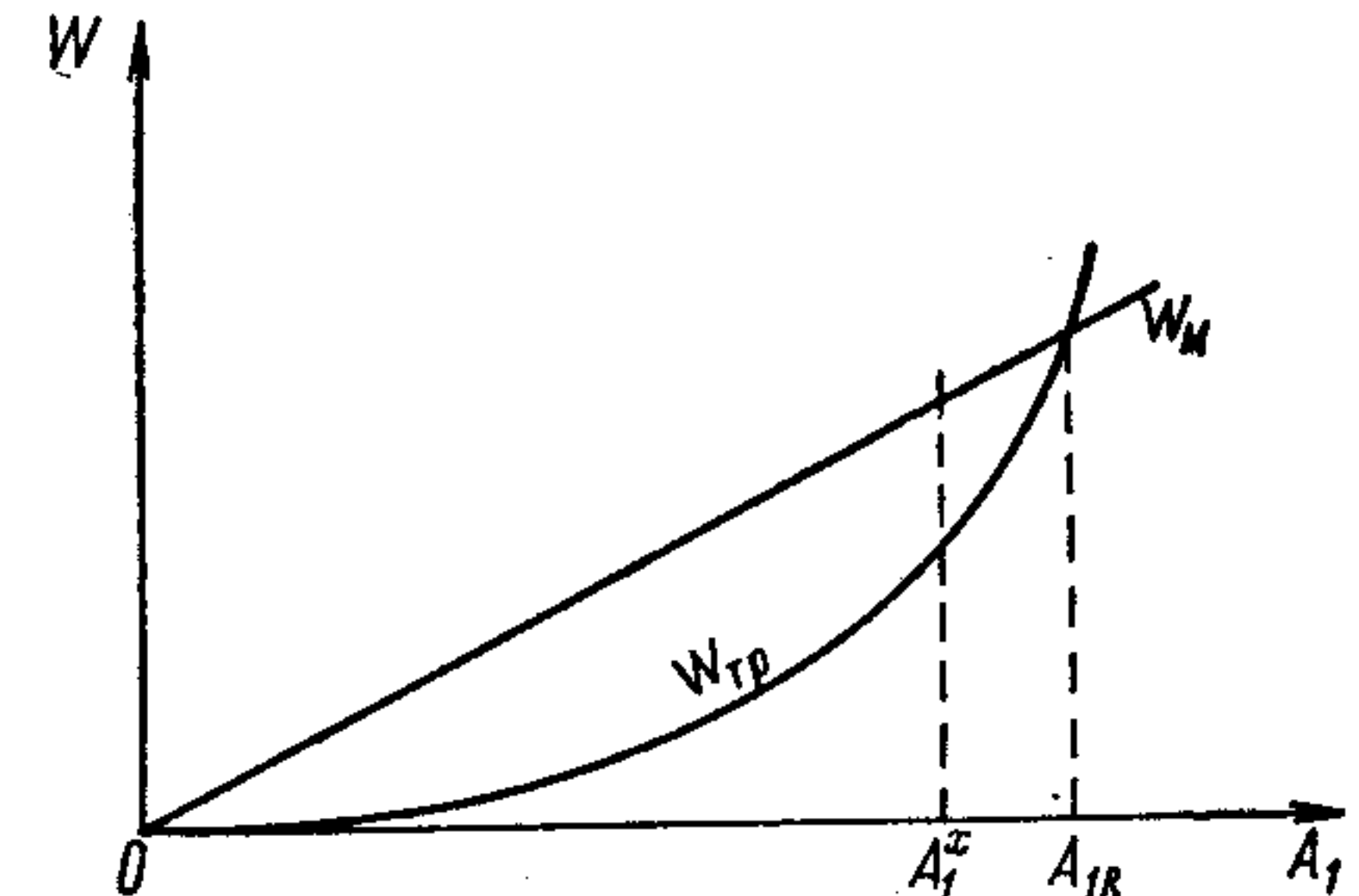


Рис. 52. Определение резонансной амплитуды.

## § 61. Расчет резонансных колебаний

Описанный в предыдущем параграфе баланс работ и принцип расчета используем для определения амплитуд резонансных колебаний. Как уже указывалось, к валопроводу силовой установки постоянно подводится работа возмущающих моментов. Одновременно в валопроводе возникают демпфирующие моменты, поглощающие энергию колебаний. В системах судовых силовых установок могут быть существенными следующие виды демпфирующих сопротивлений (ниже приводится зависимость для случая, когда двигатель расположен в начале системы и амплитуда первой его массы принята за единицу):

а) в двигателе (6.21)

$$W_{тр дв} = \omega_{дв} A_{1R}^2 + \omega_{дв}^0 A_{1R};$$

б) на гребном винте (6.28)

$$W_{тр в} = \omega_B \alpha_B^2 A_{1R}^2;$$

в) на роторе генератора (6.26)

$$W_{тр ген} = \omega_{ген} \alpha_{ген}^2 A_{1R}^2;$$



г) в муфтах (6.31, а)

$$W_{\text{тр м}} = \omega_{b, b+1} F_{b, b+1}^2 = \delta_{b, b+1}^2 e_0^2 \omega_{b, b+1} A_{1R}^2; \quad (7.01)$$

д) в материале валов (6.35)

$$W_{\text{тр г}} = \sum \omega_{\text{г}} F_{b, b+1}^x = e_0^{-x} A_{1R}^x \sum \omega_{b, b+1} \delta_{b, b+1}^x,$$

где под знак суммы входит работа гистерезиса во всех участках валопровода, за исключением коленчатого вала;

е) в специальных устройствах (демпферах) (см. гл. 9);

ж) в подшипниках валопровода за двигателем (6.33)

$$W_{\text{тр п}} = A_{1R}^2 \sum \omega_{\text{п}} \alpha_{\text{п}}^2;$$

з) в приводах вспомогательных механизмов [56].

Если работа демпфирующих сопротивлений выражается через амплитуду не первой, а какой-либо иной массы, то вместо  $A_{1R}$  во все эти выражения входит отношение  $A_{1R}/\alpha_t$ .

В одновременном учете всех перечисленных демпфирующих сопротивлений необходимости никогда не встречается, так как для каждой формы колебаний каждого типа установки существенными оказываются не более двух-трех видов трения. Так, при одноузловой форме колебаний валопроводов судовых силовых установок с прямой передачей на гребной винт преобладающими оказываются демпфирующие сопротивления в двигателе и трение винта в воде. Последнее наблюдается в связи с тем, что амплитуда колебаний винта при одноузловой форме, и, особенно, при наличии промежуточных валов большой длины, велика.

При двухузловой форме колебаний подобных установок амплитуды колебаний гребного винта оказываются почти во всех случаях незначительными и трением винта о воду можно пренебрегать. В то же время существенными могут быть трения: в двигателе, в муфтах, в валопроводе (гистерезис) и в опорных подшипниках последнего, если он имеет большую длину (между двигателем и винтом).

При расчете резонансных колебаний одноузловой формы валопроводов дизель-генераторов, помимо двигателя и муфт, может иметь место значительное демпфирование магнитного поля генератора. При двухузловых колебаниях демпфирование на роторе генератора обычно оказывается незначительным.

Основным признаком возникновения больших демпфирующих сопротивлений являются: при наличии трения на массах — большие амплитуды колебаний последних; при наличии трения в соединениях (валах и муфтах) — большие эластические моменты. Демпфирование в опорных подшипниках валопровода (вне двигателя) может быть существенным только в тех случаях, когда

эти подшипники расположены на участках вала, которым свойственны большие амплитуды колебаний.

Трение колеблющихся масс о воздух может быть значительным только в мулнетах, потребляющих всю мощность, развиваемую двигателем при испытаниях, т. е. когда они выполняют функцию потребителя энергии.

Представленные ниже формулы для расчета резонансной амплитуды первой массы выводятся из описанного выше баланса работ возмущающих моментов и демпфирующих сопротивлений для случая, когда двигатель расположен в начале системы, а затем распространяются на общий случай.

Если трение в системе определяется демпфированием двигателя и гребного винта, то баланс работ запишется так

$$W_{\text{м}} = W_{\text{тр дв}} + W_{\text{тр в}}.$$

Подставляя в это уравнение развернутые выражения работ (5.53), (5.35), (6.21) и (6.28), находим

$$\frac{\pi}{e_0} M_1 A_{1R} |m_z^{(1)} \alpha_z| = \omega_{\text{дв}} A_{1R}^2 + \omega_{\text{дв}}^0 A_{1R} + \omega_{\text{в}} \alpha_{\text{в}}^2 A_{1R}^2;$$

$$A_{1R} = \frac{1}{\omega_{\text{дв}} + \alpha_{\text{в}}^2 \omega_{\text{в}}} \left( \frac{\pi}{e_0} M_1 |m_z^{(1)} \alpha_z| - \omega_{\text{дв}}^0 \right). \quad (7.02)$$

Если единственным существенным трением является демпфирование двигателя, то в последней формуле следует положить  $\omega_{\text{в}} = 0$ . Если наоборот, можно пренебречь демпфированием двигателя, то баланс работ и расчетная формула примут вид

$$W_{\text{м}} = W_{\text{тр в}};$$

$$\frac{\pi}{e_0} M_1 A_{1R} |m_z^{(1)} \alpha_z| = \omega_{\text{в}} \alpha_{\text{в}}^2 A_{1R}^2; \quad A_{1R} = \frac{\pi M_1}{\alpha_{\text{в}}^2 \omega_{\text{в}} e_0} |m_z^{(1)} \alpha_z|. \quad (7.03)$$

Такой же вид будет иметь аналогичная зависимость для случая, когда единственным существенным трением в системе является демпфирование ротора генератора, так как последнее представляется в зависимости от квадрата амплитуды колебаний. При этом вместо  $\alpha_{\text{в}}$  и  $\omega_{\text{в}}$  в формулу войдут амплитуда колебаний ротора генератора  $\alpha_{\text{ген}}$  и коэффициент пропорциональности из зависимости (6.27).

В случаях, когда трение определяется только гистерезисным демпфированием, аналогичная формула представляется на основании зависимости (6.35). В этом случае в правой части выражения появится дробная степень, что не усложняет расчета. Однако, когда помимо гистерезиса необходимо учесть демпфирование какой-либо иной физической природы, уравнение получается с дробными степенями  $A_{1R}$ , что затрудняет его решение. В этом случае



уравнение решается подбором или с помощью графического способа, описанного в конце предыдущего параграфа.

Последующее нахождение действительных амплитуд колебаний интересующих нас масс и амплитуд эластических моментов соединений, которые, согласно масштабу напряжений (§ 30), представляются опасными, производится по формулам (3.25) и (3.33), в которые для общности введено передаточное число редуктора

$$A_{yR} = \alpha_y i_y A_{1R} \text{ рад и } F_{y, y+1} = \frac{\delta_{y, y+1}}{e_0 i_{y, y+1}} A_{1R} \text{ кгсм.} \quad (7.04)$$

Если работа возмущающих и демпфирующих моментов выражена через амплитуду некоторой произвольно выбранной массы, то в формулы данного параграфа вместо  $M_1 (m_z^{(1)} \alpha_z)$  следует подставить  $M_{1R}^{(1)(p)}$ , а вместо  $A_{1R}$  соответственно  $A_{1R}/\alpha_1$ . Так, например, формула (7.02) примет вид

$$\frac{A_{1R}}{|\alpha_1|} = \frac{1}{\omega_{дв} + \alpha_B^2 \omega_B} \left( \frac{\pi}{e_0} M_{1R}^{(1)(p)} - \omega_{дв}^0 \right). \quad (7.05)$$

## § 62. Приближенный расчет вынужденных нерезонансных колебаний линейных систем с малым трением

Практика показывает, что при наличии малого трения в системе, т. е., когда  $\mu < 0,1 \div 0,2$ , им можно пренебречь в приближенных расчетах.

Рассмотрим уравнение движения  $y$ -й массы некоторой системы

$$\ddot{\varphi}_y + \frac{\varphi_y - \varphi_{y-1}}{E_{y-1, y}} - \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{E_{y, y+1}} = M_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y). \quad (7.06)$$

Допуская, что форма вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний, воспользуемся аналогичным соотношением (3.04), записав его в безразмерной форме

$$\ddot{\varphi}_y + \frac{\varphi_y - \varphi_{y-1}}{E_{y-1, y}} - \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{E_{y, y+1}} = 0;$$

$$\frac{\varphi_y - \varphi_{y-1}}{E_{y-1, y}} - \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{E_{y, y+1}} = -\ddot{\varphi}_y = \ddot{\varphi}_y \Delta_e \varphi_y,$$

где  $\Delta_e$  — квадрат частоты свободных колебаний.

Подставим последнее выражение в (7.06)

$$\ddot{\varphi}_y + \ddot{\varphi}_y \Delta_e \varphi_y = M_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y)$$

и приведем его к виду

$$d\left(\frac{1}{2} \ddot{\varphi}_y^2\right) + \Delta_e d\left(\frac{1}{2} \ddot{\varphi}_y^2\right) = M_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y) d\varphi_y. \quad (7.07)$$

Допустим, что система состоит из  $p$  масс и  $k$   $z$ -ее массам приложены возмущающие моменты  $M_y$ , которые для различных масс отличаются только начальными фазами  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_z$ .

Просуммируем последние выражения для всех масс системы

$$d\left(\sum_{y=1}^p \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_y^2\right) + \Delta_e d\left(\sum_{y=1}^p \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_y^2\right) =$$

$$M_y \sum_{y=1}^z \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y) d\varphi_y.$$

Если двигатель расположен в начале системы и безразмерную амплитуду его первой массы принять за единицу ( $\alpha_1 = 1$ ), то, пользуясь соотношением, характерным для свободных колебаний, найдем

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_1} = \frac{\alpha_y}{\alpha_1}; \quad \varphi_y = \alpha_y \varphi_1.$$

Подставляя значение  $\varphi_y$  в полученное выше выражение, найдем

$$d\left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2\right) \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 + \Delta_e d\left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}_1^2\right) \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 =$$

$$M_y d\varphi_1 \sum_{y=1}^z \alpha_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y);$$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 + \Delta_e \varphi_1 \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 = M_y \sum_{y=1}^z \alpha_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y),$$

После подстановки частного решения  $\varphi_1 = A_1 \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \varepsilon_1)$ , а также преобразования суммы в правой части уравнения [как было сделано в аналогичных выражениях (5.34) и (5.35)], т. е., положив

$$\sum_{y=1}^z \alpha_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y) = \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y$$

получим

$$-A_1 \Delta \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \varepsilon_1) + A_1 \Delta_e \sum_{y=1}^p \ddot{\varphi}_y \alpha_y^2 \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \varepsilon_1) =$$

$$= M_y \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y.$$

Это уравнение справедливо при любом значении  $\tau$ , а потому начальные фазы его синусных компонентов должны быть равны ( $\varepsilon_1 = \gamma_1$ ).



Тогда, поделив обе части последнего уравнения на тригонометрический член, получим

$$A_1 (\Delta_e - \Delta) \sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2 = M_y \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y.$$

Отсюда может быть найдена действительная амплитуда вынужденных колебаний первой массы

$$A_1 = \frac{M_y \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y}{(\Delta_e - \Delta) \sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2} \text{ рад.} \quad (7.08)$$

Действительная амплитуда эластического момента при этом может быть вычислена на основании зависимости (3.33)

$$F_{y, y+1} = \frac{1}{e_0} \delta_{y, y+1} A_1 \text{ кгсм.} \quad (7.09)$$

Все входящие в эти выражения величины заимствуются из расчета свободных колебаний, независимо от того, каким способом он выполнен.

Для удобства вычислений отношение частот может быть заменено отношением соответствующих им чисел оборотов коленчатого вала. Так как  $\Delta_e = f(n_R)$ , а  $\Delta = f(n)$ , то

$$A_1 = \frac{M_y \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y}{\Delta_e \left[ 1 - \left( \frac{n}{n_R} \right)^2 \right] \sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2} \text{ рад.} \quad (7.10)$$

Если функцию  $A_1 = f(n)$ , представляющую собой часть кривой резонанса, построить для значений  $n/n_R$ , близких к единице (что соответствует резонансу), то она примет вид, представленный на рис. 53, а сплошными линиями. Ветвь 1 оказывается здесь повернутой вниз, так как начальная фаза колебания после перехода через резонанс меняется на  $180^\circ$ . Так как нас интересуют лишь абсолютные значения амплитуд, то эта ветвь строится, как показано на том же рисунке пунктиром.

На рис. 53, б представлена кривая резонанса в том виде, как она обычно изображается. Скругление в верхней части пика выполняется приближенно подобранным радиусом, которым описывается дуга, касательная к обеим ветвям кривой и проходящая через точку С, определяемую величиной резонансной амплитуды  $A_{1R}$ ,

которая находится из предварительно выполняемого расчета резонансных колебаний (§ 61).

Описанный расчет оказывается достаточным для предварительной оценки крутильных колебаний только в тех случаях, когда в системе не наблюдается близко расположенных резонансов.

Принятое допущение о совпадении форм вынужденных и свободных колебаний будет наиболее достоверным у пика кривой.

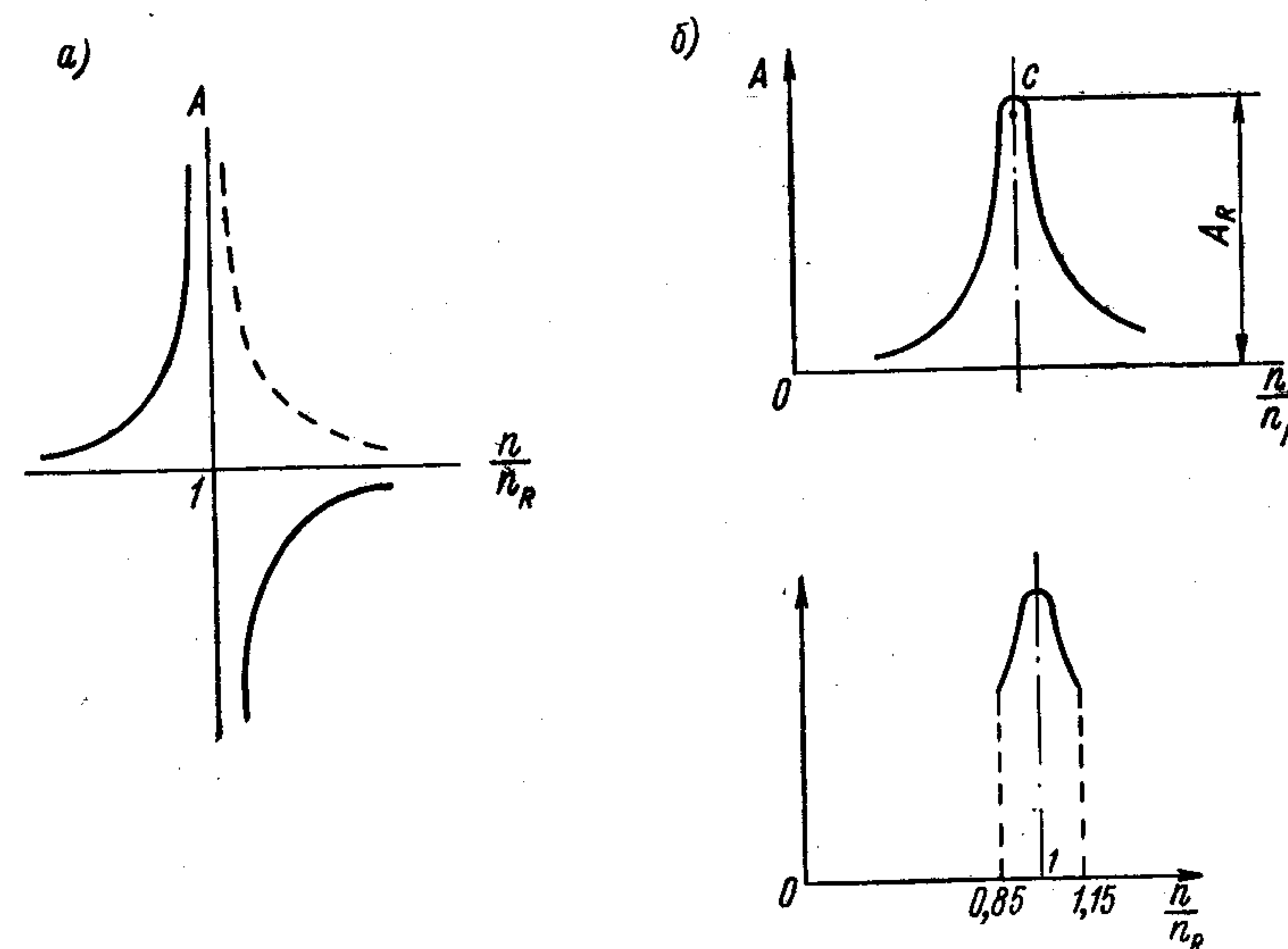


Рис. 53. К построению кривой резонанса: а — функция  $A = f\left(\frac{n}{n_R}\right)$ ; б — кривая резонанса; в — кривая околорезонансных амплитуд.

По мере удаления от резонанса достоверность кривой падает по причине не учитываемого нами влияния других гармоник возмущающего момента и изменения формы колебаний.

### § 63. Расчет околорезонансных колебаний

Точный расчет вынужденных нерезонансных колебаний требует значительной затраты времени. Он исходит из предпосылок и допущений, отличных от принятых в расчете резонансных колебаний, и позволяет определить амплитуды колебаний масс как вблизи резонанса, так и на значительном удалении от него, что требуется сравнительно редко. Эти соображения побудили к разработке методики расчета околорезонансных колебаний, т. е. колебаний в пределах оборотов вала, отличающихся от резонансных не более чем на  $10 \div 15\%$  [57 стр. 64]. В большинстве случаев он позволяет быстро находить запретные зоны с достаточной точностью.



При расчете околорезонансных колебаний принимаются три допущения:

- форма околорезонансных колебаний совпадает с формой свободных колебаний;
- влиянием демпфирующих сопротивлений можно пренебречь;
- влияние нерезонирующих гармонических составляющих возмущающего момента можно не учитывать.

Первое допущение влечет за собой ошибку, возрастающую по мере удаления от резонанса, второе вносит ошибку вблизи резонанса, а третье — не позволяет применять этот способ в случаях, когда, помимо рассматриваемого, в системе имеется близкий резонанс с другой гармоникой возмущающего момента.

Расчет околорезонансных колебаний производится после того, как способом, изложенным в предыдущем параграфе, установлены опасные резонансные амплитуды колебаний  $A_{1R}$  или эластических моментов  $F_{y, y+1R}$ . Соответствующие околорезонансные амплитуды вынужденных колебаний могут быть найдены в указанном выше диапазоне по приближенным формулам [56]. Для случаев, когда двигатель расположен в начале системы, они имеют вид

$$A_y \approx \frac{A_{yR} \Phi_e}{R_n} \text{ рад; } F_{y, y+1} \approx \frac{F_{y, y+1R} \Phi_e}{R_n} \text{ кгсм,} \quad (7.11)$$

где  $\Phi_e$  — интенсивность нарастания  $e$ -узловой составляющей вынужденных колебаний системы

$$\Phi_e = \frac{\alpha_z M_z^{(1)}}{\Delta_e \sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2}; \quad (7.12)$$

$R_n$  — функция числа оборотов вала,  $\Phi_e$  и найденной резонансной амплитуды

$$R_n \approx \sqrt{\Phi_e^2 + (1 - n_x^2)^2 A_{1R}^2}; \quad (7.13)$$

$n_x = \frac{n}{n_R}$  — отношение числа оборотов вала, при котором определяются амплитуды вынужденных колебаний, к его резонансному числу оборотов.

Принимая  $n_x$  в диапазоне 0,85–1,15, в табличной форме находят ряд значений  $A_y$  или  $F_{y, y+1}$  и строят кривую резонанса, которая имеет вид, представленный на рис. 53, в.

Аналогичные более точные (но и более сложные) формулы, предложенные Терских, позволяют расширить рассматриваемый диапазон околорезонансных колебаний до  $0,6 < n_x < 1,4$ .

Часто в качестве масштабного фактора, позволяющего производить вычисление действительных амплитуд, принимается амплитуда не первой, а какой-то промежуточной массы.

Когда двигатель располагается в середине системы (или когда при его расположении в начале системы за единицу принята амплитуда какой-то другой массы), а резонансный возбудитель и работа демпфирующих сопротивлений вычислены по отношению к массе с номером  $t$ , компоненты формул для определения амплитуд околорезонансных колебаний (7.07) и (7.08) принимают вид

$$\Phi_e = \frac{|\alpha_t| M_{tR}^{(1)(p)}}{\Delta_e \sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2} \text{ и } R_n = \sqrt{\Phi_e^2 + (1 - n_x^2)^2 \left(\frac{A_{tR}}{\alpha_t}\right)^2}. \quad (7.14)$$

Входящая в зависимости данного параграфа сумма произведений безразмерных моментов инерции масс на квадраты их амплитуд, как показывает Терских [57], пропорциональна первой производной стойкости системы  $H_k^{(1)(p)}$ , взятой с обратным знаком по квадрату частоты  $\Delta$  (при исследуемой частоте свободных колебаний  $\Delta = \Delta_e$ ), а потому может быть выражена тангенсом угла  $\gamma_k$  наклона касательной кривой этой стойкости в точке  $\Delta = \Delta_e$  (см. рис. 23). Аналитически эти соотношения выражаются зависимостью

$$\sum_{y=1}^p \vartheta_y \alpha_y^2 = \alpha_k^2 \left[ \frac{d}{d\Delta} (-H_k^{(1)(p)}) \right]_{\Delta=\Delta_e} = \alpha_k^2 \operatorname{tg} \gamma_k. \quad (7.15)$$

Формулы (7.06–7.08) дают несколько преувеличенные значения амплитуд в дорезонансной области и заниженные — в зарезонансной области чисел оборотов.

#### § 64. Колебания при переходе через резонанс

В некоторых случаях резонансы обнаруживаются ниже эксплуатационных режимов или между ними. Поэтому при пуске, остановке и изменении режимов мы встречаемся с переходом через запретные зоны. В течение коротких промежутков времени, когда число оборотов вала непрерывно меняется, резонансные амплитуды не достигают величин, найденных описанным расчетом, который предполагает, что на каждом режиме имеются установившиеся колебания.

При переходе через резонанс в линейных системах экспериментально наблюдаются следующие особенности:

- при уменьшении скорости вращения вала наибольшие колебания развиваются при оборотах ниже резонансных, а при увеличении — при оборотах выше резонансных;

— если переход через резонанс осуществляется достаточно быстро и трение в системе невелико, то амплитуды колебаний после



прохождения резонанса убывают не монотонно, а имеют несколько максимумов уменьшающейся величины, т. е. колебания носят характер затухающих биений (рис. 54).

Указанные смещения и снижения основного максимума колебаний тем значительнее, чем больше ускорение числа оборотов вала.

Теоретическое обоснование этих явлений было дано А. М. Кац [22]. Ниже кратко излагается понятие о расчете максимальных колебаний. Расчет более подробно изложен в [57, стр. 44], его производят только для сильных резонансов. Результаты расчета используются для суждения об опасности переходных колебаний и для правильной оценки результатов торсиографирования.

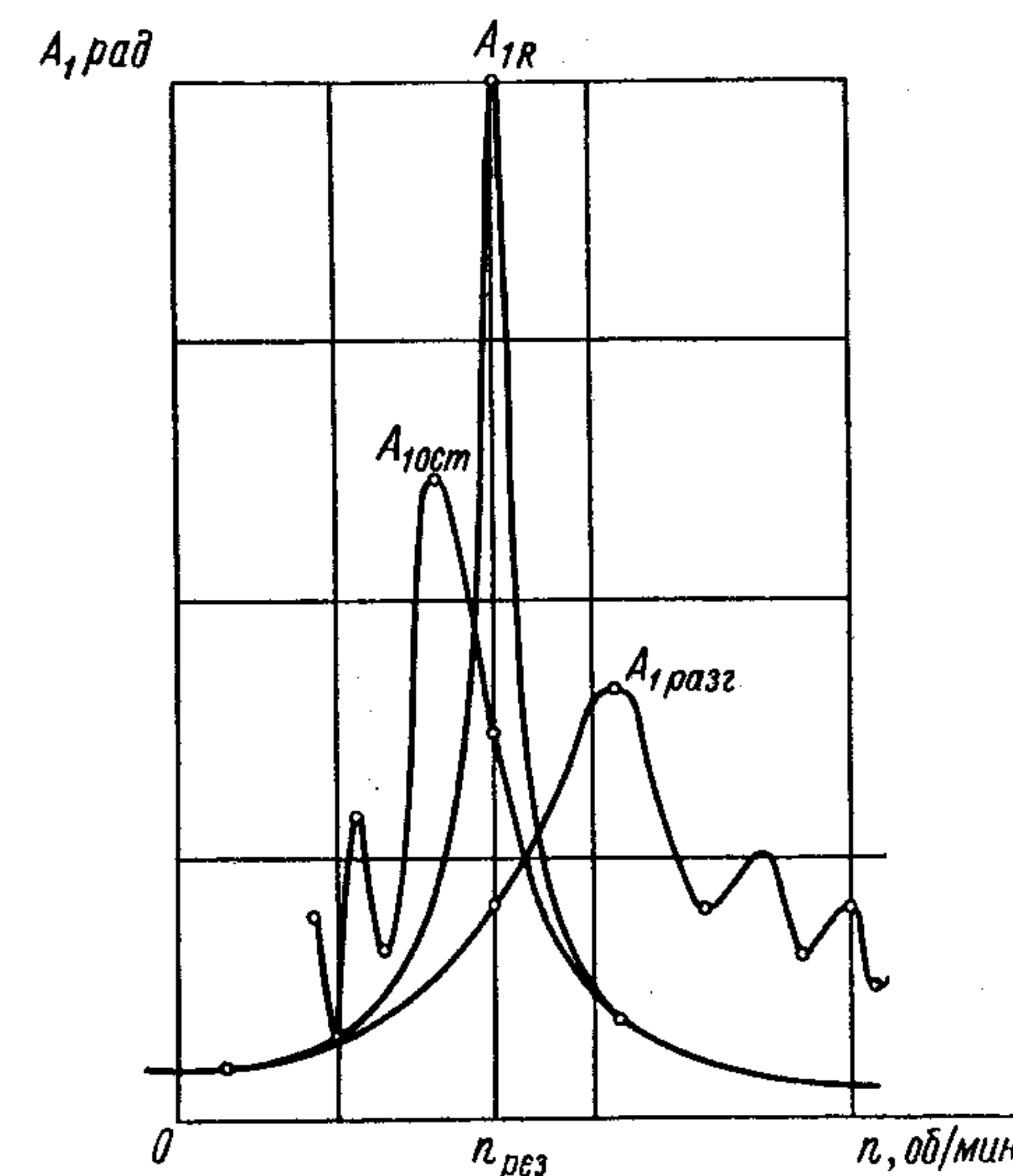


Рис. 54. Характер кривой резонанса при установившемся режиме, при разгоне двигателя и при его остановке.

$\eta_{мн}$  — механический к. п. д. установки при номинальном режиме.

Последние связаны зависимостью

$$M_n = \eta_{мн} (M_n + M_T);$$

$$M_T = \left( \frac{1}{\eta_{мн}} - 1 \right) M_n \approx \left( \frac{1}{\eta_{мн}} - 1 \right) M_p,$$

где приближенное равенство является справедливым только при отсутствии специальных устройств, ограничивающих крутящий момент при разгоне.

Уравнение движения вала запишем в предположении абсолютной жесткости системы

$$M_p = \frac{d\varphi}{dt} \theta + M_c,$$

где  $\theta = \sum_{y=1}^p \theta_y$  — сумма приведенных к валу моментов инерции всех масс системы, а  $M_c$  — момент полезного сопротивления.

Решение этого дифференциального уравнения применительно к системе стационарного двигателя или дизель-генератора позволяет найти закон изменения числа оборотов вала при разгоне без нагрузки. При  $M_c = 0$

$$n_{разг} = n_a + \frac{9,55 M_p}{\theta} t \text{ об/мин.} \quad (7.16)$$

При снижении числа оборотов вала или остановке, когда топливо выключается, получается аналогичное выражение, в котором вместо  $n_{разг}$  следует записать  $n_{ост}$ , а вместо  $M_p$  подставить  $M_T$  со знаком минус.

В случае судового двигателя, непосредственно связанного с гребным винтом, когда крутящий момент  $M_p$  изменяется пропорционально квадрату числа оборотов вала, для разгона получается более сложная формула

$$n_{разг} = n_n \sqrt{\frac{M_p}{M_n}} \text{th} \frac{9,55 \sqrt{M_p M_n}}{\theta n_n} (t - t_0) \text{ об/мин,} \quad (7.17)$$

где

$$t_0 = \frac{\theta n_n}{9,55 \sqrt{M_p M_n}} \text{arcth} \left( \frac{n_{а разг}}{n_n} \sqrt{\frac{M_n}{M_p}} \right) \text{ сек.}$$

При остановке двигателя те же выражения могут быть использованы, если вместо  $n_{разг}$  подставить  $n_{ост}$ , а вместо  $M_p$  подставить  $M_T$ . Кроме того в обоих выражениях гиперболический тангенс заменяется круговым, а  $n_a$  и  $t_0 = t'$  должны соответствовать моменту выключения топлива.

Если частоту  $\nu$ -й гармоники возмущающего момента обозначить  $\omega_\nu$ , то быстрота ее изменения, характеризующаяся ускорением  $\epsilon$ , будет связана с числом оборотов вала зависимостью

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi}{30} \nu \left| \frac{dn}{dt} \right| \text{ сек}^{-2}. \quad (7.18)$$

Это ускорение является весьма важным фактором для оценки быстроты прохождения резонанса. При разгоне судового двигателя оно может быть найдено из выражения

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{M_n n^2}{M_p n_n^2} \right) \frac{\nu M_p}{\theta} \text{ сек}^{-2}, \quad (7.19)$$

которое для случая остановки двигателя сохраняет свой вид, если  $M_n$  заменить на  $-M_T$ .



Эти формулы пригодны и для стационарных двигателей. Так как запуск этих двигателей и их остановка производятся без нагрузки, то здесь следует положить  $M_n = 0$ . При этом ускорение становится постоянным.

Для упрощения решения задачи линейными полагают эти зависимости и для судового двигателя, но ускорение подсчитывают здесь по формуле (7.19) при значении  $n$  равном резонансному числу оборотов  $n_R$ .

Если изменить начало отсчета времени таким образом, чтобы при  $t = 0$  число оборотов вала было также равно нулю ( $n = 0$ ), то возмущающий момент, приложенный к  $y$ -й массе, может быть представлен в виде

$$M'_y = M_y \sin \left( \int_0^t \omega dt + \psi_y \right) = M_y \sin \left( \frac{\varepsilon t^2}{2} + \psi_y \right), \quad (7.20)$$

где  $M_y$  и  $\psi_y$  — амплитуда и начальная фаза момента.

При действии таких моментов в системе возникают колебания масс и эластические моменты в соединениях

$$\varphi_y = A_y \sin \left( \frac{\varepsilon}{2} t^2 + \xi_y \right);$$

$$U_{y, y+1} = F_{y, y+1} \sin \left( \frac{\varepsilon}{2} t^2 + \xi_{y, y+1} \right); \quad (7.21)$$

их характер представлен на рис. 54.

Как уже описывалось, после перехода через резонанс амплитуды колебаний еще продолжают возрастать. Достигнув первого максимума, они начинают уменьшаться, а затем снова возрастают. После второго максимума они опять уменьшаются и т. д.

Наиболее опасным является первый максимум. Приведем расчетные формулы, необходимые для его оценки.

Относительная быстрота прохода через резонанс

$$a = \frac{\varepsilon}{\omega_e^2} = \frac{91,2}{\sqrt{2} n_R^2}. \quad (7.22)$$

Наибольшая амплитуда колебаний наступает при числе оборотов вала

$$n_b = n_R \left[ 1 \pm \frac{13,6 \sqrt{a}}{(2,5 + L)^2} \right] \text{ об/мин}; \quad L = \frac{\Phi_e A_{1R}}{2,83 \sqrt{a}}, \quad (7.23)$$

где знак (+) выбирается при разгоне двигателя, а знак (—) — при остановке.

Величина максимальной амплитуды

$$A_b = \frac{4L + 10L^2}{1 + (4L + 10L^2)} A_{1R} \text{ рад.} \quad (7.24)$$

Входящая в эти формулы величина  $L$  является функцией работы возмущающих моментов за одно колебание (7.23) при установившемся режиме с частотой  $\omega_e$ , интенсивности нарастания  $e$ -узловой составляющей вынужденных колебаний системы  $\Phi_e$  (7.12), резонансной амплитуды при установившихся колебаниях и других известных параметров. Если за единицу принимается не первая масса, то вместо  $A_{1R}$  записываем  $A_{tR}/\alpha_t$ , а  $\Phi_e$  учитываем по формуле (7.14).

Кривые резонансов при установившемся режиме, разгоне двигателя и его остановке представлены на рис. 54.

Так как величина максимальной амплитуды существенно зависит от быстроты прохода через резонанс, то механикам, обслуживающим дизель, вменяется в обязанность в случаях ручного запуска подобных установок осуществлять ускоренный разгон двигателя. Запретная зона при этом должна быть закрашена на шкале тахометра. Если сильные колебания такого характера наблюдаются при остановке двигателя после включения топлива, то при клапанном газораспределении их можно существенно уменьшить введением декомпрессии цилиндров. На двигателях с малым и средним числом оборотов и большими маховыми массами, где снижение оборотов происходит медленно, такие устройства автоматически приоткрывают клапаны сразу после выключения топлива, что существенно снижает возмущающие моменты от сил газов и уменьшает колебания при проходе резонансов.

Численный пример подобного расчета см. [57, стр. 47].

## § 65. Определение запретных зон чисел оборотов и оценка результатов расчета

При знакопеременной нагрузке элементы валопровода разрушаются вследствие усталости материала. Такие разрушения начинаются на наружной поверхности вала с микроскопической малой трещины, возникающей в месте концентрации напряжений (галтель, выточка, сверление). При последующей работе эта трещина постепенно углубляется, распространяясь по сечению, в котором действуют наибольшие нормальные напряжения. При чистом кручении это сечение, как известно, располагается под углом  $45^\circ$  к оси вала (рис. 55). Поверхность излома на этой стадии разрушения характеризуется мелкозернистой структурой.

Когда сечение вала будет существенно ослаблено трещиной, напряжения в его неразрушенной части значительно возрастают, что сопровождается заметными деформациями вала. Некоторые части соприкасающихся поверхностей излома начинают при этом тереться одна о другую. Возникают блестящие натирки.

После того как напряжения в уцелевшей части сечения преобладают предел прочности материала, вал внезапно ломается. Эту



часть сечения легко обнаружить, так как излом здесь имеет крупнозернистое строение.

Расчет резонансных и околорезонансных колебаний позволяет установить запретные зоны — диапазоны чисел оборотов, в которых недопустима длительная работа установки. В пределах этих диапазонов амплитуды напряжений скручивания превосходят предел усталости материала вала.

Установка считается удовлетворяющей требованиям надежности и допускается к эксплуатации только тогда, когда расчетом и последующим торсиографированием установлены границы запретных зон и когда эти запретные зоны не препятствуют работе установки на предусмотренных эксплуатирующей организацией режимах.

Кроме того, расчет позволяет установить недопустимость перехода через резонансы, что также препятствует выдаче разрешения на эксплуатацию установки без проработки и последующего осуществления дополнительных мероприятий, гарантирующих ее надежность.

Рис. 55. Изломы валов от крутильных колебаний.

Для того чтобы установить наличие или отсутствие двух указанных особенностей рассматриваемой установки, после нахождения резонансных и околорезонансных амплитуд напряжений в наиболее опасном участке валопровода строят кривые резонанса. По оси абсцисс соответствующего графика откладывается  $n/n_R$  — отношение текущего числа оборотов вала к числу оборотов этого вала при номинальном режиме. По оси ординат откладывается напряжение  $0 < \tau < 1000 \text{ кг/см}^2$ .

Кривые резонанса строятся на основании расчетов по формулам (7.03 — 7.05), (7.08) и (3.94), как показано на рис. 56. На тот же график наносятся допускаемые амплитуды дополнительных напряжений скручивания от крутильных колебаний, которые вычисляются по эмпирическим формулам, основанным на данных, характеризующих усталостную прочность металлов: для длительной работы

$$\tau_{\text{доп}} = \frac{\tau_{-1} \beta \epsilon_\tau}{k_\tau \eta_\tau} \left[ 1 + a \left( 1 - \frac{n}{n_R} \right) \right] \text{ кг/см}^2; \quad (7.25)$$

для кратковременного прохода через резонанс (предельно-допускаемые амплитуды переходных напряжений) в промежуточных,

а также коленчатых и гребных валах соответственно

$$\begin{aligned} \tau_{\text{доп}}^{\text{пер}} &= 1,8 \tau_{\text{доп}} \text{ кг/см}^2; \\ \tau_{\text{доп}}^{\text{пер}} &= 2 \tau_{\text{доп}} \text{ кг/см}^2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

В этих формулах обозначены:

- $\tau_{-1}$  — предел выносливости материала при кручении (табл. VI);
- $\beta$  — коэффициент упрочнения материала поверхностной обработкой (табл. XI);
- $k_\tau$  — коэффициент концентрации (табл. IX, XI);
- $a$  — коэффициент, учитывающий влияние среднего крутящего момента и быстроту накопления усталостных явлений (табл. 15);
- $\eta_\tau$  — условный запас прочности, компенсирующий неточность расчетных формул, неучет напряжений вынужденных колебаний от всех других гармоник возмущающего момента, напряжения изгиба и пр. (табл. 15);
- $\epsilon_\tau$  — коэффициент влияния абсолютных размеров сечения вала, вычисляемый по эмпирической формуле, составленной на основании данных [51],

$$\epsilon_\tau \approx 0,48 \frac{3 + \sqrt{d}}{1 + \sqrt{d}}, \quad (7.27)$$

где  $d$  — диаметр вала.

Таблица 15

Условный запас прочности и коэффициент, характеризующий накопление усталостных явлений

Тип вала и характер его нагружения	$\eta_\tau$	$a$	
		$0 < n < n_R$	$n_R < n < 1,2 n_R$
Промежуточные валы, не испытывающие знакопеременного изгиба	1,6	+0,6	—3
Промежуточные и коленчатые валы, испытывающие знакопеременный изгиб	2,0	+0,8	—4

Для буксиров, ледоколов, траулеров и других судов, длительно эксплуатирующихся на различных режимах при многократном маневрировании, реверсировании и пусках следует в формулах (7.25) и (7.26) положить  $n/n_R = 1$ . Допускаемые напряжения при этом будут постоянными для всего диапазона эксплуатационных режимов.

Если в валопроводе имеется зубчатая передача, то решающим условием надежности ее работы является отсутствие перекладки



зазоров в зубцах, что имеет место при  $F < M^{cp}$  (см. § 11). Поэтому диапазоны оборотов, в пределах которых наблюдается перекадка, должны быть отмечены как запретные зоны.

При наличии упругих муфт следует убедиться, что они работают в пределах линейной части их характеристики. Если этого нет, расчет следует повторить, учитывая нелинейность указанного соединения (гл. 8).

В заключении по расчету крутильных колебаний, наряду с запретными зонами, должны быть указаны заданные заказчиком фиксированные режимы, на которых предполагается эксплуатировать установку.

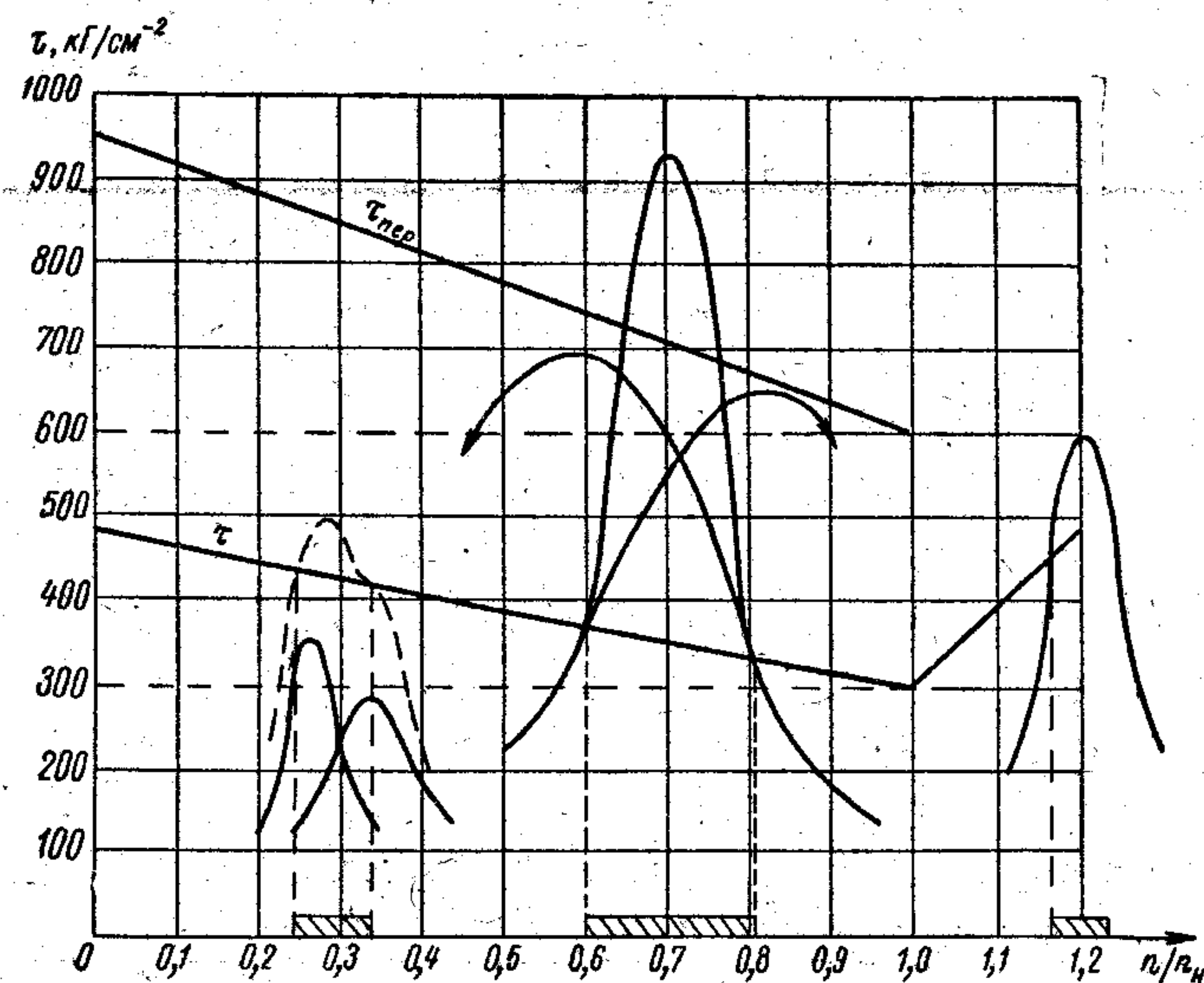


Рис. 56. Определение запретных зон.

Границы запретных зон следует назначать такими, при которых работа установки в непосредственной от них близости безопасна.

Изложенный здесь расчет околорезонансных колебаний обуславливает несколько преувеличенные значения амплитуд в дорезонансной зоне и преуменьшенные — в зарезонансной зоне. Некоторое уточнение и расширение околорезонансного диапазона,  $0,6 < n/n_R < 1,4$  может быть выполнено на основании более совершенных формул, предложенных Терских [57].

Требований о полном отсутствии запретных зон обычно не предъявляют.

Если интервалы между границами запретных зон и ближайшими к ним эксплуатационными фиксированными режимами менее 3% от соответствующих чисел оборотов, возникает необходимость в уточненном расчете вынужденных колебаний (§ 67). Особенно

необходимым является такой расчет, когда запретная зона располагается за верхней границей рабочего диапазона чисел оборотов установки, так как в большей части установок возможно кратковременное повышение числа оборотов, связанное с оголением гребного винта при волнении моря или со сбросом нагрузки. Последний наблюдается в установках с разобщительными муфтами и работающих на генератор.

В случаях, когда опасными являются переходные напряжения, их следует уточнить соответствующим расчетом, изложенным в § 64. На рис. 56 эти напряжения отражены двумя ответвлениями от наибольшего пика.

## § 66. Понятие о расчете вынужденных нерезонансных колебаний линейных систем без трения по способу Терских

Точный расчет нерезонансных колебаний является сложным и трудоемким, его приходится выполнять в тех случаях, когда резонансные напряжения оказываются на пределе допустимости или превосходят их.

Под действием гармонических возмущающих моментов данного порядка, при установившемся режиме, в системе возникают вынужденные колебания гармонического характера с частотой, свойственной этим моментам. При приближенном расчете систем с малым трением ( $\mu < 0,1 \div 0,2$ ) последним пренебрегают, а форму вынужденных нерезонансных колебаний считают совпадающей с формой свободных колебаний, несмотря на то, что это имеется только в тех частях системы, где нет возмущающих моментов. Кроме того, если смежные резонансы располагаются достаточно далеко, т. е. кривые резонанса не накладываются одна на другую, то учитывают действие только той гармонической составляющей возмущающего момента, которая имеет частоту, близкую к частоте резонирующей формы свободных колебаний.

Общее движение системы обычно находят суммированием вынужденных колебаний, возникающих под действием отдельных гармонических составляющих возмущающих моментов.

Переходя к закономерностям, свойственным рассматриваемому явлению, допустим, что возмущающие моменты приложены только к массам системы

$$M_y' = M_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y).$$

Система дифференциальных уравнений в этом случае, будет отличаться от составленной для свободных колебаний (3.04) только наличием моментов в правых частях уравнений. Для  $y$ -й массы уравнение движения (в безразмерной системе) имеет вид

$$\partial_y \ddot{\varphi}_y + \frac{\varphi_y - \varphi_{y-1}}{E_{y-1, y}} - \frac{\varphi_{y+1} - \varphi_y}{E_{y, y+1}} = M_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \psi_y). \quad (7.28)$$



Полагая здесь  $y = 1, 2, \dots, p$  ( $p$  — число всех масс системы), составляем систему дифференциальных уравнений. Ее решение

$$\varphi_y = A^0 + A'\tau + \sum_{e=1}^{p-1} A_{ye} \sin(\tau\sqrt{\Delta_e} + \xi_e) + A_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \psi_y),$$

где  $A^0$  и  $A'$  — постоянные интегрирования, определяющие положение массы и ее скорость. Третий член правой части выражения описывает затухающее колебание с частотой, свойственной главному свободному колебанию  $e$ -узловой формы. Последний же член — частное решение — характеризует интересующее нас вынужденное колебание с частотой  $\sqrt{\Delta}$  возмущающего момента. Поэтому принимаем

$$\varphi_y = A_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_y). \quad (7.29)$$

В соединениях между каждой парой смежных масс возникают гармонические эластические моменты

$$U_{y,y+1} = \frac{1}{E_{y,y+1}} (\varphi_{y+1} - \varphi_y) = F_{y,y+1} \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_{y,y+1}). \quad (7.30)$$

На основании этой зависимости и соотношения (3.39) преобразуем (7.28)

$$-\partial_y \Delta \varphi_y + U_{y-1,y} - U_{y,y+1} = M_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \psi_y). \quad (7.31)$$

Из выражений (7.30) и (7.31), используя (7.29), вместо каждого из уравнений вида (7.28) находим два выражения

$$\begin{aligned} F_{y,y+1} \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_{y,y+1}) &= F_{y-1,y} \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_{y-1,y}) + \\ &+ H_y A_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_y) - M_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \psi_y); \\ A_{y+1} \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_{y+1}) &= A_y \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_y) + \\ &+ E_{y,y+1} F_{y,y+1} \sin(\tau\sqrt{\Delta} + \xi_{y,y+1}). \end{aligned}$$

Теперь запишем эти зависимости в комплексных величинах (см. § 48), т. е. представим каждую гармоническую функцию в виде вертикальной проекции равномерно вращающегося с угловой скоростью  $\sqrt{\Delta}$  соответствующего вектора. При этом получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \bar{F}_{y,y+1} &= \bar{F}_{y-1,y} + H_y \bar{A}_y - \bar{M}_y; \\ \bar{A}_{y+1} &= \bar{A}_y + E_{y,y+1} \bar{F}_{y,y+1}; \\ \bar{F}_{0,1} &= \bar{F}_{p,p+1} = 0, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где безразмерные комплексные величины представляют собой амплитуды:

$$\begin{aligned} \text{возмущающего момента} & - \bar{M}_y = M_y (\cos \psi_y + i \sin \psi_y), \quad \text{см.} \\ \text{колебания} & \quad \quad \quad \bar{A}_y = A_y (\cos \xi_y + i \sin \xi_y); \end{aligned} \quad (5.40); \quad (7.33)$$

эластического момента

$$\bar{F}_{y,y+1} = F_{y,y+1} (\cos \xi_{y,y+1} + i \sin \xi_{y,y+1}).$$

Система уравнений, составленная на основании (7.32), охватывает все элементы рассматриваемой динамической системы. Текущий номер  $y$  принимается в пределах от 1 до  $p$ . Последнее из этих уравнений выражает отсутствие моментов за пределами системы. Этим уравнениям вполне достаточно, чтобы найти действительные амплитуды колебаний всех масс и эластических моментов всех соединений, так как по сравнению с аналогичными выражениями (3.04) здесь, при том же числе уравнений, дан известный нам возмущающий момент.

В последующих преобразованиях встретятся функции возмущающих моментов:

амплитуда возбудителя части системы от  $k+1$ -й до последней массы

$$\begin{aligned} \bar{M}_{k+1}^{(p)} &= \bar{M}_{k+1} + \frac{1}{E_{k+1,k+2}^{(p)} H_{k+2}^{(p)}} \times \\ &\times \left[ \bar{M}_{k+2} + \dots + \frac{1}{E_{p-2,p-1}^{(p)} H_{p-1}^{(p)}} \left( \bar{M}_{p-1} + \frac{\bar{M}_p}{E_{p-1,p}^{(p)} H_p^{(p)}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (7.34)$$

амплитуда воздействия части системы от соединения  $k-1, k$ , до первой массы

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{k-1,k}^{(1)} &= \frac{-1}{H_{k-1}^{(1)}} \left\{ \bar{M}_{k-1} + \frac{1}{E_{k-1,k-2}^{(1)} H_{k-2}^{(1)}} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \bar{M}_{k-2} + \dots + \frac{1}{E_{2,3}^{(1)} H_2^{(1)}} \left( \bar{M}_2 + \frac{\bar{M}_1}{E_{1,2}^{(1)} H_1^{(1)}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Последовательное исключение неизвестных из всех уравнений вида (7.32) позволяет получить два новых уравнения с двумя неизвестными  $\bar{A}_k$  и  $\bar{F}_{k,k+1}$ , на основании которых можно составить  $2p-1$  уравнения, представляющих собой решение исходной системы (7.28),

$$H_k^{(1)} \bar{A}_k - \bar{F}_{k,k+1} = \bar{M}_k^{(1)}; \quad \bar{A}_k + E_{k,k+1}^{(p)} \bar{F}_{k,k+1} = \bar{Q}_{k,k+1}^{(p)}. \quad (7.36)$$



Здесь  $H_k^{(1)}$  и  $E_{k,k+1}^{(p)}$  — стойкость и податливость частей систем;

$\bar{M}_k^{(1)} = \bar{M}_k - \frac{\bar{Q}_{k-1,k}^{(1)}}{E_{k-1,k}^{(1)}}$  — амплитуда возбудителя части системы от  $k$ -й до первой массы;

$\bar{Q}_{k,k+1}^{(p)} = \frac{\bar{M}_{k+1}^{(p)}}{H_{k+1}^{(p)}}$  — амплитуда воздействия части системы от соединения  $k, k+1$  до последней массы.

Решение системы уравнений вида (7.36) позволяет найти амплитуду колебаний  $k$ -й массы

$$\bar{A}_k = \frac{\bar{M}_k^{(1)(p)}}{H_k^{(1)(p)}} \quad (7.37)$$

ее комплексная величина определяется отношением комплексной амплитуды возбудителя системы к стойкости системы в той же массе  $H_k^{(1)(p)}$ , и амплитуду эластического момента в соединении  $k, k+1$ , комплексная величина которой определяется отношением комплексной амплитуды воздействия на систему к ее податливости в том же соединении  $E_{k,k+1}^{(1)(p)}$

$$\bar{F}_{k,k+1} = \frac{\bar{Q}_{k,k+1}^{(1)(p)}}{E_{k,k+1}^{(1)(p)}} \quad (7.38)$$

Амплитуда возбудителя системы в  $k$ -й массе может быть вычислена из выражения

$$\bar{M}_k^{(1)(p)} = \bar{M}_k - \frac{\bar{Q}_{k-1,k}^{(1)}}{E_{k-1,k}^{(1)}} + \frac{\bar{Q}_{k,k+1}^{(p)}}{E_{k,k+1}^{(p)}}, \quad (7.39)$$

а амплитуда воздействия на систему в соединении  $k, k+1$  из

$$\bar{Q}_{k,k+1}^{(1)(p)} = -\frac{\bar{M}_k^{(1)}}{H_k^{(1)}} + \frac{\bar{M}_{k+1}^{(p)}}{H_{k+1}^{(p)}} \quad (7.40)$$

Стойкость и податливость всей системы вычисляются по формулам (3.66) и (3.67).

Амплитуда возбудителя системы в  $k$ -й массе представляет собой некоторую функцию возмущающих моментов, которая зависит от элементов системы. При  $\Delta = 0$  она обращается в геометрическую сумму амплитуд возмущающих моментов  $\sum_{y=1}^p \bar{M}_y$ , т. е. выражается равнодействующей всех амплитуд возмущающих моментов, приложенных к системе. При других частотах эту функцию также можно рассматривать в качестве равнодействующей рассматриваемых моментов, но с учетом степени эффективности каждого из них по отношению к конкретному месту системы. Эти соображения побудили

назвать ее *возбудителем системы в данном месте*, а функцию  $\bar{M}_k^{(1)}$ , характеризующую действие части возмущающих моментов, называть *возбудителем части системы*.

Если возбудитель всей системы, как видно из формулы (7.37), способствует возрастанию амплитуды, то величина, находящаяся в знаменателе  $H_k^{(1)(p)}$ , ее уменьшает. Последняя как бы определяет противодействие системы возмущающим моментам. Это послужило поводом назвать ее *стойкостью системы*, как величину выражающую способность системы противостоять действию возмущающих моментов.

Амплитуда воздействия на систему  $\bar{Q}_{k,k+1}^{(1)(p)}$  подобно возбудителю системы является некоторой функцией возмущающих моментов, но существенно отличается от него, так как имеет размерность деформации соединения. Эта деформация возникает под воздействием тех же возмущающих моментов, т. е. характеризует их воздействие на систему в рассматриваемом соединении. Структура формулы (7.38) показывает, что ее знаменатель должен иметь размерность податливости, а так как он определяется всеми элементами системы и связан с конкретным ее соединением, то его называют *податливостью всей системы в данном соединении*.

Пример расчета вынужденных нерезонансных колебаний с табличными формами, способствующими его выполнению, дан в [57, стр. 92].

## § 67. Понятие о расчете вынужденных колебаний систем с трением по способу Терсних

В рассматриваемых дискретных системах трение сосредоточивается на массах или в соединениях. В качестве характеристик трения здесь принимается удельное трение, разъяснению которого посвящен § 53. Удельное трение массы обозначается символом  $\mu_k$ , а соединения символом  $\mu_{k,k+1}$ .

Как доказывается в теории колебаний [54, стр. 138], при наличии трения на массе момент инерции последней целесообразно выражать комплексным приведенным моментом инерции

$$\bar{\theta}_k = \theta_k (1 - i\mu_k) \text{ или } \bar{\vartheta}_k = \vartheta_k (1 - i\mu_k), \quad (7.41)$$

а при наличии трения в соединении его податливость выражать комплексной приведенной податливостью

$$\bar{e}_{k,k+1} = \frac{e_{k,k+1}}{1 + i\mu_{k,k+1}} \text{ или } \bar{E}_{k,k+1} = \frac{E_{k,k+1}}{1 + i\mu_{k,k+1}} \quad (7.42)$$

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы (рис. 37), если трение в соединении пропорционально скорости колебаний (§ 33). Момент сил трения выразим через



коэффициент демпфирования и составим соответствующее дифференциальное уравнение

$$\theta \ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} + b \dot{\varphi} = M \sin \omega t.$$

Подставим в него частное решение (4.04)

$$\begin{aligned} \varphi &= A \sin(\omega t - \varepsilon); \\ -A\theta\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon) + \frac{A}{e} \sin(\omega t - \varepsilon) + Ab\omega \cos(\omega t - \varepsilon) &= \\ &= M \sin \omega t. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Последний член левой части уравнения преобразуем

$$Ab\omega \cos(\omega t - \varepsilon) = -Ab\omega \sin[(\omega t - \varepsilon) - 90^\circ].$$

Переходя к комплексным величинам (7.33) замечаем, что этот член выражает проекцию вектора момента сил трения на мнимую координатную ось, перпендикулярную к вещественной оси, вдоль которой располагаются векторы инерционного и эластического моментов (рис. 40). Уравнение (7.43) при этом приобретает вид

$$-A\theta\omega^2 + \frac{A}{e} - iAb\omega = \bar{M}.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, введя стойкость массы  $H = -\theta\omega^2$  и удельное трение  $\mu = b\omega e$  (6.20)

$$H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{e} - iAb\omega = H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{e} (1 - i\mu) = H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{e(1 - i\mu)}.$$

Знаменатель дроби представляет собой комплексную податливость соединения с трением (7.42), поэтому уравнение приобретает вид

$$H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{e} = \bar{M} \quad \text{или} \quad H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{E} = \bar{M}. \quad (7.44)$$

Место заделки вала можно представить в качестве бесконечно большой массы  $\vartheta_2$ . Тогда стойкость такой же системы без трения будет

$$H^{(2)} = H + \frac{1}{E + \frac{1}{H_2}} = H + \frac{1}{E + \frac{1}{\infty}} = H + \frac{1}{E}.$$

Преобразуя уравнение (7.44), обнаруживаем в нем аналогичную величину, которую назовем *комплексной стойкостью этой системы* (с трением). Она обозначена символом  $\bar{H}^{(2)}$

$$H\bar{A} + \frac{\bar{A}}{E} = \bar{A} \left( H + \frac{1}{E} \right) = \bar{A} \bar{H}^{(2)} = \bar{M}. \quad (7.45)$$

Таким образом, получаем выражение, позволяющее найти амплитуду вынужденных колебаний массы,

$$\bar{A} \bar{H}^{(2)} = \bar{M} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \frac{\bar{M}}{\bar{H}^{(2)}}. \quad (7.46)$$

Можно показать [57, стр. 177], что для многомассовой системы с трением подобное выражение, позволяющее определить амплитуду колебаний  $k$ -й массы, имеет такой же вид

$$\bar{A}_k = \frac{\bar{M}_k^{(1)(p)}}{\bar{H}_k^{(1)(p)}}. \quad (7.47)$$

Сопоставляя эту формулу с полученной выше для системы без трения (7.37), обнаруживаем, что они вполне идентичны, но здесь вместо стойкости системы  $H_k^{(1)(p)}$  фигурирует комплексная стойкость  $\bar{H}_k^{(1)(p)}$ , которая в общем случае является функцией комплексных стойкостей масс и податливостей соединений  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$ . Таким образом для систем с трением пригодны все зависимости, полученные в § 66 для систем без трения, если входящие в них параметры элементов с трением заменить комплексными.

Вместо стойкости и податливости системы и ее частей при этом возникают:

$\bar{H}_k^{(1)(p)}$  — комплексная стойкость системы на  $k$ -й массе;

$\bar{E}_{k,k+1}^{(1)(p)}$  — комплексная податливость системы в соединении  $k, k+1$ ;

$\bar{H}_k^{(1)}$  — комплексная стойкость части системы от  $k$ -й до 1-й массы;

$\bar{E}_{k,k+1}^{(1)}$  — комплексная податливость части системы от соединения  $k, k+1$  до 1-й массы и т. п.

Располагая комплексными моментами инерции масс и податливостями соединений, можно получить выражения для амплитуд комплексного инерционного момента и комплексного эластического момента

$$\bar{R}_k = -\bar{\vartheta}_k \Delta A_k = -\bar{\vartheta}_k (1 - i\mu_k) \Delta A_k; \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{k,k+1} &= \frac{B_{k,k+1}}{\bar{E}_{k,k+1}} = \frac{1 + i\mu_{k,k+1}}{E_{k,k+1}} B_{k,k+1} = \\ &= F_{k,k+1} (1 + i\mu_{k,k+1}). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Эти величины выражают амплитуды суммарных моментов:

$\bar{R}_k$  — приведенного момента инерционных и демпфирующих сил и

$\bar{F}_{k,k+1}$  — приведенного момента упругих и демпфирующих сил.



## РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

## § 68. Общие положения

К нелинейным относятся такие системы, колебательные движения которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейность свойственна большинству механических

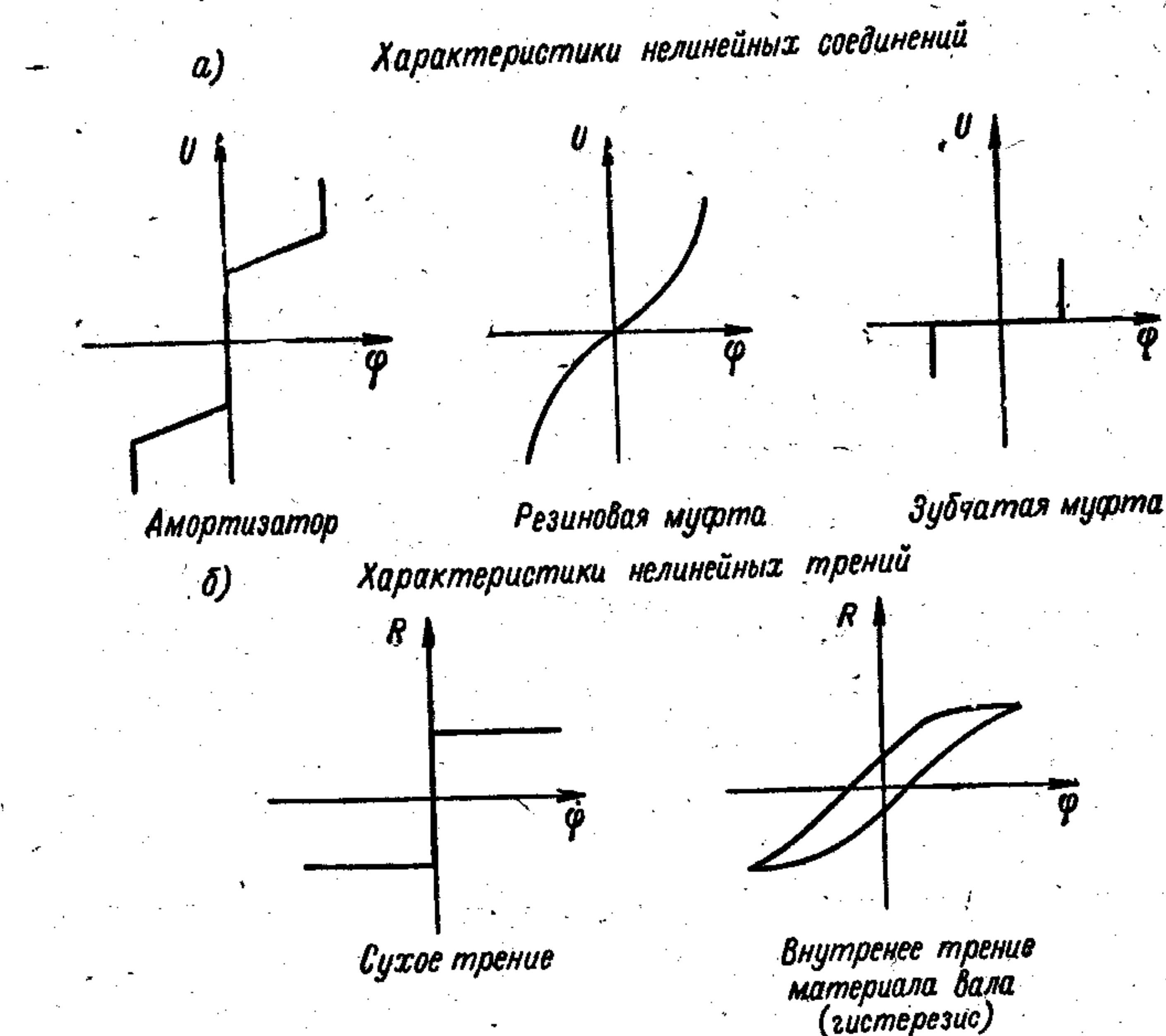


Рис. 57. Типы нелинейных характеристик.

систем. Обычно приведение этих систем к линейным дает лишь приближенную схему, удовлетворяющую инженерным запросам. Некоторые задачи не допускают линейного рассмотрения, так как при наличии нелинейности в системах наблюдаются существенно новые явления, принципиально отличные от наблюдаемых в линейных системах.

Нелинейные свойства систем обуславливаются наличием одного или нескольких нелинейных упругих соединений, а также нели-

Введение комплексных величин существенно облегчает последующие более сложные расчеты вынужденных колебаний систем с трением. Это достоинство, в частности, выражается в том, что для расчетов таких систем оказывается возможным применять формулы, полученные для систем без трения. Для этого достаточно заменить в них символы стойкостей и податливостей систем и их частей аналогичными символами, дополненными черточками сверху.

Так, для определения амплитуды эластического момента в соединении  $k, k+1$  системы с трением на основе формулы (7.38), получаем

$$\bar{F}_{k, k+1} = \frac{\bar{Q}_{k, k+1}^{(1)(p)}}{\bar{E}_{k, k+1}^{(1)(p)}}. \quad (7.50)$$

Следует отметить, что комплексные стойкость массы и податливость соединения вводятся в выражения стойкостей систем и их частей только для тех элементов, в которых имеются фрикционные свойства (трение). Таким образом, если только один элемент системы обладает этими свойствами, стойкость всей системы будет выражаться комплексным числом.



нейным трением, возникающим на массах или в соединениях этой системы.

Для нелинейных систем закон Гука о пропорциональности между деформацией и реактивной силой не применим из-за наличия в соответствующих соединениях некоторых специфических элементов, например, пружин с убывающей или возрастающей жесткостью; ограничителей, вводимых в соединения для устранения их перегрузки; зазоров, предусмотренных по технологическим причинам или возникающих в процессе эксплуатации установок и пр.

При колебаниях механических систем всегда возникают различные, весьма разнообразные по характеру и природе виды трения. В большинстве случаев сила трения изменяется непропорционально скорости перемещения массы или скорости деформации соединения. К таким видам относятся: трение, возникающее при проскальзывании различных фрикционных соединений; трение в резиновых элементах упругих муфт; внутреннее междучастичное трение в материале вала (гистерезис); трение в кривошипно-шатунных механизмах поршневых двигателей и др. Перечисленные виды трений можно отнести к категории так называемых естественных, имеющих в любой механической системе. Другую группу составляют трения, искусственно введенные путем установки специальных устройств, называемых демпферами и предназначенных для существенного уменьшения колебаний системы.

На рис. 57, а—б представлены основные виды нелинейных характеристик, встречающихся в валопроводах силовых установок.

### § 69. Свободные колебания нелинейной системы с одной степенью свободы

Уравнение свободных колебаний нелинейной одномассовой системы можно записать в виде

$$\theta \ddot{\varphi} + U = 0; \quad (8.01)$$

оно отличается от аналогичного уравнения для линейной системы (1.10) только тем, что вместо линейной характеристики эластического момента  $U = c\varphi$  ( $c = \text{const}$ ) здесь введена нелинейная ( $U = f(\varphi)$ ). Величина жесткости  $c$  зависит здесь от деформации  $\varphi$ .

Для решения данного уравнения выразим угловое ускорение массы  $\ddot{\varphi}$  через ее угловую скорость  $\dot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

и перепишем уравнение (8.01)

$$\theta d\dot{\varphi} \dot{\varphi} = U d\varphi. \quad (8.02)$$

Для интегрирования уравнения (8.02) за начало отсчета времени выбираем положение, при котором рассматриваемая масса

имеет наибольшее отклонение ( $\varphi_{\max} = A$ ), и угловую скорость равной нулю ( $\dot{\varphi} = 0$ ).

Тогда

$$\int_0^{\dot{\varphi}} \theta \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int_A^{\varphi} U d\varphi;$$

$$\frac{\theta \dot{\varphi}^2}{2} = - \int_A^{\varphi} U d\varphi = \int_{\varphi}^A U d\varphi,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\theta} \int_{\varphi}^A U d\varphi}. \quad (8.03)$$

Затем, интегрируя выражение (8.03) в пределах изменения  $\varphi$  от 0 до  $A$ , получаем время четверти полного колебания  $\frac{T}{4}$  и, следовательно, частоту свободных колебаний ( $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ )

$$\frac{T}{4} = \int_0^A \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{\theta} \int_{\varphi}^A U d\varphi}}. \quad (8.04)$$

Правая часть равенства (8.04) даже для простейших характеристик  $U = f(\varphi)$  не может быть выражена через элементарные функции. Если, например, упругая нелинейная характеристика выражается полиномом не выше третьей степени, то правая часть этого равенства приводится к эллиптическим функциям. Расчетные формулы оказываются при этом сложными и неудобными для вычислений. Часто приходится иметь дело и с такими видами нелинейных характеристик, которые не имеют аналитического выражения и могут быть представлены только графически. В этом случае точное решение уравнения (8.04) вообще не может быть получено. Поэтому для практических задач целесообразно искать приближенное решение уравнения (8.01), позволяющее получать окончательный результат с меньшей затратой времени.

Приближенное решение уравнения (8.01), для случая симметричных нелинейных характеристик, получается на основе рассмотрения точного решения в виде неполного ряда Фурье с нечетными членами [54, стр. 177; 3, стр. 526].

$$\varphi = A_1 \sin(pt + \xi_1) + A_3 \sin(3pt + \xi_3) + A_5 \sin(5pt + \xi_5) + \dots, \quad (8.05)$$

где амплитуды колебаний  $A_3, A_5, \dots$  обычно быстро убывают с увеличением их порядкового номера.



Теоретические исследования нелинейных одномассовых систем показывают, что получение приближенного решения хотя бы в виде двух первых членов ряда (8.05) приводит к очень сложным формулам. Многочисленные же результаты экспериментальных исследований нелинейных систем, в свою очередь, свидетельствуют о том, что наиболее часто встречающийся вид свободных колебаний имеет характер близкий к синусоидальному. На основании этого приближенное решение уравнения (8.01) принимается в самом простом виде

$$\varphi \approx A \sin(pt + \xi), \quad (8.06)$$

где  $p$  — частота свободных колебаний нелинейной системы.

## § 70. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Если на одномассовую систему действует периодический возмущающий момент, то система будет совершать вынужденные колебания с некоторой частотой, не равной ее собственной частоте (в общем случае).

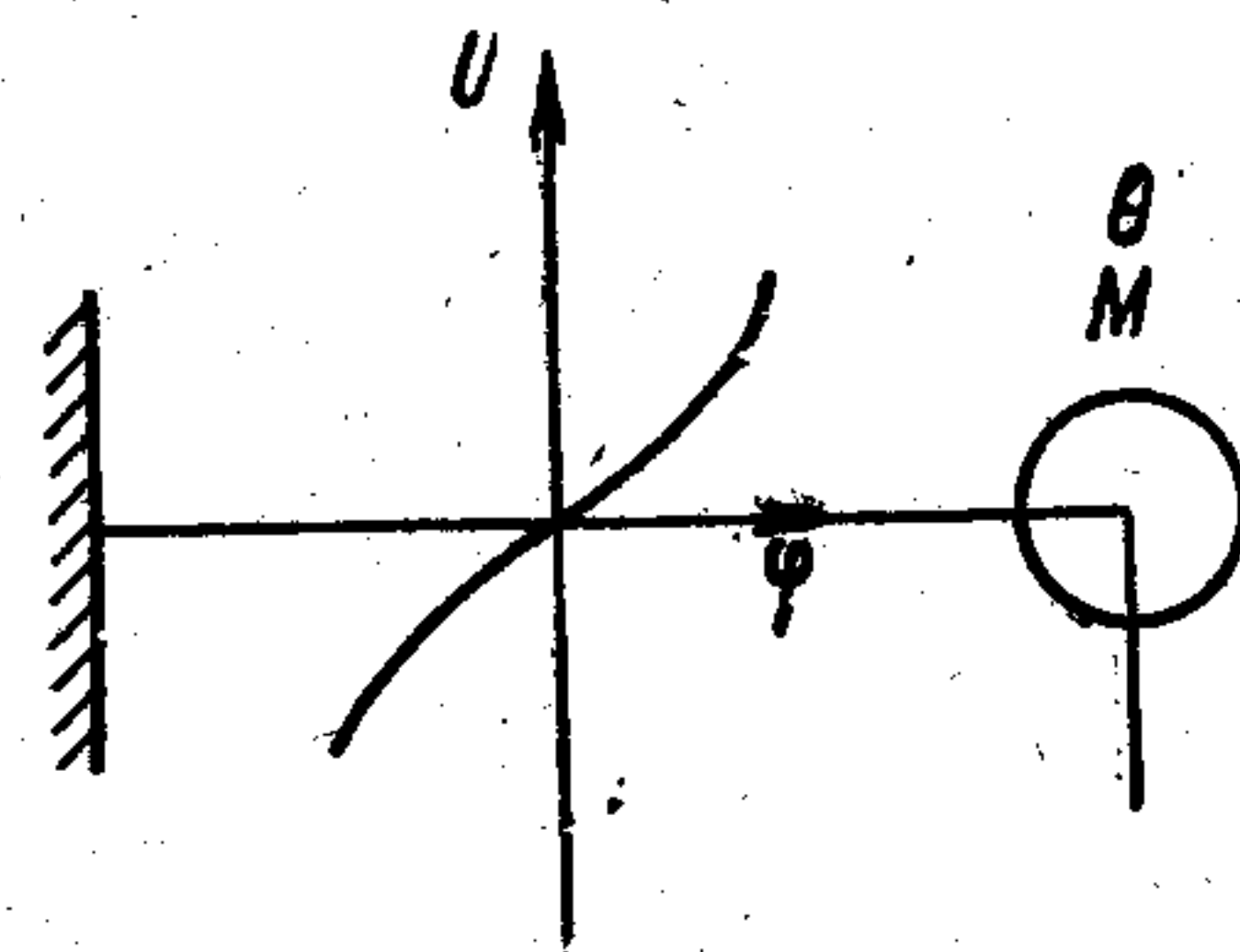


Рис. 58. Нелинейная одномассовая система.

Запишем уравнение вынужденных колебаний нелинейной одномассовой системы под действием одного гармонического возмущающего момента (рис. 58)

$$\theta \ddot{\varphi} + U = M \sin \omega t. \quad (8.07)$$

Как и в случае свободных нелинейных колебаний, будем искать приближенное решение этого уравнения, исходя из общего закона движения вынужденных нелинейных колебаний в виде ряда

$$\begin{aligned} \varphi = & A_1 \sin(\omega t + \xi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \xi_2) + \dots \\ & \dots + A_z \sin(z\omega t + \xi_z) + \dots + A_{1/z} \sin\left(\frac{\omega}{2} t + \xi_{1/z}\right) + \\ & + A_{1/3} \sin\left(\frac{\omega}{3} t + \xi_{1/3}\right) + \dots + A_{1/z} \sin\left(\frac{\omega}{z} t + \xi_{1/z}\right) \dots, \end{aligned} \quad (8.08)$$

где  $z = 1, 2, 3 \dots$

В зависимости от свойств системы может оказаться, что, кроме обычно наблюдаемых колебаний с частотой возмущающего момента  $\omega$ , существенное развитие получит еще какая-либо из составляющих с частотами  $z\omega$  или  $\omega/z$ .

На основании этого в нелинейных системах можно наметить следующие три возможных типа вынужденных колебаний:

а) основные вынужденные колебания с частотой, равной частоте  $\omega$  возмущающего момента,

$$\varphi \approx A \sin(\omega t + \xi); \quad (8.09)$$

б) ультрагармонические колебания с частотой, в  $z$  раз большей частоты возмущающего момента,

$$\varphi \approx A_z \sin(z\omega t + \xi_z); \quad (8.09, a)$$

в) субгармонические колебания с частотой, в  $z$  раз меньшей частоты возмущающего момента,

$$\varphi \approx A_{1/z} \sin\left(\frac{\omega}{z} t + \xi_{1/z}\right). \quad (8.09, б)$$

Второй и третий типы вынужденных колебаний часто называют дополнительными (§ 75).

Остановимся на основных вынужденных колебаниях, используя первое приближенное решение (8.09).

## § 71. Расчет свободных и вынужденных колебаний одномассовой системы

Так как решение (8.09) для уравнения (8.07), являясь точным только при линейной восстанавливающей силе  $U = c\varphi$ , не обращает это уравнение в тождество, то потребуем, чтобы это равенство выполнялось, когда максимума достигают момент  $M$  и отклонение  $\varphi$ . При этих условиях максимума достигнет и угловое ускорение:

$$M_{\max} = M_0; \quad \varphi_{\max} = A; \quad \ddot{\varphi}_{\max} = -A\omega^2. \quad (8.10)$$

Перепишем уравнение (8.07) с учетом (8.10)

$$-\theta\omega^2 A + U_0 = M_0,$$

или

$$U_0 = M_0 + \theta\omega^2 A. \quad (8.11)$$

Выражение для  $U_0$  при  $\omega = \text{const}$  представляет собой уравнение прямой линии, имеющей угловой коэффициент  $\theta\omega^2$  и отсекающей на оси ординат отрезок  $M_0$ . Если теперь построить нелинейную функцию  $U$  и функцию  $U_0$ , являющуюся приближенным решением уравнения (8.07), то точки их пересечения будут вещественными корнями уравнения (8.07). Представленные на рис. 8.03, а построения показывают, что функции  $U$  и  $U_0$  пересекаются в одной точке, абсцисса которой  $A_1$  является корнем уравнения (8.07). При изменении частоты колебаний  $\omega$  меняется угол наклона прямой  $U_0$ , т. е. прямая  $U_0$  будет поворачиваться вокруг точки  $(0, M_0)$ . В результате этого точки пересечения  $U$  и  $U_0$  будут все время смещаться.

При некотором значении круговой частоты  $\omega'' < \omega'$  (рис. 59, б) прямая  $U_0$  будет иметь две общие точки с нелинейной функцией  $U$  с абсциссами  $A_1'$  и  $A_2$ . При еще меньших значениях  $\omega$  (рис. 59, в) эти функции будут иметь три точки пересечения, соответствующие трем корням уравнения (8.07). Результаты построений представлены на рис. 59, г; они показывают зависимость амплитуды



вынужденных колебаний  $A$  от частоты колебаний системы  $\omega$  при заданных  $M$  и характеристике нелинейности.

Линия  $df$  получена с помощью аналогичных построений при значении момента  $M = 0$  и определяет зависимость частоты свободных колебаний нелинейной системы от амплитуды колебаний. Следовательно, изложенное выше построение можно рассматривать как еще один из приближенных способов решения задачи о свободных колебаниях в нелинейных системах.

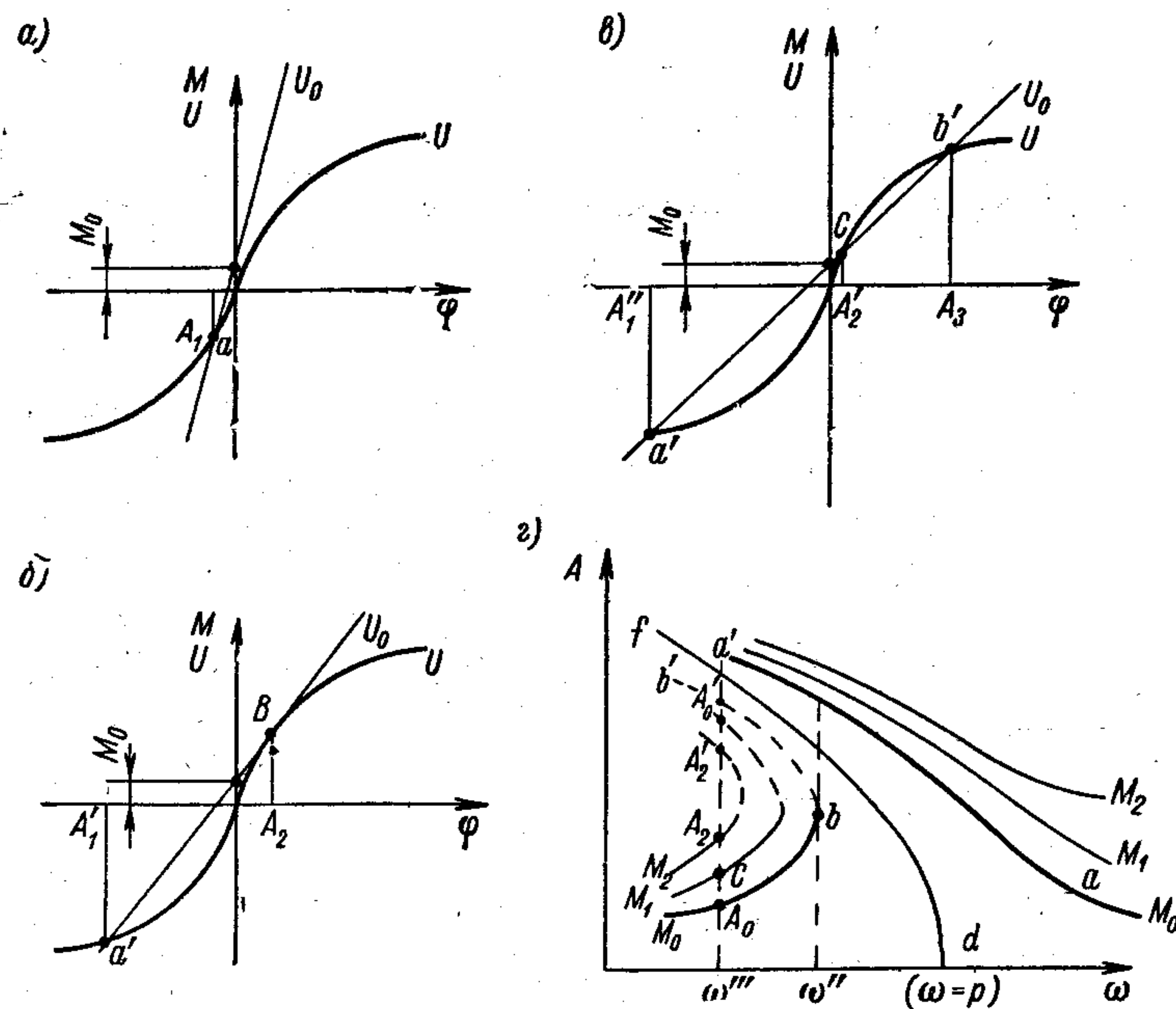


Рис. 59. Кривые амплитуд вынужденных и свободных колебаний при «мягкой» характеристике нелинейного элемента.

На рис. 59, г тонкими линиями показаны кривые вынужденных колебаний, полученные для ряда значений момента. Характерно, что эти кривые существенно отличаются от соответствующих кривых линейных систем (рис. 59, в). В нелинейных системах для различных значений  $M$  ветви  $aa'$ ,  $bb'$  и  $cb'$  неподобны (нарушается пропорциональность амплитуд изменению момента); для каждого  $M > M_0$  точка, определяющая появление второго корня уравнения, располагается левее точки  $b$  и ей соответствует частота меньшая, чем  $\omega''$ .

Кривые амплитуд вынужденных и свободных колебаний на рис. 59, а—г относятся к системам с «мягкой» характеристикой нелинейного соединения, для которого по мере увеличения деформации жесткость уменьшается (и, следовательно, растет податли-

вость). На рис. 60, а показано изменение амплитуд свободных и вынужденных колебаний для систем с «жесткой» характеристикой нелинейного соединения, у которого с увеличением деформации податливость наоборот уменьшается. К тому же точка, соответствующая появлению второго корня уравнения, при увеличении момента  $M$  смещается вправо и располагается при значениях больших, чем  $\omega''$ . Там же показаны кривые развития амплитуд свободных и вынужденных колебаний для системы с более сложной нелинейной характеристикой упругого соединения — при наличии предварительного натяга и ограничителей деформации (рис. 60, б).

Описанный характер развития амплитуд вынужденных колебаний, хотя и является результатом решения уравнения (8.07) с наименьшим приближением к точному решению этого уравнения, однако достаточно просто характеризует развитие вынужденных колебаний нелинейных систем.

Для получения более достоверных количественных результатов для решения уравнения (8.07) необходимо воспользоваться более точными методами Дюффинга, Ляпунова, Галеркина и др.

Остановимся на методе Галеркина, получившем широкое применение для решения многих инженерных задач.

Предположим, что нелинейные колебания по форме зависимости от времени очень мало отличаются от синусоидальных. Тогда приближенное решение уравнения (8.07) можно искать в виде

$$\varphi_k \approx A_k^* \sin(\omega t + \xi_k). \quad (8.12)$$

Такой же синусоидальный закон зависимости от времени предполагаем для деформации нелинейного соединения

$$\varphi_{k,k+1} \approx B_{k,k+1}^* \sin(\omega t + \xi_{k,k+1})$$

и для эластического момента в нем

$$U_{k,k+1} \approx F_{k,k+1}^* \sin(\omega t + \xi_{k,k+1}),$$

где  $B_{k,k+1}^*$  и  $F_{k,k+1}^*$  — соответственно, амплитуды приведенной деформации и приведенного эластического момента в соединении  $k, k+1$ .

Подстановка выражения (8.12) в уравнение (8.07) не обращает его в тождество и дает некоторую периодическую функцию  $L_k$

$$L_k = -\theta \omega^2 A^* \sin(\omega t + \xi_k) + F_{k,k+1}^* \sin(\omega t + \xi_{k,k+1}) - M \sin \omega t.$$

Основная идея метода Галеркина заключается в том, что наилучшее приближение получим в том случае, если приравняем нулю интеграл следующего вида

$$\int_0^{2\pi} L_k \sin(\omega t + \xi_k) dt = 0; \quad (8.13)$$



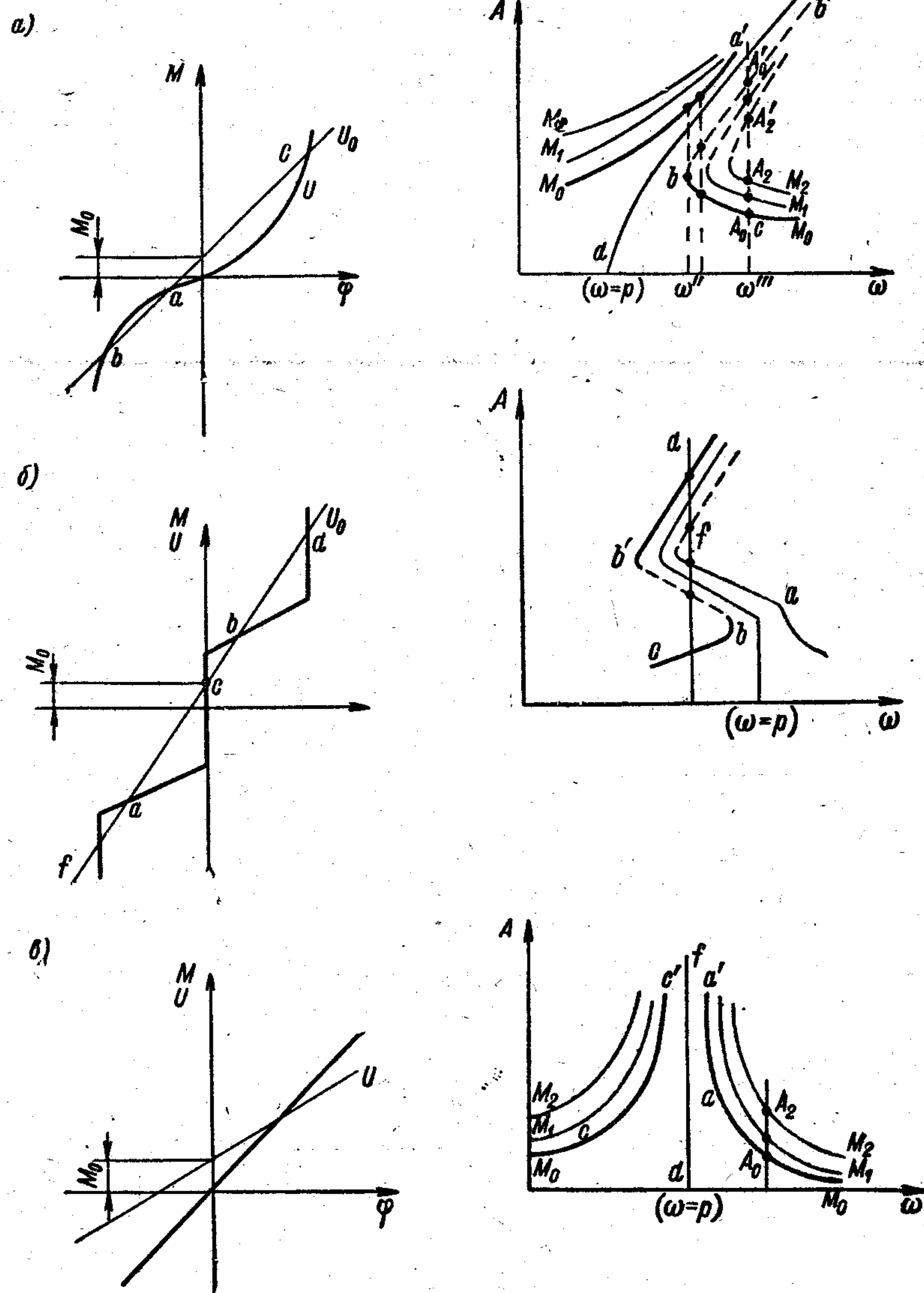


Рис. 60. Кривые амплитуд вынужденных и свободных колебаний: а — при «жесткой» характеристике нелинейного элемента; б — при нелинейном соединении с предварительным натяжением пружин и ограничителями; в — при линейной характеристике.

это условие соответствует тому, что функция  $L_k$  при разложении ее в ряд Фурье не должна содержать членов с частотой, принятой нами в решении (8.12).

Располагая конкретной зависимостью  $U_{k,k+1}$  для нелинейного элемента, решаем уравнение (8.13), что позволяет получить выражение для амплитуды вынужденных колебаний  $A^*$ . Найденная таким способом амплитуда колебаний будет более точно соответствовать решению уравнения (8.07), чем полученная на рис. 59 и 60 графическим способом.

## § 72. Особенности нелинейных вынужденных колебаний

Амплитуды свободных колебаний линейной системы на кривой резонанса представляются в виде прямой  $mn$ , характеризующей независимость частоты свободных колебаний от их амплитуд, (рис. 60, в). Кривые вынужденных колебаний располагаются по обе стороны от этой прямой. При отсутствии демпфирующих сопротивлений эти кривые, асимптотически приближаясь к ней, стремятся к бесконечности. При этом каждому значению частоты вынужденных колебаний  $\omega$  соответствует только одно значение амплитуды.

В нелинейных системах кривая амплитуд свободных колебаний всегда имеет наклон к оси абсцисс, определяемый типом нелинейности: при «жесткой» характеристике в сторону больших частот  $\omega$  (рис. 60, а), а при «мягкой» — в сторону малых  $\omega$  (рис. 59, з). Вследствие этого частота свободных колебаний нелинейной системы является величиной не постоянной, зависящей от амплитуды.

Кривая амплитуд вынужденных колебаний располагается по обе стороны от кривой, соответствующей свободным колебаниям системы. Последняя как бы направляет кривую амплитуд вынужденных колебаний, а поэтому носит название «скелетной кривой».

Одной из наиболее важных особенностей вынужденных колебаний нелинейных систем является неоднозначность решения, так как в некотором диапазоне частоты возмущающего момента каждому значению  $\omega$  отвечают два-три значения амплитуды, соответствующих такому же числу корней уравнения (8.07) (см. рис. 59, з и 60, а). Для более сложных нелинейных характеристик некоторым значениям  $\omega$  соответствуют четыре-пять и даже более корней (рис. 60, б).

Указанная многозначность решения вызывает вопрос об устойчивости колебаний нелинейной системы. Очевидно, что из всех возможных для данного значения  $\omega$  движений, характеризующихся различными амплитудами, наиболее вероятным будет то, для которого соответствующее движение будет наиболее устойчивым. Практика экспериментальных исследований и более точная теория нелинейных колебаний показывают, что не все ветви кривой амплитуд вынужденных колебаний обладают одинаковой



устойчивостью, и степень устойчивости одного и того же движения изменяется с изменением частоты колебаний. Пунктирные участки ветвей кривой амплитуд на упомянутых рисунках соответствуют, вообще говоря, неустойчивым колебаниям.

Так, если для ветвей  $cc'$  и  $aa'$  как в линейных (рис. 60, в), так и в нелинейных системах (рис. 59, г и 60, а) при увеличении момента

$M (M_0 < M_1 < M_2)$  и постоянной частоте амплитуда колебаний увеличивается ( $A_0 < A_1 < A_2$ ), то для ветви  $bb'$  наблюдаем физически неестественное явление: с увеличением момента  $M (M_0 < M_1 < M_2)$  при  $\omega = \text{const}$  амплитуда колебаний  $A$  уменьшается ( $A_0 > A_1 > A_2$ ).

Опишем характер развития амплитуд вынужденных колебаний в нелинейных системах при изменении частоты возмущающего момента.

В случае «жесткой» нелинейной характеристики (рис. 61, а) при плавном повышении частоты от нуля до  $\omega < \omega''$  амплитуда колебаний увеличивается в соответствии с ветвью  $cp$ . При  $\omega = \omega''$  однозначность движения системы исчезает и, хотя с дальнейшим увеличением  $\omega$  система еще может совершать колебания в соответствии с ветвью  $cp$ , однако с достижением некоторого значения частоты  $\omega > \omega''$  неизбежно происходит «срыв» амплитуды колебаний на ветвь  $bb'$ . Если после «срыва» изменить частоту

колебаний в сторону повышения или понижения, то амплитуда колебаний будет изменяться уже по закону, предопределяющему ветвь  $bb'$ . Положение точки  $n$  на ветви  $cp$  (т. е. начало «срыва») в каждом частном случае определяется особо, зависит от многих факторов и прежде всего — от интенсивности изменения частоты колебаний, от типа нелинейного элемента и др.

При плавном понижении частоты от  $\omega \gg \omega''$  амплитуда вынужденных колебаний вначале увеличивается по кривой  $b$ ; в момент  $\omega = \omega''$  происходит резкое увеличение ее, т. е. «срыв» на ветвь  $c$ , которая после этого становится новым законом для изменения амплитуды как при снижении частоты (участок  $tr$ ), так и при ее

повышении (участок  $tn$ ) с неизбежным последующим «срывом» на ветвь  $b$  при  $\omega = \omega''$ .

При «мягкой» характеристике нелинейного элемента имеет место аналогичное явление (рис. 61, б).

Представленный выше характер развития вынужденных колебаний свидетельствует еще об одной особенности нелинейных колебаний в сравнении с линейными: амплитуды вынужденных колебаний при монотонном изменении частоты могут в некоторых случаях не достигать бесконечно большого развития даже если в системе отсутствует трение. Кроме того, в случае «жесткой» характеристики нелинейного соединения (при медленном повышении частоты) можно получить значительно большую амплитуду колебаний, чем при плавном спуске, а в случае «мягкой» характеристики — большую амплитуду наблюдаем при плавном спуске.

Остановимся еще на одной особенности нелинейных систем. Если к линейной системе приложено несколько гармонических возмущающих моментов с различными частотами, то действие каждого из них на эту систему происходит независимо от остальных моментов, и суммарный эффект их определяется простым сложением результатов влияния каждого из них. Справедливым оказывается здесь известный принцип наложения колебаний.

В нелинейных системах этот принцип неприменим, вместо него имеет место принцип «взаимного исключения» в совместном действии возмущающих моментов, согласно которому степень взаимного влияния этих моментов зависит от величины их амплитуды и от соотношения между их порядками.

1. Если область частот, соответствующих большому развитию амплитуд колебаний, от какой-либо гармоники не перекрывает аналогичных областей от других гармоник, то взаимное влияние гармоник проявляется лишь в том, что колебания с малыми амплитудами становятся еще меньшими, а с большими — почти неизменными. Суммарный эффект в данном случае предопределяется только моментом с большими амплитудами колебаний.

2. При взаимном перекрытии двух областей развития больших амплитуд от гармоник различных порядков одновременное большое развитие их также исключается. Колебания в этом случае имеют характер биений. В суммарных колебаниях будет преобладать влияние той гармоники, от которой возникают большие амплитуды при раздельном действии моментов.

### § 73. Уравнения свободных и вынужденных колебаний многомассовых систем

Применение в валах силовых установок маятниковых антивибраторов, а также устройств с нелинейными упругими или демпфирующими характеристиками (резиновые муфты, демпферы, амортизаторы) обуславливает возникновение нелинейных колеба-

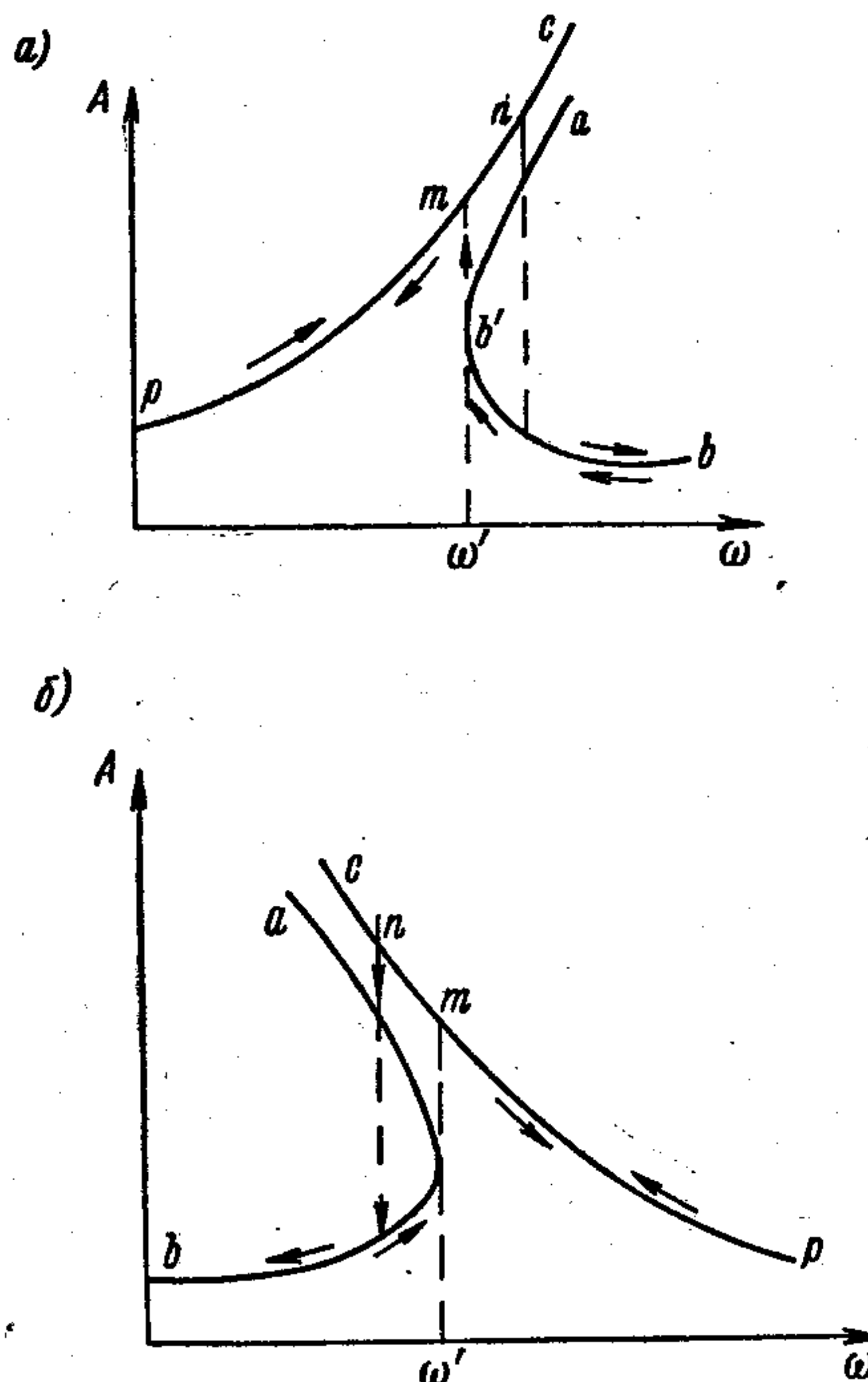


Рис. 61. Зависимость амплитуд вынужденных колебаний от изменения частоты колебаний: а — при «жесткой» нелинейной характеристике; б — при «мягкой» нелинейной характеристике.



Остановимся на исследовании свободных колебаний многомассовой системы с одним нелинейным соединением (рис. 62).

$$\begin{aligned} \theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{e_{1,2}} &= 0; \\ \theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{e_{1,2}} - \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{e_{2,3}} &= 0; \\ \dots &\dots \\ \theta_k \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{e_{k-1,k}} - U_{k,k+1} &= 0; \\ \theta_{k+1} \frac{d^2 \varphi_{k+1}}{dt^2} + U_{k,k+1} - \frac{\varphi_{k+2} - \varphi_{k+1}}{e_{k+1,k+2}} &= 0; \\ \dots &\dots \\ \theta_p \frac{d^2 \varphi_p}{dt^2} + \frac{\varphi_p - \varphi_{p-1}}{e_{p-1,p}} &= 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$
$$U_{k-1, k} = \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{e_{k-1, k}} - \text{эластический момент в линейном со-единении.}$$

Приближенное решение системы уравнений (8.14) принимаем, как в случае одномассовой системы — в синусоидальной форме (8.12),

Для нелинейного соединения, вместо действительной зависимости между эластическим моментом  $U_{k,k+1}$  и угловой деформацией

$$U_{k, k+1} \approx U_{k, k+1}^* = \frac{B_{k, k+1}^*}{e_{k, k+1}^*} = \frac{A_{k+1}^* - A_k^*}{e_{k, k+1}^*},$$
$$e_{k, k+1}^* = \frac{B_{k, k+1}^*}{F_{k, k+1}^*} = f_1(B_{k, k+1}^*) = f_2(F_{k, k+1}^*).$$

A graph showing normalized velocity profiles  $u^+$  versus  $y^+$  for different Reynolds numbers. The curves are labeled  $M_5^{sp}$ ,  $M_4^{sp}$ ,  $M_3^{sp}$ ,  $M_2^{sp}$ , and  $M_1^{sp}$ . The x-axis is labeled  $u^+$  and the y-axis is labeled  $y^+$ .

200



соединения — амортизатора с предварительным натяжением пружин и ограничителями.

Вводя понятия  $e_{k, k+1}^*$ ,  $F_{k, k+1}^*$  и  $B_{k, k+1}^*$  и используя приближенное решение (8.15), систему дифференциальных уравнений (8.14) приводим к системе алгебраических уравнений [см. (3.44)]

$$\left. \begin{aligned} A_1 H_1 + F_{1,2} &= 0; \\ A_2 H_2 + F_{2,3} - F_{1,2} &= 0; \\ . &. . . . . \\ . &. . . . . \\ A_k H_k + F_{k,k+1}^* - F_{k-1,k} &= 0; \\ A_{k+1} H_{k+1} + F_{k+1,k+2} - F_{k,k+1}^* &= 0; \\ . &. . . . . \\ . &. . . . . \\ A_p H_p - F_{p-1,p} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

где  $H_k = -\theta_k \omega^2$  — стойкость  $k$ -й массы.

Систему уравнений (8.16) формально можно решать таким же способом, как и в случае линейных систем. Переходя к безразмерным величинам, составляем выражение податливости системы с надломом на нелинейном соединении (см. 3.63 и 3.64)

$$\begin{aligned} E_{k, k+1}^{*(1)(p)} &= f(F_{k, k+1}^*, \Delta) = E_{k, k+1}^* + \frac{1}{H_k^{(1)}} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}} = \\ &= E_{k, k+1}^* + E_{k, k+1}^{(1)(p)}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где  $E_{k, k+1}^{(1)(p)}$  — безразмерная податливость системы между  $k$ -й и  $k+1$ -й массами при жестком соединении этих масс (т. е. при  $E_{k, k+1} = 0$ );

$$E_{k, k+1}^{(1)(p)} = \frac{1}{-\vartheta_k \Delta + \frac{1}{E_{k-1, k} + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{-\vartheta_1 \Delta}}}} + \frac{1}{-\vartheta_{k+1} \Delta + \frac{1}{E_{k+1, k+2} + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{-\vartheta_p \Delta}}}}$$

Так же как и для одномассовой нелинейной системы, решение поставленной задачи сводится к определению частот свободных колебаний.

Ввиду того, что частота свободных колебаний нелинейной системы зависит от амплитуды колебаний нелинейного элемента, решение нуждается в определении зависимости

$$\Delta = f(F_{k, k+1}^*) \text{ или } \Delta = f_2(B_{k, k+1}^*).$$

## § 74. Расчет свободных и вынужденных колебаний многомассовых систем

Известно (§ 15 и 17), что при частотах свободных колебаний податливость системы равна нулю. Следовательно, уравнение свободных колебаний рассматриваемой системы можно представить выражениями

$$\begin{aligned} E_{k, k+1}^{*(1)(p)} &= E_{k, k+1}^* + E_{k, k+1}^{(1)(p)} = 0; \\ E_{k, k+1}^* &= -E_{k, k+1}^{(1)(p)}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Решение уравнения производим графическим способом [56].  
Опишем его сущность.

При различных значениях безразмерной частоты  $\sqrt{\Delta}$  по табличным схемам, использованным для расчета свободных колебаний линейных систем, вычисляем податливость системы  $E_{k, k+1}^{(1)(p)}$  при  $E_{k, k+1}^* = 0$  и в координатной системе  $(E - \Delta)$  строим кривую —  $E_{k, k+1}^{(1)(p)} = f(\Delta)$  (рис. 64). Затем, располагая для нелинейного элемента зависимостью приведенной податливости  $E_{k, k+1}^*$  от амплитуды приведенного эластического момента  $F_{k, k+1}^*$ , строим ее в координатной системе  $(E - F)$ . Далее приводим ряд горизонтальных прямых, выполняя условие  $E_{k, k+1}^* = -E_{k, k+1}^{(1)(p)}$ , и фиксируем абсциссы точек пересечения их с кривыми  $E_{k, k+1}^{(1)(p)}$  и  $E_{k, k+1}^*$ :  $\Delta$  и  $F_{k, k+1}^*$ . По полученным значениям  $\Delta$  и  $F$  строим график требуемой зависимости между квадратом частоты свободных колебаний  $\Delta$  и амплитудой приведенного эластического момента нелинейного соединения  $F_{k, k+1}^*$ . Из графика видно, как сильно может изменяться собственная частота системы за счет введения в нее нелинейного элемента. Таким образом получаем «скелетную» кривую. На рис. 64 представлены изложенные выше построения для получения зависимости  $\Delta = f(F_{k, k+1}^*)$  для одноузловой и двухузловой форм колебаний.

Вычисление формы свободных колебаний в нелинейной системе производится по тем же формулам, как и в случае линейной системы, но амплитуда свободных колебаний в нелинейном элементе выбирается не произвольной, а вполне определенной и соответствующей той частоте свободных колебаний, для которой вычисляется искомая форма.

Расчетное исследование свободных колебаний нелинейной системы является важным этапом в исследовании нелинейных систем. Как указывалось ранее, кривая амплитуд свободных колебаний нелинейной системы является «скелетной» кривой для ветвей амплитуд вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания получают свое наибольшее развитие при так называемом резонансном состоянии, когда частота возму-



щающего момента совпадает с частотой свободных колебаний системы, причем, как правило, в исследуемом диапазоне частот может находиться несколько резонансов. Построение кривой свободных колебаний значительно проще, чем кривых вынужденных колебаний, а область развития больших вынужденных колебаний практически предопределяется кривой свободных колебаний. По-

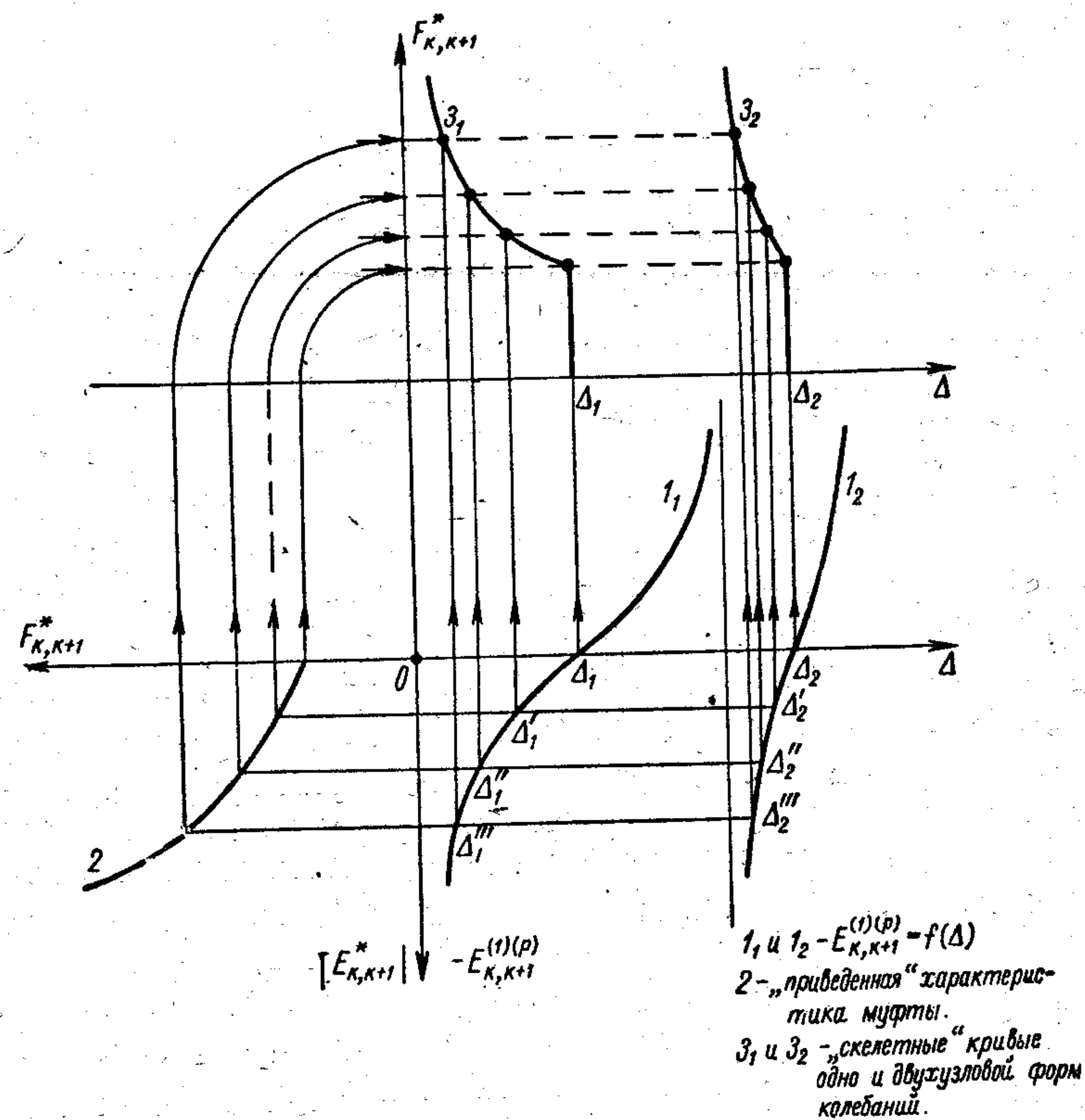


Рис. 64. Графическое решение уравнения свободных колебаний с одним нелинейным соединением.

этому развитием вынужденных колебаний будем интересоваться только в пределах тех частот, где ожидается их большое развитие, т. е. будем интересоваться резонансными вынужденными колебаниями.

В основу расчета резонансных колебаний нелинейной системы (так же как и линейной) положен метод баланса работ возмущающих и демпфирующих моментов. Предполагая, что демпфирующие силы мало влияют на форму колебаний, можно принять, что форма резонансных колебаний практически совпадает с формой свободных колебаний.

При расчетах резонансных колебаний нелинейной системы неизвестной величиной является не только амплитуда, но и та частота, при которой поступает каждый резонанс. Определение упомянутых неизвестных осуществляется графическим путем одновременно. Для этого строят две кривые. Первая из них — уже известная скелетная кривая амплитуд свободных колебаний нелинейной системы, характеризующая зависимость частоты  $\sqrt{\Delta}$  от амплитуды колебаний в нелинейном элементе (рис. 64).

Вторую кривую (будем называть ее кривой амплитуд резонансных колебаний) строим с учетом всех существенных трений в системе. Для ее построения задаемся рядом произвольных частот, расположенных в диапазоне изменения частоты свободных колебаний нелинейной системы. При этих частотах систему считаем «мгновенно» линейной, т. е. предполагаем, что нелинейный элемент заменен таким линейным, при котором данная произвольно наметенная частота является частотой свободных колебаний рассматриваемой системы. При этих частотах (на основании уравнения баланса работ) находим резонансную амплитуду колебаний «мгновенно» линейной системы

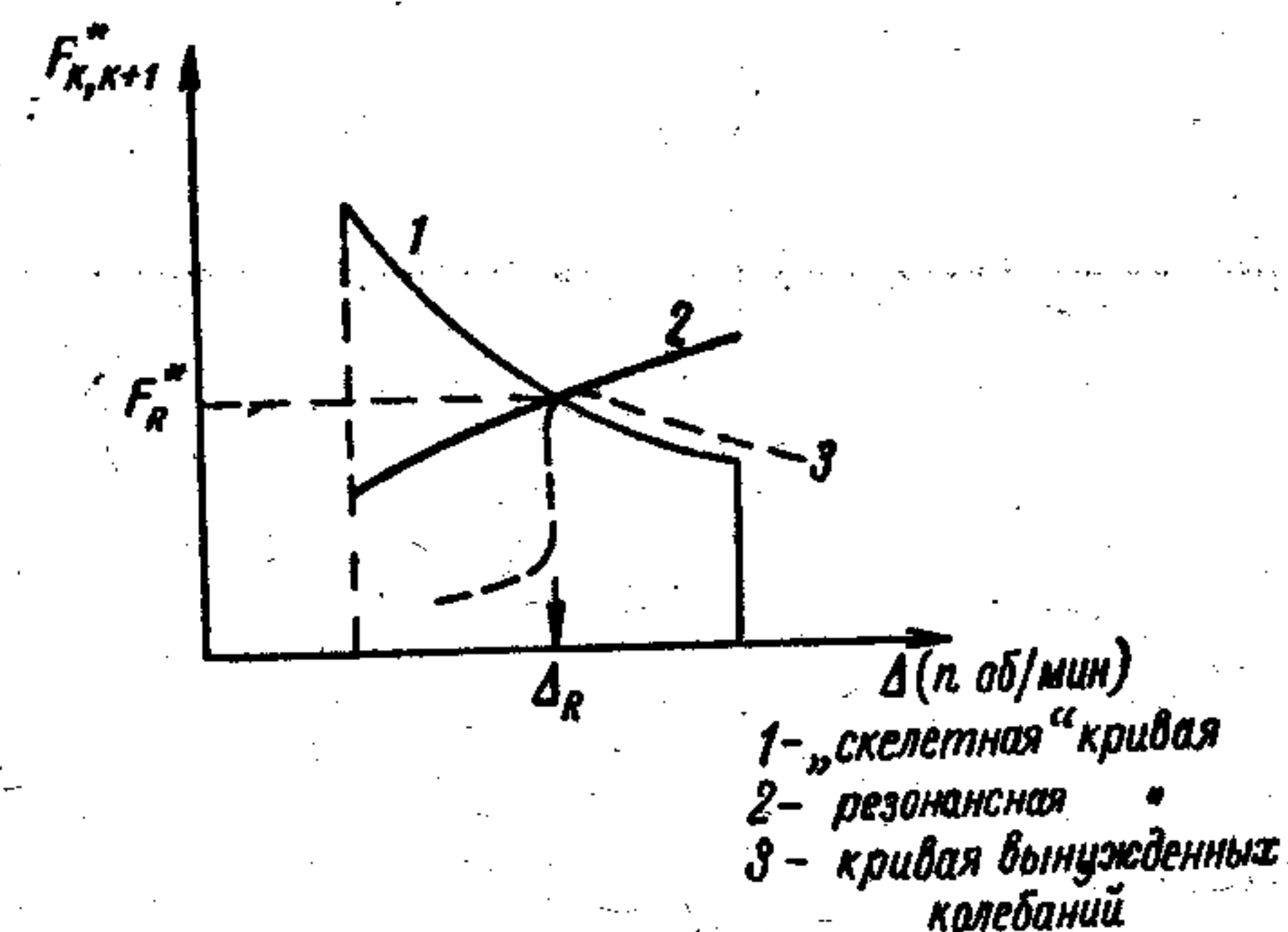


Рис. 65. К расчету нелинейных резонансных колебаний.

$$W_m = \sum W_{тр.}$$

Затем в координатной системе  $(F_{k,k+1}, \Delta)$  строим кривые свободных и резонансных колебаний. Точка их пересечения определяет обе неизвестные: резонансную амплитуду эластического момента в нелинейном элементе  $F_R$  и частоту колебаний  $\sqrt{\Delta_R}$ , при которой наступает данный резонанс рис. 65. По форме колебаний, вычисленной для данной частоты, находим резонансные напряжения в любом интересующем нас месте системы.

## § 75. Понятие о вынужденных дополнительных колебаниях

В нелинейных системах, помимо вынужденных колебаний с основной частотой возмущающего момента, возникают колебания с частотой, кратной частоте возмущающего момента:  $2\omega$  или  $\omega/2$ . Накопленный экспериментальный материал и теоретические исследования позволяют пока наметить лишь причины, вызывающие значительное развитие дополнительных колебаний, области возникновения и способы устранения. Для многомассовых систем,



подвергающихся воздействию полигармонического момента, дополнительные колебания различной кратности иногда отличаются полной хаотичностью, т. е. в исследуемый диапазон частот попадают колебания различных порядков и с резкими переходами из одной кратности в другую. В этих случаях предсказать возможность их появления расчетным путем пока не удастся. Результаты анализа экспериментальных исследований энергетических установок пока-

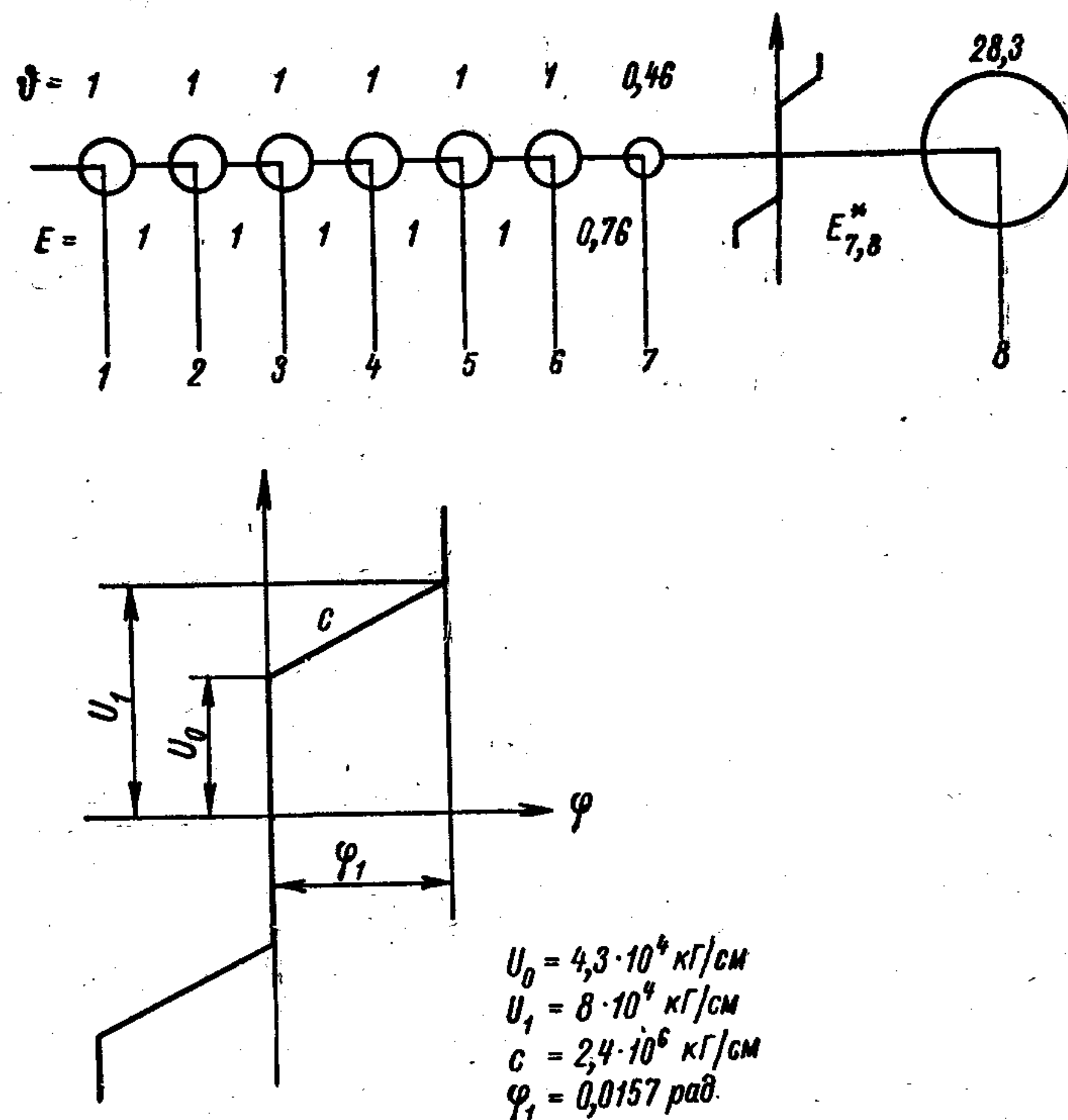


Рис. 66. Крутильная схема валопровода силовой установки с одним нелинейным соединением.

зывают, что основной причиной возникновения дополнительных колебаний является наличие в их валопроводах очень податливых соединений с зазорами (упругие муфты с резиновыми брусками, тонкие и длинные валы с зубчатыми муфтами) или соединений с сильно выраженной нелинейной характеристикой (упругое соединение с большим предварительным натягом и ограничителями). Кроме того, существенному развитию дополнительных колебаний способствуют резкое увеличение или сброс нагрузки.

Основные мероприятия по предупреждению возникновения дополнительных колебаний сводятся к предельно-осуществимому уменьшению степени нелинейности тех элементов системы, которым

в основном обязано развитие нелинейных колебаний (уменьшение предварительного натяжения пружин, уменьшение зазоров в зубчатых и брусковых муфтах и др.).

**Пример 1.** Расчет свободных колебаний системы с одним нелинейным элементом. На рис. 66 представлена крутильная схема валопровода силовой установки с двигателем (типа М-50) в начале системы. На фланце двигателя (соединение 7,8) установлен амортизатор, представляющий собой нелинейное упругое соединение с предварительным натягом ( $U_0$ ) и ограничителями. На том же рисунке представлена характеристика амортизатора.

Исходные данные для расчета:

- $N_e = 850$  л. с. — номинальная мощность двигателя;
- $n_n = 1600$  об/мин — номинальное число оборотов двигателя;
- $z$  — число цилиндров;
- $m = 4$  — тактность двигателя;
- $D = 18$  см — диаметр цилиндра;
- $R = 10$  см — радиус кривошипа;
- $d_{ш} = 9,5$ ;  $l_{ш} = 8$  — диаметры и длины шатунной и коренной шеек коленчатого вала (в см);
- $d_k = 10,5$ ;  $l_k = 6,6$  — диаметры и длины шеек коленчатого вала (в см);
- $\eta_m = 0,83$  — механический к. п. д. двигателя;
- $L_p = 13,7$  см — длина поршня;
- $\theta_0 = 3,1$  кг·см·сек<sup>2</sup> — эквивалентный момент инерции массы кривошипно-шатунного механизма;

$e_0 = 3,75 \cdot 10^{-8}$  кг<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup> — податливость колена вала;

$N = 2800 \sqrt{\Delta}$  кол/мин — частота свободных колебаний системы.

Расчет начинаем с определения частоты свободных колебаний линейной системы, предполагая  $E_{7,8}^* = 0$ . Составляем уравнение свободных колебаний с надломом на соединении 7,8 (8.17).

$$E_{7,8}^{*(1)(8)} = E_{7,8}^* + \frac{1}{H_7^{(1)}} + \frac{1}{H_8^{(8)}} = E_{7,8}^* + \frac{1}{H_7 + \frac{1}{E_{7,6}^* + \frac{1}{H_6^{(1)}}}} + \frac{1}{H_8^{(8)}} = 0,$$

где  $H_6^{(1)}$  — стойкость группы равных масс двигателя.

Решение уравнения выполняем в табл. 16 [56, табл. схема 302]. Частота линейной системы  $\sqrt{\Delta_1} = 0,0735$ ;  $N = 7600$  кол/мин. Частота свободных колебаний нелинейной системы будет ниже, чем линейной. Для определения зависимости  $\Delta = f(F_{7,8}^*)$  строим две кривые: первая кривая — зависимость приведенной податливости  $E_{7,8}^*$  от амплитуды  $F_{7,8}^*$  приведенного эластического момента амортизатора; вторая кривая — зависимость податливости системы  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  от частоты колебаний.

По правилам, изложенным в [56, стр. 228], строим зависимость  $E_{7,8}^* = f(F_{7,8}^*)$ . В левом нижнем квадранте (рис. 67) представлена зависимость  $E_{7,8}^* = f(F_{7,8}^*)$ , полученная для заданных значений  $U_0 = 4,26 \cdot 10^4$  кгсм,  $U_1 = 8,03 \cdot 10^4$  кгсм,  $c = 2,4 \cdot 10^6$  кг/см,  $\varphi = 0,0157$  радиана,  $M_{ср} = 1 \times 10^3$  кгсм (расчет здесь опущен, обозначения см. на рис. 77).



Для получения зависимости  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  задаемся рядом частот меньших  $\sqrt{\Delta_1}$  ( $\sqrt{\Delta} = 0,066; = \sqrt{0,055}; = \sqrt{0,046}; = \sqrt{0,033}; = \sqrt{0,03}$ ) и по тем же табличным схемам определяем  $E_{7,8}^{(1)(8)}$ .

Намеченный ряд частот ограничиваем той из них, при которой  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  достигает значения близкого или равного максимальному значению приведенной податливости нелинейного элемента  $E_{7,8}^*$ . Так  $E_{7,8}^* \max$  для рассматриваемого нами амортизатора (рис. 67) достигает 4,1; вычисления, приведенные в табл. 16, показывают, что при значении  $\sqrt{\Delta} = 0,03$  уже имеем  $|E_{7,8}^{(1)(8)}| = 4,16$ . Интересоваться величиной  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  при более низких значениях  $\Delta$  не имеет смысла. По результатам подсчета  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  (табл. 16) строим в нижнем правом квадранте (рис. 67) в координатной системе  $[-E, \Delta]$  функцию  $-E_{7,8}^{(1)(8)} = f(\Delta)$ . Затем, проводя ряд горизонтальных линий (удовлетворяя равенство  $-E_{7,8}^{(1)(8)} = E_{7,8}^*$ ), фиксируем точки пересечения кривых  $\Delta$  и  $F_{7,8}^*$  и по ним строим в правом верхнем квадранте кривую свободных колебаний нелинейной системы (скелетную кривую). Построением этой кривой обычно и заканчивается расчет свободных колебаний.

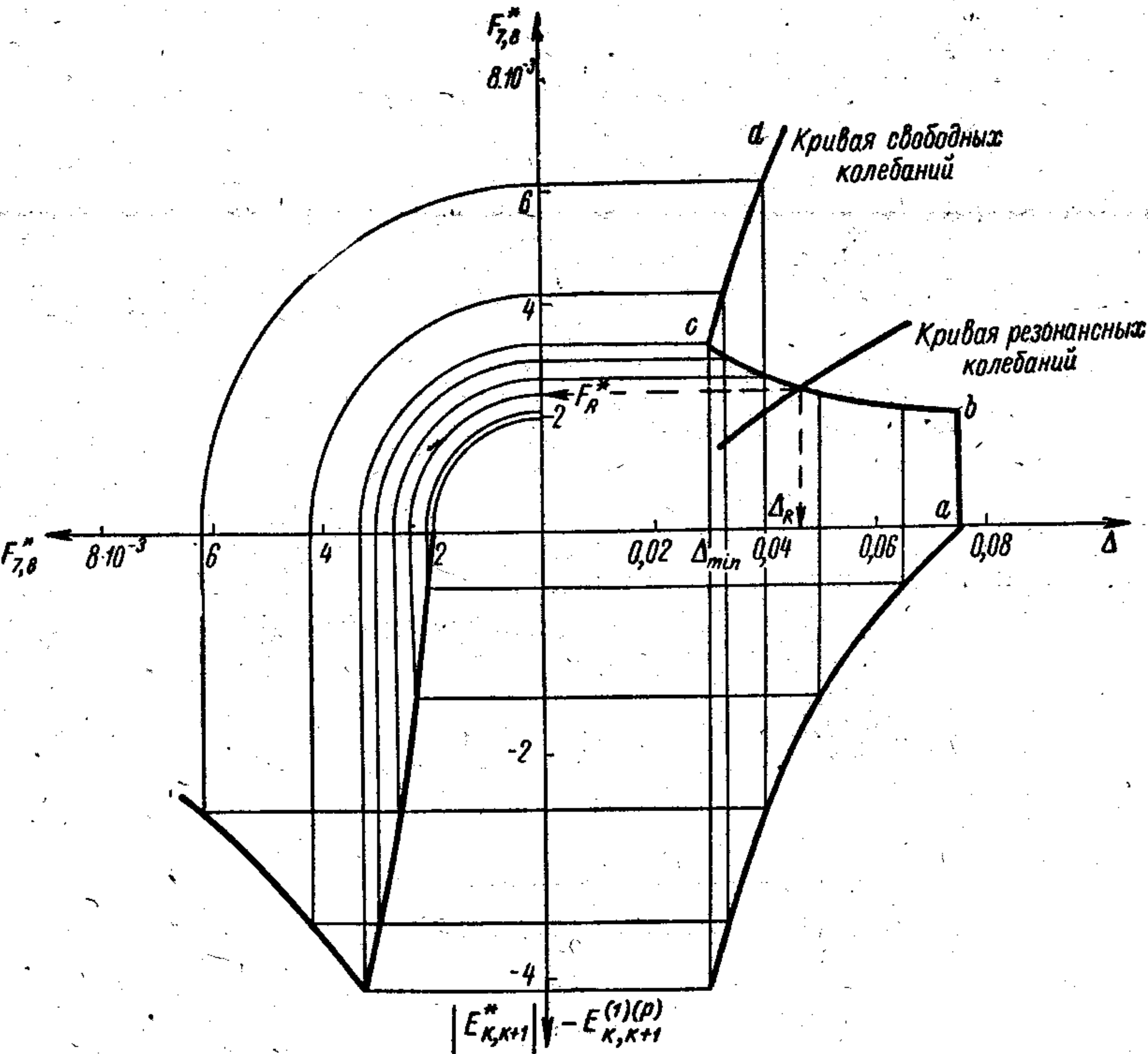


Рис. 67. Графическое определение частот и амплитуд свободных и резонансных колебаний системы с одним нелинейным соединением.

ваемого нами амортизатора (рис. 67) достигает 4,1; вычисления, приведенные в табл. 16, показывают, что при значении  $\sqrt{\Delta} = 0,03$  уже имеем  $|E_{7,8}^{(1)(8)}| = 4,16$ . Интересоваться величиной  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  при более низких значениях  $\Delta$  не имеет смысла. По результатам подсчета  $E_{7,8}^{(1)(8)}$  (табл. 16) строим в нижнем правом квадранте (рис. 67) в координатной системе  $[-E, \Delta]$  функцию  $-E_{7,8}^{(1)(8)} = f(\Delta)$ . Затем, проводя ряд горизонтальных линий (удовлетворяя равенство  $-E_{7,8}^{(1)(8)} = E_{7,8}^*$ ), фиксируем точки пересечения кривых  $\Delta$  и  $F_{7,8}^*$  и по ним строим в правом верхнем квадранте кривую свободных колебаний нелинейной системы (скелетную кривую). Построением этой кривой обычно и заканчивается расчет свободных колебаний.

Вычисление  $E_{7,8}^{(1)(8)} = f(\Delta)$

	6		7		8
	$H_6^{(1)}$	$E_{6,7}$	$H_7$	$E_{7,8}^*$	$H_8$
		0,765	-0,46Δ		-28,3Δ
$\Delta=0,0735$	-3,5	0,765	-0,0338		-2,08
$n=1270$ об/мин		-0,285	+2,12	+0,48	
		+0,48	+2,08	-0,48	
				0	$=E_{7,8}^{(1)(8)}$
$\alpha$					
$\delta$					
$\Delta=0,066$	-1,71	+0,765	-0,0303		-1,87
$n=1200$ об/мин		-0,585	+5,56	+0,181	
		+0,18	+5,53	-0,532	
				-0,351	$=E_{7,8}^{(1)(8)}$
$\alpha$	+0,154		-0,0445		-0,14
$\delta$		-0,264		-0,263	
$\Delta=0,055$	-0,92	+0,765	-0,0254		-1,57
$n=1100$ об/мин		-1,08	-3,18	-0,314	
		-0,315	-3,205	-0,64	
				-0,954	$=E_{7,8}^{(1)(8)}$



$\alpha$	+0,271		+0,0185		-0,162
$\delta$		-0,1249		-0,253	
$\Delta=0,046$	-0,544	+0,765	-0,212		-1,3
$n=1000$ об/мин		-1,84	-0,932	-1,05	
		-1,075	-0,953	-0,77	
				-1,82	$= E_{7,8}^{(1)(8)}$
$\alpha$	+0,381		+0,222		-0,202
$\delta$		-0,207		-0,212	
$\Delta=0,033$	-0,3	0,765	-0,0152		-0,94
$n=850$ об/мин		-3,34	-0,39	-2,47	
		2,57	-0,4052	-1,065	
				-3,53	$= E_{7,8}^{(1)(8)}$
$\alpha$	0,54		+0,42		-0,181
$\delta$		-0,163		-0,17	
$\Delta=0,03$	-0,258	0,765	-0,0137		-0,849
$n=810$ об/мин		-3,8	-0,321	-2,98	
		-3,11	-0,334	-1,17	
				-4,16	$= E_{7,8}^{(1)(8)}$
$\alpha$	+0,581		+0,466		-0,184
$\delta$		-0,15		-0,156	

Кривая  $\Delta = f(F_{7,8}^*)$  показывает, что колебания системы характеризуются многозначностью движений решений.

Колебания в соответствии с ветвью  $ab$  происходят в том случае, когда эластический момент  $F_{7,8}^*$  в амортизаторе не превосходит величины  $u_0 - M_{cp}$ , т. е. система в целом может рассматриваться как линейная.

Если  $F_{7,8}^* > (u_0 - M_{cp})$ , то вступают в работу пружины амортизатора и колебания совершаются по ветви  $bc$ .

Ветвь  $cd$  определяет движение системы, когда  $F_{7,8}^* \gg u_1$  и вступают в работу ограничители деформации. Как видно из рис. 67, с введением амортизатора в данную систему оказывается возможным существенное уменьшение ее частоты: от  $\sqrt{\Delta_{max}} = \sqrt{0,0735}$  до  $\sqrt{\Delta_{min}} = 0,03$ .

**Пример 2.** Расчет резонансных колебаний системы с одним нелинейным элементом. Все данные системы указаны в предыдущем примере.

Частота свободных колебаний нелинейной системы, являясь величиной непостоянной, изменяется в пределах  $\sqrt{0,0735} > \sqrt{\Delta} > \sqrt{0,03}$  или  $7600 > N > 4850$  кол/мин. С частотой свободных колебаний, в пределах рабочего диапазона чисел оборотов  $700 < n < 1600$  об/мин попадает в резонанс гармоника возмущающего момента шестого порядка (главный порядок) с частотой  $N = 4200 \div 9600$  кол/мин. Определение амплитуды и частоты резонансных колебаний производим графическим способом § 74. Для этого построим две кривые: первую «скелетную» кривую (пример 1), вторую — кривую резонансных амплитуд колебаний. Резонансную кривую будем строить в диапазоне частот  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,0735} \div \sqrt{0,03}$ , для этого воспользуемся таблицей, в которой определено  $E_{7,8}^{(1)(8)} = f(\Delta)$  и для намеченных ранее частот вычислим формы колебаний. Далее, принимая при каждом из этих частот систему «мгновенно линейной», из уравнения баланса работ возмущающих и демпфирующих моментов определяем резонансную амплитуду колебаний. Из возникающих в системе трений учтем только трение в двигателе (6.21) и амортизаторе (6.19). Запишем уравнение баланса работ

$$W_m = W_{тр\,дв} + W_{тр\,ам}.$$

В развернутом виде оно приобретает вид

$$\pi M_{vk} \left| \sum_{y=1}^6 \bar{a}_y \right| A_{1R} = w_{дв} A_{1R}^2 + w_{дв}^0 A_{1R} + \pi \mu E_{7,8}^* \delta_{7,8}^2 A_{1R}^2.$$

Составим уравнение для определения резонансной амплитуды (вычисления произведем для  $\Delta = 0,066$ ;  $N = 7200$  кол/мин,  $n_R = \frac{7200}{6} = 1200$  об/мин).

$$A_{1R} = \frac{\pi M_{vk} \left| \sum_{y=1}^6 \bar{a}_y \right| - w_{дв}^0}{w_{дв} + \pi \mu E_{7,8}^* \delta_{7,8}^2}.$$

Здесь  $M_{vk} = e_0 2 \cos \frac{\sqrt{\xi}}{2} M_v = e_0 2 \cos \frac{\sqrt{\xi}}{2} \frac{\pi D^2}{4} R p_c y_v = 3,75 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cos \frac{6 \cdot 300}{2} \times$   
 $\times \frac{\pi 18^2}{4} \cdot 10 \cdot 42 \cdot 0,0152 = 0,12 \cdot 10^{-3}$  — амплитуда гармонического ( $v = 6$ ) возмущающего момента, приходящегося на одно колено двигателя, коэффициент  $y_v$  определяем по номограмме (44);



$\xi = 300^\circ$  — угол поворота коленчатого вала, соответствующий интервалу между вспышками в цилиндрах, связанных с одним коленом;

$$p_c = 27 + 27 \left( \frac{n_R}{n_H} \right)^2 = 27 \left[ 1 + \left( \frac{1200}{1600} \right)^2 \right] = 42 \text{ кг/см}^2 \text{ — давление конца}$$

сжатия;

$$p_i = p_e + p_m = 4,4 + 1,26 = 5,66 \text{ кг/см}^2 \text{ — среднее индикаторное давление;}$$

$$p_e = p_{en} \left( \frac{n_R}{n_H} \right)^2 = 7,8 \left( \frac{1200}{1600} \right)^2 = 4,4 \text{ кг/см}^2 \text{ — среднее эффективное давление;}$$

$$M_{ср к} = e_0 \cdot 2 \cdot 716 \cdot 0,8725 D^2 \cdot 2 R p_e = 3,75 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 716 \cdot 0,8725 \cdot 0,18^2 \cdot 0,2 \cdot 4,4 = 0,133 \cdot 10^{-3} \text{ — средний крутящий момент, приходящийся на одно колено вала двигателя;}$$

$$p_m = 0,6 + 0,45 \frac{n_R}{n_H} \left( 1,2 + \frac{n_R}{n_H} \right) \left( \frac{1 - \eta_{мн}}{\eta_{мн}} p_{en} - 0,6 \right) = 0,6 + 0,45 \frac{1200}{1600} \times \\ \times \left( 1,2 + \frac{1200}{1600} \right) \left( \frac{1 - 0,83}{0,83} \cdot 7,8 - 0,6 \right) = 1,26 \text{ кг/см}^2 \text{ — среднее давление механических потерь;}$$

$$p = \frac{p_i}{p_c} = 0,135 \text{ — отношение давлений}$$

$$r = \frac{\nu + 14}{17 + 40p} + \frac{p - 0,1}{11p + 0,3} \cdot \frac{M_{ср к}}{M_{вк}} = \frac{6 + 14}{17 + 40 \cdot 0,135} + \\ + \frac{0,135 - 0,1}{11 \cdot 0,135 + 0,3} \cdot \frac{0,133 \cdot 10^{-3}}{0,12 \cdot 10^{-3}} = 0,916;$$

$$q = \frac{168m}{D^2 R} [d_k^3 l_k + d_{ш}^3 l_{ш} + (D + 0,5 L_n) L_n R^2] = \\ = \frac{168 \cdot 4}{18^2 \cdot 10} [10,5^3 \cdot 6,6 + 9,5^3 \cdot 8 + (18 + 0,5 \cdot 13,7) 13,7 \cdot 10^2] = 0,0094;$$

$$\sum_{y=1}^6 \alpha_y^2 = 3,1 \text{ (из таблицы Терских);}$$

$$\omega_{дв} = \pi \mu_{вк} N_R \frac{N_R + 3820}{N_R + 5750} q r \sum_{y=1}^6 \alpha_y^2 =$$

$$= \pi \cdot 0,12 \cdot 10^{-3} \cdot 7200 \frac{11 \cdot 200}{12 \cdot 950} 0,0094 \cdot 0,916 \cdot 3,1 = 61,2 \cdot 10^{-3};$$

$$\left| \sum_{y=1}^6 \bar{\alpha}_y \right| = 3,75 \text{ (из соответствующего геометрического построения § 47),}$$

$$\omega_{дв}^0 = \pi \frac{0,02 (\nu + 10) (0,7 + \lambda) M_{вк}}{1 - 3,5p + 25p^2} \left| \sum_{y=1}^6 \bar{\alpha}_y \right| =$$

$$= \pi \frac{0,02 (6 + 10) (0,7 + 0,286) \cdot 0,12 \cdot 10^{-3}}{1 - 3,5 \cdot 0,135 + 25 \cdot 0,135^2} = 0,46$$

$\mu = 0,1$  — удельное трение в амортизаторе на основании экспериментальных данных;

$E_{7,8}^* = 0,351$  — приведенная податливость (табл. 16);

$\delta_{7,8} = 0,263$  — амплитуда эластического момента в амортизаторе (табл. 16).

Следовательно резонансная амплитуда будет равна

$$A_{1R} = \frac{\pi \cdot 0,12 \cdot 10^{-3} \cdot 3,75 - 0,46 \cdot 10^{-3}}{61,2 \cdot 10^{-3} + \pi \cdot 0,1 \cdot 0,359 \cdot 0,263} = 0,0137 \text{ рад.}$$

Все вычисления по определению  $A_{1R}$  и  $F_{7,8}^*$  для остальных  $\Delta$  сводим в табл. 17 и по полученным результатам строим на рис. 67 кривую резонанс-

Таблица 17

Расчет резонансных колебаний нелинейной системы (к примеру 2)

$\Delta$	$n$	$M_v$	$\sum_{y=1}^6 \bar{\alpha}_y$	$\sum_{y=1}^6 \alpha_y^2$	$r$	$\delta_{7,8}$
	об/мин	$10^{-3}$				
0,033	850	0,90	4,36	4,2	0,95	0,170
0,046	1000	0,10	4,12	3,6	0,925	0,212
0,055	1100	0,11	3,95	3,4	0,920	0,240
0,066	1200	0,12	3,75	3,1	0,916	0,263

Продолжение

$E_{7,8}^*$	$\omega_{дв}^0$	$\omega_{дв}$	$\omega_{ам}$	$\pi M_{1R}^{(1)(8)}$	$A_{1R}$	$F_{7,8}^*$
	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	радиан	$10^{-3}$
3,53	0,430	44,0	32,2	1,23	0,0105	1,78
1,82	0,432	49,1	25,6	1,29	0,0115	2,46
0,95	0,450	56,5	17,2	1,36	0,0123	2,97
0,35	0,465	61,2	7,6	1,41	0,0137	3,6

ных амплитуд колебаний  $F_{7,8}^* = f(\Delta)$ . Точка пересечения кривых свободных и резонансных колебаний определяет частоту резонансных колебаний нелинейной системы

$$\sqrt{\Delta_R} = \sqrt{0,046}$$

и амплитуду эластического момента в нелинейном соединении при резонансных колебаниях

$$F_{7,8}^* = 2,5 \cdot 10^{-3}; \quad F_{7,8}^* = \frac{F_{7,8}^*}{e_0} = 66,5 \cdot 10^3 \text{ кгсм.}$$



## УСТРАНЕНИЕ ЗАПРЕТНЫХ ЗОН

## § 76. Общие положения

Первоначальный расчет крутильных колебаний валопроводов нередко выявляет наличие запретных зон чисел оборотов, совпадающих с эксплуатационными режимами, или наличие резонансов, переход через которые сопровождается чрезмерно большими напряжениями в элементах валопровода. В этих случаях в задачу расчетчика входит дополнительная проработка вопроса с целью рекомендации мероприятий, выполнение которых обеспечивает полную надежность эксплуатации судна.

К числу таких мероприятий относятся: варьирование элементами системы, варьирование последовательностью вспышек, применение успокоителей.

Два первых мероприятия обладают весьма ограниченными возможностями, об этом подробно сказано в § 77—80. Однако именно с возможности их осуществления следует начинать борьбу с крутильными колебаниями. Если расчет последних выполняется в процессе проектирования установки, то указанные два способа варьирования в некоторых случаях позволяют обеспечить надежность эксплуатации установки без каких-либо дополнительных материальных затрат. Для этой цели иногда достаточно установить маховик с моментом инерции, отличающимся от первоначально намеченного; изменить упругие элементы муфты, если она была уже предусмотрена (или ввести муфту); изменить диаметр промежуточных валов. Если потребителями мощности в установке являются гребной винт или генератор, а изменение момента инерции соответствующих масс способствует решению поставленной задачи, ротор генератора и гребной винт могут быть выполнены с заданными моментами инерции. Когда это не противоречит технической целесообразности, то, по согласованию с изготовителями, в упомянутых элементах установки могут быть предусмотрены необходимые изменения.

В тех случаях, когда варьирование не обеспечивает получения требуемых результатов, обращаются к применению успокоителей.

## § 77. Принцип варьирования элементами системы

Варьирование элементами системы — одно из мероприятий по устранению запретных зон чисел оборотов.

Представим себе такой случай: при расчете крутильных колебаний некоторой установки частота свободных колебаний какой-либо

формы совпала с числом оборотов двигателя при одном из эксплуатационных режимов. Так как указанное совпадение обуславливает возникновение резонанса, то рабочий режим при наличии достаточно больших колебаний попадает в запретную зону. Работа установки при таких условиях недопустима, поэтому следует подумать о том, как ликвидировать наличие резонанса. Для этого существуют две возможности: изменение частоты возмущающих моментов и изменение частоты свободных колебаний системы.

Для осуществления первого мероприятия достаточно изменить число оборотов двигателя. Из рис. 10 легко усмотреть, что в этом случае частоты всех составляющих гармонического момента (а в том числе и той составляющей, которая обуславливает наличие резонанса) понижаются. Таким образом мы устраняем резонанс и установка становится работоспособной. Однако такое мероприятие требует изменения заданного эксплуатационного режима, что допустимо в исключительных случаях. Как известно, для судовой установки с непосредственной передачей мощности на гребной винт изменение числа оборотов двигателя по винтовой характеристике всего лишь на 3% влечет за собой изменение развиваемой им мощности на 10%. При этом увеличение числа оборотов двигателя вызывает его существенную перегрузку, а уменьшение влечет за собой значительное снижение мощности, что нецелесообразно по условиям рентабельности эксплуатации.

Второе мероприятие — изменение частоты свободных колебаний системы — достигается изменением моментов инерции масс системы или изменением податливости ее упругих соединений. Как уже упоминалось выше, увеличение моментов инерции масс и податливостей всегда влечет за собой уменьшение, а уменьшение — увеличение частоты свободных колебаний. Это нетрудно показать на примере двухмассовой системы, для которой частота свободных колебаний определяется по формуле (3.76),

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{E_{1,2} \left( \frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2} \right)}}.$$

Для систем с большим числом масс эта закономерность может быть доказана в общем виде, но здесь ограничимся следующими простыми соображениями. Всякую многомассовую систему можно заменить приближенно эквивалентной двухмассовой системой. Если в исходной системе какую-либо массу или податливость увеличить, соответственно увеличатся массы или податливость заменяющей системы, что повлечет за собой уменьшение приближенного, следовательно, и действительного значения частоты свободных колебаний.

Таким образом, изменяя должным образом параметры исследуемой системы (массы и податливости), можно установить для нее (теоретически) любую заданную заранее частоту свободных колебаний. Практически это удается не всегда, так как необходимое



изменение частоты может потребовать нецелесообразного для данного случая конструктивного изменения деталей. Например, для судовой установки необходимому увеличению момента инерции маховика (следовательно, и его размеров) могут препятствовать габариты машинного помещения, а увеличение податливости валапровода, связанное с уменьшением его диаметра, может быть недопустимым по причине возрастания действующих в нем напряжений.

Цель *варьирования*, следовательно, — так изменить моменты инерции масс и податливости соединений системы, чтобы она приобрела наперед заданную частоту свободных колебаний (той или иной формы), допускающую работу установки на требуемых эксплуатационных режимах.

Вопрос о выборе требуемого значения частоты свободных колебаний решается после анализа вынужденных колебаний системы, так как необходимое изменение частоты свободных колебаний зависит от ширины запретной зоны, которая устанавливается по кривым резонанса.

#### § 78. Варьирование элементами системы на базе таблиц Терских

Величины изменяемого параметра системы (момента инерции массы или податливости какого-либо соединения) определяют с помощью описанных выше таблиц Терских.

А. Если рассчитывающий знаком только с таблицей Терских без надлома, то варьирование может быть выполнено с ее помощью.

В вертикальных столбцах такой таблицы размещаются величины, входящие в зависимости (3.49),

$$H_k^{(1)} = H_k + \frac{1}{E_{k-1,k}^{(1)}} \quad \text{и} \quad E_{k-1,k}^{(1)} = E_{k-1,k} + \frac{1}{H_{k-1}^{(1)}}.$$

Перестановка членов этих зависимостей позволяет представить их в видах

$$H_k = H_k^{(1)} - \frac{1}{E_{k-1,k}^{(1)}} \quad \text{и} \quad E_{k-1,k} = E_{k-1,k}^{(1)} - \frac{1}{H_{k-1}^{(1)}}. \quad (9.01)$$

Так как члены, содержащиеся в правых частях этих равенств, размещаются во второй и третьей строках таблицы Терских (см. табл. 3), то их разность однозначно определяет величины варьированных параметров системы.

Практически поступают так. На основании указаний § 77 выбирают элемент системы, величиной которого целесообразно варьировать. Устанавливают значение требуемой частоты  $\sqrt{\Delta}$ . Первую строку заполняют параметрами системы, как описано в § 19, оставив свободной ту клетку, где должна располагаться характеристика варьированного элемента (допустим  $E_{k-1,k}$ ). Вначале расчет выполняется обычным способом, начиная с верхнего левого угла до тех

пор, пока этому не воспрепятствует пустая клетка. Выбранная величина  $\Delta$  должна быть корнем частотного уравнения, характеризующего измененную систему, и обращает его левую часть в нуль. Поэтому в третьей строке крайнего правого столбца таблицы записывается нуль, начиная от которого производится дальнейшее заполнение таблицы. Для удовлетворения первой алгебраической суммы вида (9.01) над нулем должна быть помещена величина, обратная по знаку  $H_p$ , т. е.  $+\vartheta_p\Delta$ . Число, обратное  $\vartheta_p\Delta$  по величине, записывается в третью строку соседнего столбца. Имея в виду алгебраические суммы упомянутого вида, производят дальнейший расчет до тех пор, пока не будет заполнена клетка, оставленная пустой. Так определяется величина  $E_{k-1,k}$ , после чего находится  $e_{k-1,k} = e_0 E_{k-1,k}$ .

Если для варьирования выбрана масса с номером  $k$ , то, приступая к заполнению первой строки аналогичной таблицы, оставляют пустой клетку для  $H_k$ , которая заполняется лишь при заключении расчета, аналогичного описанному. Найти момент инерции массы  $\theta_k$  не представляет затруднений:

$$-\vartheta_k\Delta = H_k; \quad \vartheta_k = -\frac{H_k}{\Delta}; \quad \theta_k = \vartheta_k\theta_0. \quad (9.02)$$

Последовательность заполнения таблицы для варьирования в обоих случаях одинакова, она указана стрелками (табл. 22).

После заполнения таблицы следует убедиться, что форма колебаний соответствует рассчитываемой по числу узлов, которые обнаруживаются по правилу знаков (§ 19). Если число узлов не соответствует рассматриваемой форме колебаний или найденные податливость и стойкость оказываются с несвойственными им знаками, варьирование выбранным элементом не обеспечивает требуемой частоты. В этом случае варьировать другим элементом системы или двумя элементами, используя возможности, обеспечиваемые их конструкцией. Найденную величину варьированного элемента системы можно принять только после того, как установлено, что все резонансы данной и других форм колебаний не повлияют на надежность работы системы при всех эксплуатационных режимах.

Б. На базе таблицы Терских с надломом варьирование производится значительно проще, так как ее заполнение с самого начала предусматривается с двух концов (§ 23).

Записав частотные уравнения многомассовой системы (3.61) и (3.63),

$$H_k + \frac{1}{E_{k-1,k}^{(1)}} + \frac{1}{E_{k,k+1}^{(p)}} = 0 \quad \text{и} \quad E_{k,k+1} + \frac{1}{H_k^{(1)}} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}} = 0. \quad (9.03)$$



замечаем, что из первого может быть найдена стойкость варьируемой массы

$$H_k = - \left( \frac{1}{E_{k-1, k}^{(1)}} + \frac{1}{E_{k, k+1}^{(p)}} \right). \quad (9.03, a)$$

В таблицах Терских с надломом на  $k$ -й массе все три величины размещаются в одном столбце, ограниченном утолщенными линиями (табл. 4). Оба компонента правой части уравнения при требуемой частоте находятся, как описано в § 23. Их алгебраическая сумма, взятая с обратным знаком, очевидно, определяет стойкость варьируемой массы. Таким образом, решая задачу подбора момента инерции некоторой выбранной массы с номером  $k$ , следует составить таблицу с «надломом» на этой массе и заполнить первую ее строку, определив стойкости всех масс (кроме  $H_k$ ) при требуемой частоте. После обычного заполнения второй и третьей строк таблицы (§ 23) находят  $1/E_{k-1, k}^{(1)}$  и  $1/E_{k, k+1}^{(p)}$ , а затем  $H_k$ .

Последующее определение момента инерции этой массы производится в соответствии с (9.02).

Вычисление варьируемой податливости базируется на втором частотном уравнении из приведенных за номером (9.03). Представив его в виде

$$E_{k, k+1} = - \left( \frac{1}{H_k^{(1)}} + \frac{1}{H_{k+1}^{(p)}} \right), \quad (9.03, б)$$

получим возможность решить поставленную задачу. Для этого составляется таблица Терских с надломом на податливости  $E_{k, k+1}$ . Последовательность вычислений не отличается от описанной выше для определения  $H_k$ . В обоих случаях следует учесть замечания, указанные в конце пункта А данного и в конце предыдущего параграфов.

В. При варьировании несколькими элементами оказывается возможным не только добиться большего смещения частот свободных колебаний, но также осуществить одновременное смещение частот колебаний двух форм или, изменяя частоту одной формы колебаний, сделать так, чтобы частота другой формы колебаний осталась прежней. Все эти возможности описаны в [58, стр. 47].

### § 79. Варьирование элементами системы на базе таблицы Толле

Цель варьирования элементами системы и мероприятия, обеспечивающие его осуществление, описаны в § 77 и 80. В § 78 изложен способ соответствующего расчета, основанный на использовании таблицы Терских. Если расчет выполняется с помощью таблицы Толле, то обычно она дополняется двумя столбцами, в которых вычисления амплитуд колебаний и эластических моментов осуществляются в обратной последовательности, т. е., полагая  $\alpha_p = 1$ . Эта таблица

известна под названием «вперед — назад» [17, стр. 170]. Здесь предлагается иной прием, пригодный для большинства случаев, встречающихся в расчетной практике.

Допустим, что требуемая частота свободных колебаний системы уже установлена. Таблица Толле составлена так, что варьируемые элементы располагаются в ее последних строках, а вычисления выполнены до той операции, где расчету воспрепятствовало отсутствие параметра, характеризующего варьируемый элемент.

Задача сводится к отысканию этого параметра, на основании других известных параметров системы, а также величин, найденных в упомянутой таблице.

Запишем и пронумеруем последние зависимости из системы уравнений (3.43), характеризующих свободные колебания,

$$\left. \begin{aligned} \text{А. } \delta_{p-2, p-1} &= \delta_{p-3, p-2} - \alpha_{p-2} \vartheta_{p-2} \Delta; \\ \text{Б. } \alpha_{p-1} &= \alpha_{p-2} + \delta_{p-2, p-1} E_{p-2, p-1}; \\ \text{В. } \delta_{p-1, p} &= \delta_{p-2, p-1} - \alpha_{p-1} \vartheta_{p-1} \Delta; \\ \text{Г. } \alpha_p &= \alpha_{p-1} + \delta_{p-1, p} E_{p-1, p}; \\ \text{Д. } \delta_{p, \dots} &= \delta_{p-1, p} - \alpha_p \vartheta_p \Delta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.04)$$

Так как корень системы частотных уравнений (безразмерная частота) известен, остаточный момент здесь должен быть равным нулю.

Варьируя последней массой, ее момент инерции находим из Д

$$\vartheta_p = \frac{\delta_{p-1, p}}{\alpha_p \Delta}. \quad (9.05)$$

Варьируя податливостью последнего соединения, ее значение определяем из Г. Последнее слагаемое заменим на основании (9.05)

$$E_{p-1, p} = \frac{\alpha_p}{\delta_{p-1, p}} - \frac{\alpha_{p-1}}{\delta_{p-1, p}}; \quad E_{p-1, p} = \frac{1}{\vartheta_p \Delta} - \frac{\alpha_{p-1}}{\delta_{p-1, p}}. \quad (9.05, a)$$

Варьирование предпоследней массой выполняем на основании В и (9.05, a)

$$\begin{aligned} \vartheta_{p-1} &= \frac{\delta_{p-2, p-1}}{\alpha_{p-1} \Delta} - \frac{\delta_{p-1, p}}{\alpha_{p-1} \Delta}; \quad \frac{\alpha_{p-1}}{\delta_{p-1, p}} = \frac{1}{\vartheta_p \Delta} - E_{p-1, p}; \\ \vartheta_{p-1} &= \frac{\delta_{p-2, p-1}}{\delta_{p-1, p} \Delta} - \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_p \Delta} - E_{p-1, p} \Delta}. \end{aligned} \quad (9.05, б)$$



Поступая аналогичным образом, находим:  
на основании Б и (9.05, б)

$$E_{p-2, p-1} = \frac{\alpha_{p-1}}{\delta_{p-2, p-1}} - \frac{\alpha_{p-2}}{\delta_{p-2, p-1}}; \quad \frac{\delta_{p-2, p-1}}{\alpha_{p-1}\Delta} =$$

$$= \vartheta_{p-1} + \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_p} - E_{p-1, p}\Delta} = Y; \quad (9.05, в)$$

$$E_{p-2, p-1} = \frac{1}{Y\Delta} - \frac{\alpha_{p-2}}{\delta_{p-2, p-1}}; \quad (9.05, г)$$

на основании А и (9.05, г)

$$\vartheta_{p-2} = \frac{\delta_{p-3, p-2}}{\alpha_{p-2}\Delta} - \frac{\delta_{p-2, p-1}}{\alpha_{p-2}\Delta}; \quad \frac{\alpha_{p-2}}{\delta_{p-2, p-1}} = \frac{1}{\Delta Y} - E_{p-2, p-1};$$

$$\vartheta_{p-2} = \frac{\delta_{p-3, p-2}}{\alpha_{p-2}\Delta} - \frac{1}{\frac{1}{Y} - E_{p-2, p-1}\Delta}. \quad (9.05, д)$$

Нередко варьирование каким-либо одним элементом системы не обеспечивает требуемых результатов, т. е. необходимое изменение элементов системы оказывается невозможным (найденные по формулам данного параграфа величины оказываются с несвойственными им знаками) или технически нецелесообразным. В этих случаях применяется одновременное варьирование двумя элементами.

Допустим, что поставлена задача понизить частоту свободных колебаний системы за счет изменения податливости промежуточного вала  $E_{p-1, p}$  или массы маховика. Однако найденное по формуле (9.05, б) значение  $\vartheta_{p-1}$  осуществить невозможно по причине превышения габаритов, а увеличение податливости на участке  $p-1, p$  нецелесообразно потому, что при значительном уменьшении диаметра вала напряжения в нем превосходят допускаемые. В этом случае момент инерции маховика находят при максимально допустимых габаритах и, подставляя его значение в формулу (9.05, б), определяют требуемое значение податливости промежуточного вала. Зависимость (9.05, б) при этом соответственно видоизменяется

$$E_{p-1, p} = \frac{1}{\vartheta_p\Delta} - \frac{\alpha_{p-1}}{\delta_{p-2, p-1} - \alpha_{p-1}\vartheta_{p-1}\Delta}.$$

Действительные значения моментов инерции масс и податливостей участков системы находят по формулам (9.02) и (3.20).

Все приведенные в данном параграфе формулы могут быть использованы при расчете, базирующемся на таблице Терских.

## § 80. Мероприятия по варьированию элементами системы

Выбор объектов варьирования основывается на принципах динамической и технической целесообразности.

Динамическая целесообразность определяется эффективностью варьирования элементов, т. е. степенью их влияния на изменение частоты свободных колебаний. Так, варьирование моментом инерции массы, которая располагается в узловом сечении системы, очевидно, не отразится на частоте колебаний данной формы (но может повлиять на частоту колебаний другой формы), а потому не может быть признано целесообразным.

При свободных колебаниях с постоянными амплитудами последние определяют максимальную кинетическую энергию системы, а амплитуды эластических моментов — равную ей максимальную потенциальную энергию, периодически накапливаемую в соединениях. Поэтому в качестве объектов варьирования целесообразно принимать те массы, которым в данной форме колебаний свойственны наибольшие амплитуды, и те соединения, в которых наблюдаются наибольшие эластические моменты. Последние обычно возникают в узлах колебаний данной формы.

Техническая целесообразность выбора объектов варьирования определяется минимумом переделок при изготовлении заменяющих деталей. В связи с этим применяется способ последовательного варьирования элементами системы. Он заключается в том, что требуемое решение находится в нескольких вариантах, т. е. путем варьирования всеми элементами системы, которые могут быть изменены или заменены новыми без капитальной переделки установки. После взаимного сопоставления требуемых для каждого варианта переделок системы выбирается тот, который требует минимального изменения размеров деталей, изменения, которое не отразится на надежности работы установки и не потребует больших материальных затрат.

Перечислим основные конструктивные мероприятия, которые могут быть намечены и осуществлены при варьировании.

С целью изменения податливостей соединений применяется: обточка приставных валов или замена их новыми с увеличенным диаметром; удлинение или укорочение приставных валов; введение упругих муфт или замена упругих элементов этих муфт, если они уже предусмотрены; включение гидромуфты ( $E = \infty$ ), разделяющей систему на две не зависящие одна от другой части.

Для изменения моментов инерции масс применяются: замена маховиков; изменение моментов инерции масс гребных винтов или роторов генератора (это достигается без особых затруднений, если расчет на крутильные колебания выполнен в процессе проектирования установки и упомянутые детали еще не заказаны); установка дополнительных уравновешенных масс на щеках коленчатого вала; установка противовесов на коленчатом валу или их удаление;



утяжеление или облегчение деталей движения. (Если в двигателе предусматриваются чугунные поршни, то некоторые из них заменяют силуминовыми и, наоборот.)

Два последних мероприятия могут повлиять на уравновешенность двигателя и работу его рамовых подшипников как положительно, так и отрицательно, а потому применяются после соответствующего анализа.

### § 81. Варьирование последовательностью вспышек

Резонансные амплитуды, как следует из формул (7.02), (7.05) и (7.06), пропорциональны амплитудам возбудителя системы ( $m_z^{(1)}$ ,  $M_{iR}^{(1)(p)}$ ,  $\sum \bar{a}_y$  и пр.). С уменьшением возбудителя снижаются амплитуды вынужденных колебаний отдельных резонансов. Величина возбудителя (5.51), (5.64), в свою очередь, зависит от последовательности вспышек, поэтому ее целесообразное изменение в некоторых случаях способствует устранению запретных зон.

Для двухтактных двигателей последовательность вспышек определяется только заклиной кривошипов коленчатого вала, а ее изменение требует изготовления нового вала, что нецелесообразно, так как стоимость коленчатого вала оказывается всегда больше стоимости успокоителя колебаний. Затраты времени на проектирование и изготовление успокоителя или осуществление мероприятий по варьированию элементами системы (если они приводят к удовлетворительным результатам) также оказываются меньшими, чем необходимые для изготовления нового коленчатого вала.

Четырехтактные двигатели с четным числом цилиндров имеют коленчатые валы с зеркальной заклиной кривошипов (равноудаленные от середины двигателя кривошипы здесь имеют одинаковое направление, что гарантирует отсутствие внешних неуравновешенных моментов от сил инерции), [20, стр. 236].

Последовательность вспышек в этих двигателях может быть изменена только за счет изменения заклины кулачных шайб, установленных на распределительном валу. Изменение углового положения кулачных шайб привода газораспределительных клапанов, топливных насосов и пусковых распределителей часто предусматривается для регулировки двигателя, а потому не требует никаких материальных затрат. Однако в двигателях с газотурбинным наддувом и при наличии разделенных выпускных коллекторов такое мероприятие может повлечь за собой существенное ухудшение работы газотурбинного агрегата и рабочего процесса в цилиндрах двигателя, а потому имеет ограниченное применение.

Величина возбудителя для главных порядков от последовательности вспышек не зависит, что позволяет использовать этот прием только для резонансов с неглавными порядками.

Векторные диаграммы неглавных порядков, а следовательно, и величины соответствующих возбудителей оказываются одинако-

выми для порядков, номера которых подчиняются закономерностям, указанным в § 45. При установке новой последовательности вспышек одновременно изменяется величина возбудителей для группы порядков. При этом, если величина возбудителя для одной группы порядков уменьшается, то для другой группы — она увеличивается. Это влечет за собой необходимость весьма осторожного подхода к варьированию последовательностью вспышек, так как устранение одной запретной зоны может вызвать возникновение другой запретной зоны, соответствующей резонансу с порядком, относящимся к другой группе.

При варьировании предварительно вычисляют геометрические суммы  $m_z^{(1)}$ ,  $\sum \bar{a}_y$  или  $M_{iR}^{(1)(p)}$  при исследуемой частоте колебаний  $\sqrt{\Delta}$  для всех групп порядков возмущающего момента при существующей и возможных последовательностях вспышек. (При этом можно воспользоваться данными табл. V.)

Результаты расчета для существующей последовательности вспышек записывают в одну строку под номерами соответствующих порядков. В следующей строке выписывают результаты расчета для возможных новых последовательностей вспышек. Сопоставление величин позволяет установить, способствует ли новая последовательность вспышек снижению амплитуд в опасной зоне и не возникает ли такой зоны в другом диапазоне режимов работы установки. Подобный пример рассмотрен в [58, стр. 52].

### § 82. Успокоители колебаний и их конструкция

Кроме варьирования элементами системы и чередованием вспышек, в ряде случаев опасность крутильных колебаний удается устранить при помощи эластичных муфт, устанавливаемых в валопроводе и передающих весь крутящий момент от двигателя приемнику энергии. К ним относятся муфты с резиновыми элементами (брусковые, торовые, шинно-пневматические), центробежные (маятниковые или рычажные), а также различные нелинейные муфты с переменной податливостью, например, имеющие пружины с предварительным натяжением (муфта — амортизатор) и др. Эти муфты обычно устанавливаются исходя из требований эксплуатации или монтажа, но в то же время они могут быть использованы и для устранения опасных крутильных колебаний, так как из-за большой податливости упругих элементов муфт снижаются резонансные частоты, а наличие трения в резиновых элементах или пакетах пружин уменьшает амплитуды крутильных колебаний.

И только в том случае, когда все вышеупомянутые средства борьбы с опасными крутильными колебаниями оказываются неэффективными, применяются специальные агрегаты для гашения крутильных колебаний — успокоители колебаний, устанавливаемые на ответвлении системы или на ее свободном конце.



Успокоители разделяются на антивибраторы и демпферы. Первые оказывают только динамическое воздействие на систему, т. е. снижают частоты свободных крутильных колебаний, соответственно перемещают резонансные частоты и работают без поглощения энергии. Демпферы также изменяют динамику системы, но главное воздействие на систему они оказывают через трение, т. е. они поглощают часть энергии, подводимой возмущающим моментом, и превращают ее в тепло, которое отводится от системы. В результате введения в систему дополнительного трения уменьшаются амплитуды крутильных колебаний.

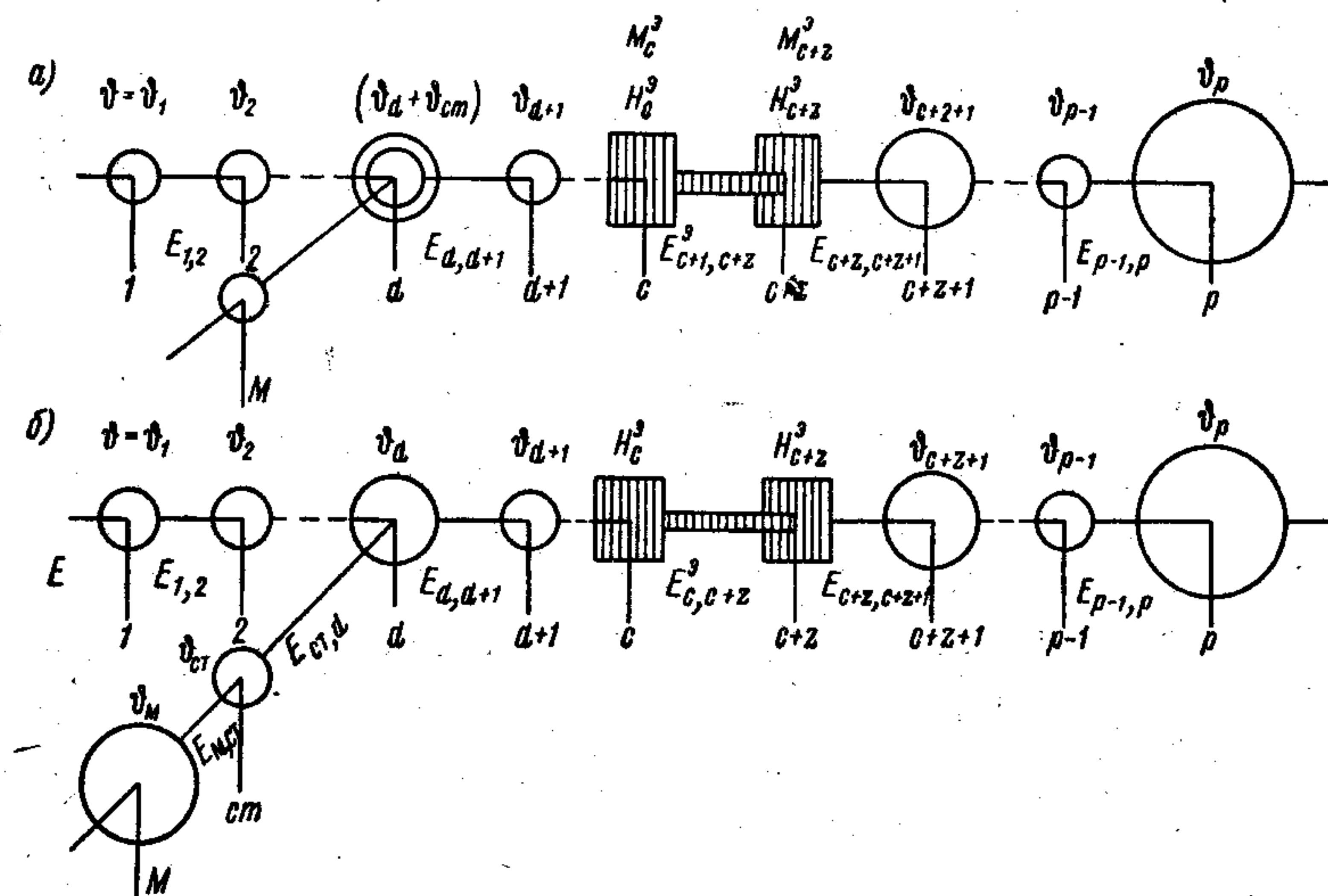


Рис. 68. Жесткое (а) и упругое (б) присоединение демпфера к системе.

Успокоители обычно присоединяются к какой-либо массе системы (обозначим ее номером  $d$ ) непосредственно — жесткое крепление (рис. 68, а) или при помощи упругого соединения ( $E_{ct,d}$ ) — упругое крепление (рис. 68, б).

Перейдем к описанию конструкций успокоителей, оно изложено кратко и может быть дополнено материалами [58], [73], [15] и [65].

**Антивибраторы.** Довольно широкое распространение в судовых силовых установках с двигателями внутреннего сгорания нашли линейный, нелинейный и маятниковый антивибраторы.

Линейный антивибратор (см. рис. 69, а) состоит из трех основных частей: маховой массы 1, ступицы 2 и пружин 3. Ступица жестко монтируется на валу, а маховая масса соединяется со ступицей только через пружины, внутри которых помещается ограничитель деформации 4, гарантирующий угловой зазор  $\varphi_1 = f_1/R$ .

Если ступицу закрепить и, прилагая момент к маховой массе, измерить соответствующую деформацию, то получим так называемую упругую характеристику антивибратора (рис. 69, б). На рис. 69, б по оси ординат отложен упругий момент  $U_{м,ст}$ , а по оси абсцисс — угол поворота маховой массы по отношению к ступице. В линейном антивибраторе угловой зазор в ограничителях  $\varphi_1$  обычно устанавливается меньшим максимальной амплитуды колебаний маховика. В этом случае во время работы антивибратора сохраняется линейная зависимость амплитуды момента  $U_{м,ст}$  от амплитуды  $B_{м,ст}$  — относительного колебания маховой массы.

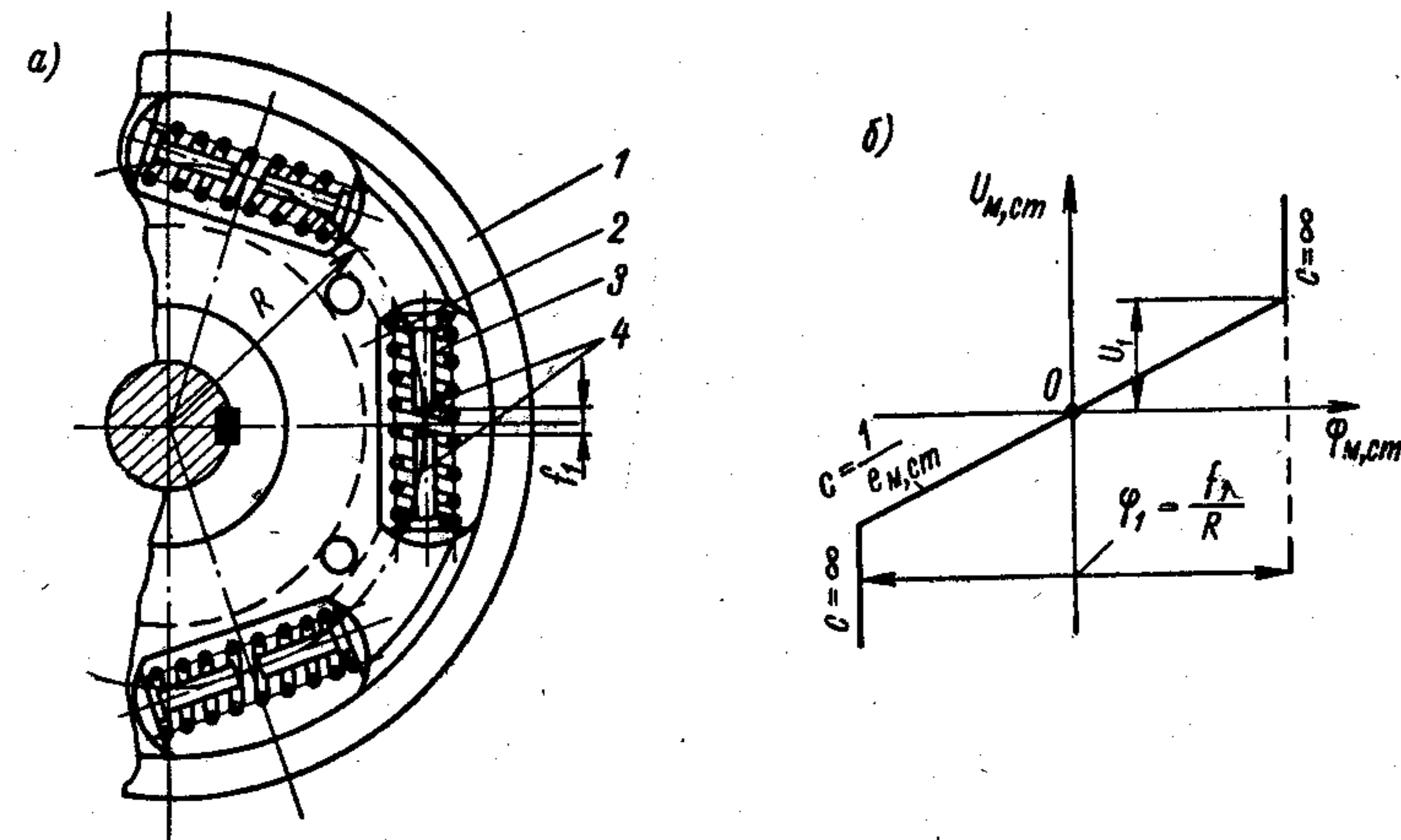


Рис. 69. Линейный антивибратор (а) и упругая характеристика его соединения (б).

Если же амплитуда  $B_{м,ст}$  превысит величину углового зазора  $\varphi_1$ , линейность упругой характеристики нарушается и антивибратор становится нелинейным с особым характером воздействия на систему. Величина зазора в ограничителях колебаний выбирается не только из соображений предохранения элементов антивибратора от перенапряжений (например, при запуске двигателя), как в линейном антивибраторе, но также из условия создания такой упругой характеристики антивибратора, которая обеспечила бы требуемый характер развития нелинейных крутильных колебаний в системе.

В дизелестроении также применяется нелинейный антивибратор (рис. 70, а) в котором пружины устанавливаются с предварительным натяжением. Упругая характеристика такого антивибратора показана на рис. 70, б. Он обладает большими возможностями в борьбе с опасными крутильными колебаниями, чем упомянутый выше, так как здесь добавляется еще один варьируемый параметр—



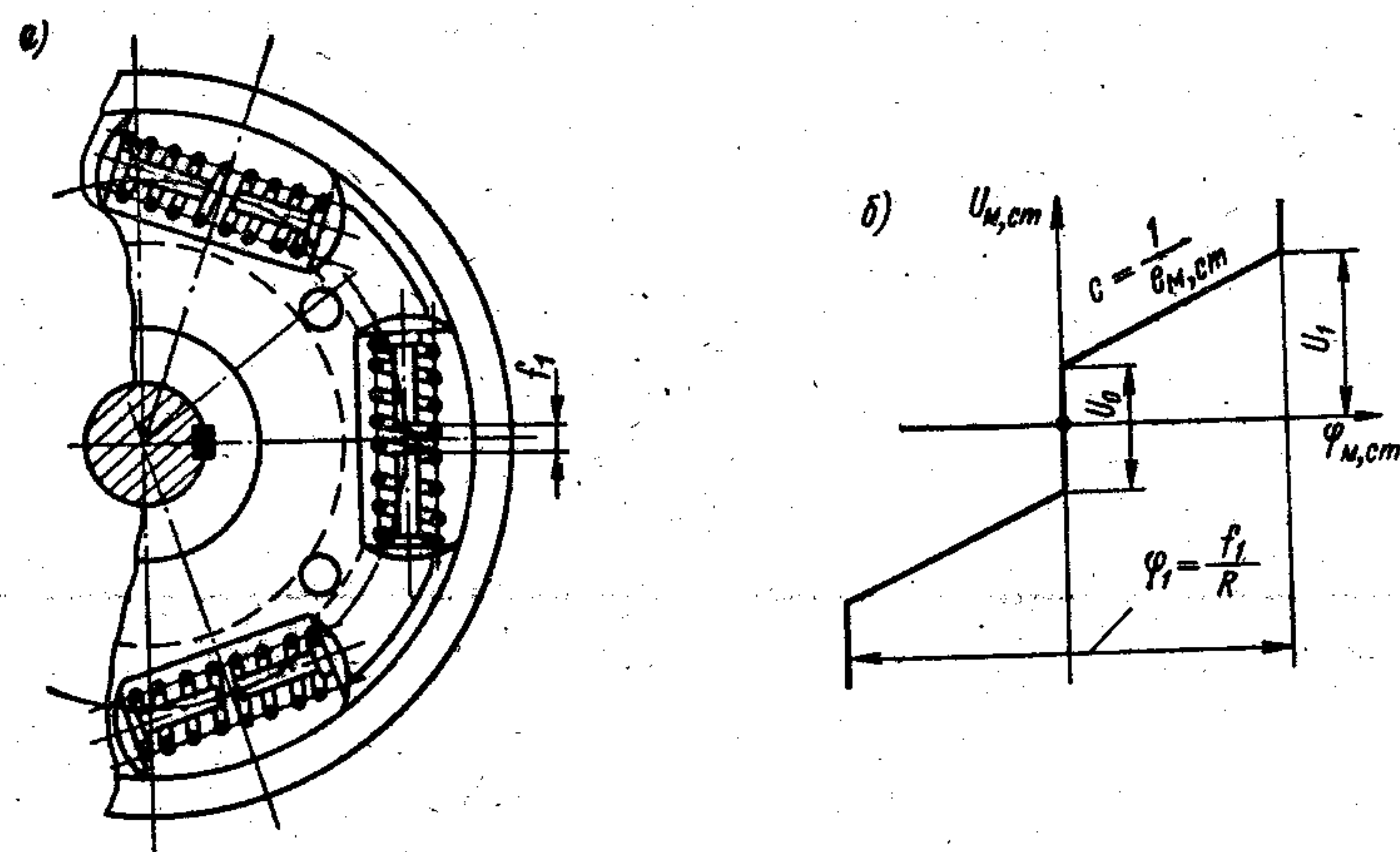


Рис. 70. Нелинейный антивибратор с предварительным натяжением пружин (а) и упругая характеристика его соединения (б).

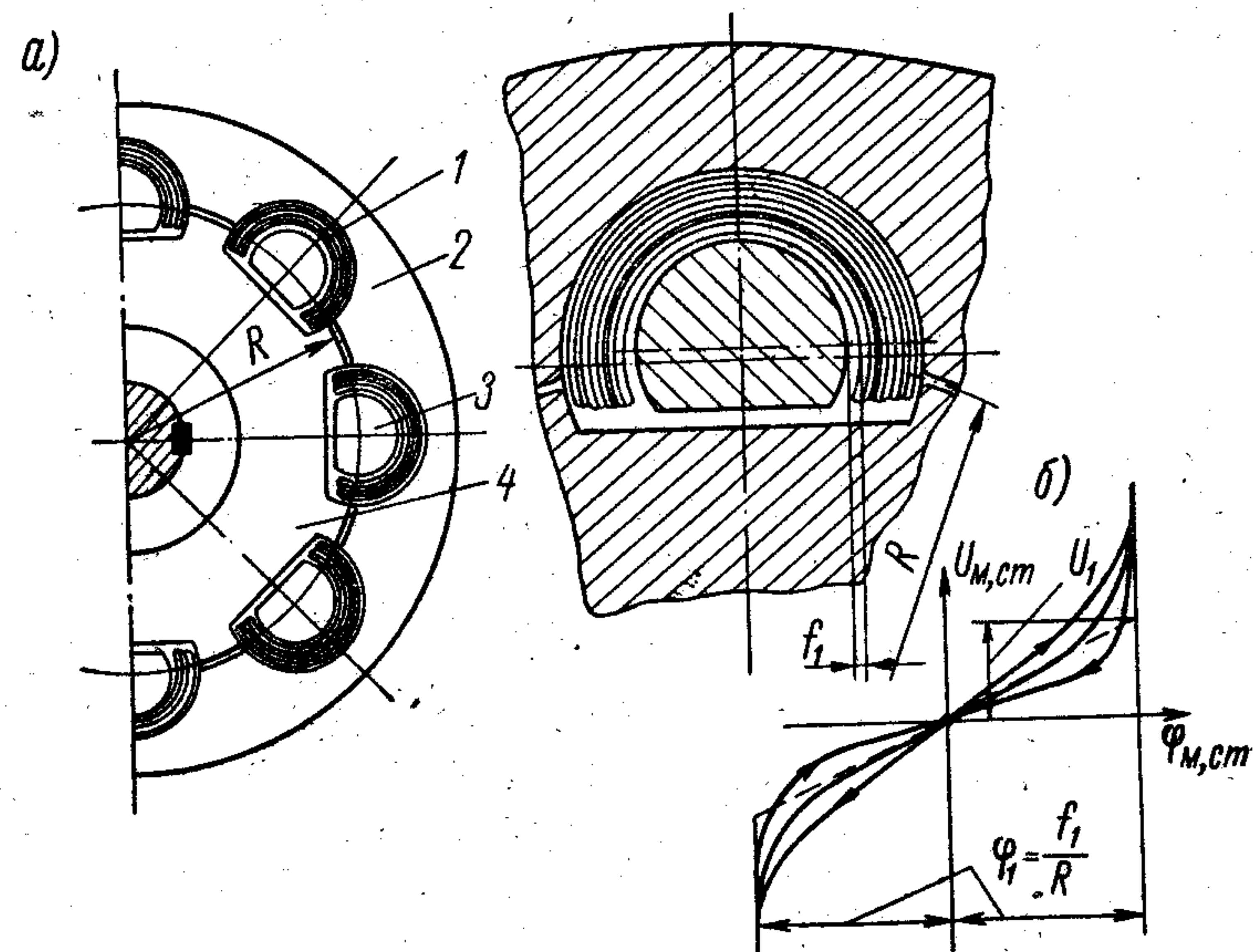


Рис. 71. Нелинейный антивибратор (демпфер) с пакетами пружин (а) и упругая характеристика его соединения (б).

упругий момент, соответствующий предварительному натяжению пружины.

Другая конструкция нелинейного антивибратора и его упругая характеристика представлены на рис. 71, а, б. Здесь между маховой массой 2 и ступицей антивибратора 4 вставляются пакеты пружин 1, внутри которых находится упор 3, ограничивающий деформацию пружин. При перемещении маховой массы относительно ступицы пружины в пакете сжимаются. При этом осуществляется их взаимное перемещение за счет чего создается трение. Такой антивибратор часто называют *пружинным демпфером*.

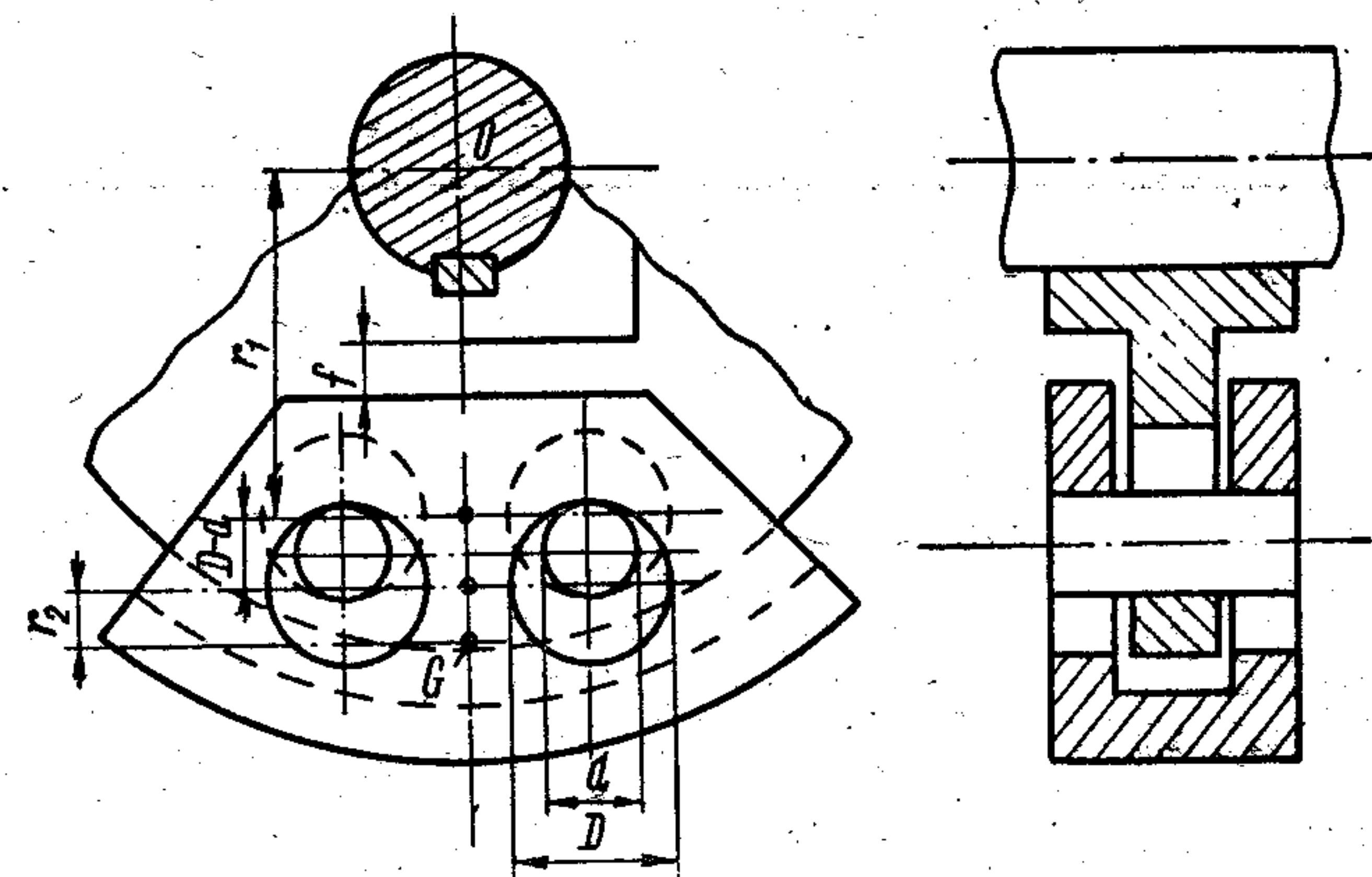


Рис. 72. Маятниковый антивибратор с бифилярным подвесом.

Принципиально отличным по своему воздействию на систему от линейного и нелинейного антивибраторов является маятниковый антивибратор, из множества существующих видов которого остановимся на конструкции с бифилярным подвесом маятников (см. рис. 72), как на наиболее эффективном и нашедшем наибольшее распространение. В жестко монтируемой на валу ступице, а также маятниках этого антивибратора имеются парные симметричные отверстия, в которые вставляются пальцы. При вращении и отсутствии крутильных колебаний маятники под действием центробежных сил занимают радиальное по отношению к ступице положение, а момент этих сил относительно ступицы равен нулю. Когда же ступица вместе с валом начинает совершать крутильные колебания, маятники также начинают колебаться. Возникающий момент центробежных сил стремится вернуть маятники в исходное положение, что уменьшает амплитуду крутильных колебаний ступицы. В отличие от простого антивибратора частота собственных колебаний маятникового антивибратора изменяется пропорционально числу оборотов с коэффициентом пропорциональности, равным порядку возмущающего момента [39, стр. 33], поэтому он снижает резонанс-



ные колебания во всем диапазоне оборотов двигателя. Маятниковый антивибратор (с данным диаметром пальцев) воздействует только на те резонансы, которые вызваны какой-либо одной гармоникой возмущающего момента, а для резонанса от возмущающего момента другого порядка требуется подбор пальцев другого диаметра.

**Демпферы.** Существует большое разнообразие конструкций демпферов крутильных колебаний. Общим для них (в отличие от антивибраторов) является наличие между маховой массой и ступицей элемента с трением, поглощающего часть колебательной энергии системы.

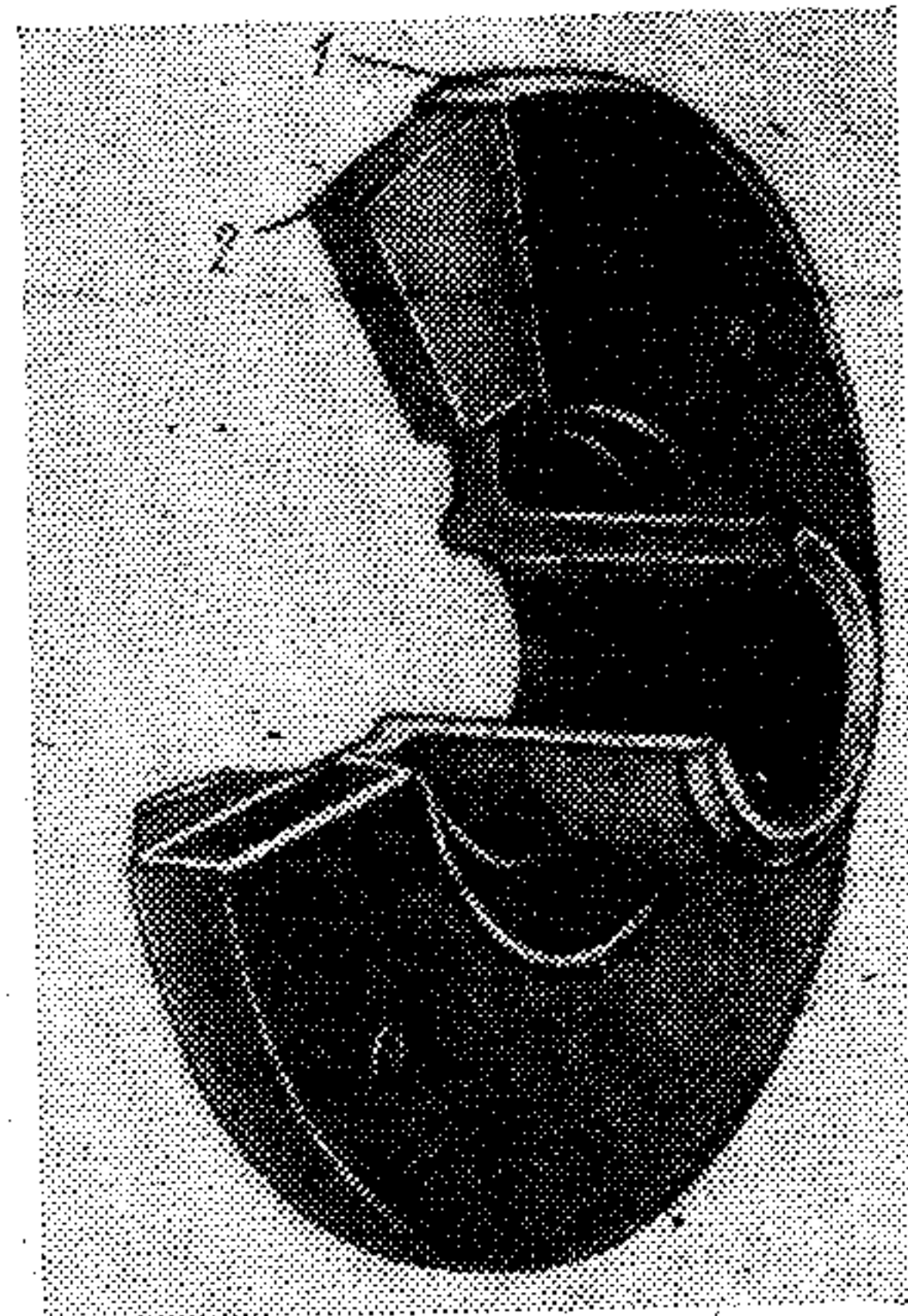


Рис. 73. Силиконовый демпфер крутильных колебаний.

Связь между маховиком и ступицей осуществляется или только за счет трения (чисто фрикционный демпфер) или посредством трения и упругих элементов (упруго-фрикционный демпфер). Необходимое трение в демпферах обеспечивается различными способами, например, установкой фрикционных дисков, прижимающихся друг к другу пружинами; заполнением пространства между маховиком и ступицей машинным маслом, ртутью и другими жидкостями (которые для повышения момента трения пропускаются через дросселирующие отверстия и каналы) или резиной, привулканизированной к поверхностям маховика и ступицы.

В последние годы находит все большее распространение силиконовый демпфер (рис. 73), который благодаря своей высокой эффективности, а также простоте изготовления и эксплуатации почти вытеснил все другие виды демпферов. Ниже дается описание только этого демпфера.

Ступица 1 силиконового демпфера (рис. 73) жестко крепится к валу установки, а маховик 2 размещается свободно внутри кожуха, составляющего одно целое со ступицей.

Между поверхностями маховика и корпуса демпфера имеются зазоры 0,2 — 2,5 мм, которые заполняются силиконовой жидкостью. Энергия крутильных колебаний поглощается здесь трением, возникающим в вязкой среде при относительном движении маховика.

Из различных видов силиконовой жидкости наибольшее применение нашла полиметилсилоксановая жидкость (ПМС). Эта жидкость обладает рядом ценных свойств: имеет высокую химическую инертность, малую зависимость вязкости от температуры (по сравнению с обычными машинными маслами), низкую температуру застывания, хорошую смазывающую способность. Перечисленные свойства остаются стабильными при работе в течение многих тысяч часов.

### § 83. Теория и расчет линейного антивибратора

Рассмотрим простейший линейный антивибратор, изображенный на рис. 69, а, б и работающий в пределах линейного участка упругой характеристики. Пусть антивибратор с моментом инерции ступицы  $\vartheta_{ст}$  присоединен к  $d$ -й массе исходной системы (рис. 68, а). Амплитуда вынужденных колебаний этой массы (с моментом инерции  $\vartheta'_d = \vartheta_d + \vartheta_{ст}$ ) без учета трения и при возбуждении только на массах двигателя может быть определена из уравнения (7.47)

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)(m)}}{H_d^{(1)(p)(m)}} \right| = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} + \frac{1}{E_{d,m} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta}}} \right| = \dots$$

$$\dots = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} + \frac{\Delta}{E_{d,m}(\Delta - \Delta_0)}} \right|, \quad (9.06)$$

где  $\sqrt{\Delta_0} = 1/\sqrt{\vartheta_m E_{d,m}}$  — «настройка» антивибратора (частота его собственных колебаний);

$\bar{M}_d^{(1)(p)}$  — комплексная амплитуда возбудителя, отнесенного к массе  $d$ ;

$H_d^{(1)(p)(m)}$  — стойкость системы на той же массе;

$E_{d,m}$  — податливость соединения антивибратора.

Амплитуда вынужденных колебаний  $d$ -й массы той же системы, но без антивибратора (т. е. исходной системы, для борьбы с повышенными колебаниями в которой и устанавливается антивибратор), определяемая из уравнения (7.37),

$$A_d^u = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)}} \right|, \quad (9.07)$$

принимает бесконечно большое значение при частоте  $\sqrt{\Delta_e}$  свободных колебаний системы, при которой стойкость системы в той же массе обращается в нуль:

$$H_d^{(1)(p)} = 0.$$

Если подобрать момент инерции маховика  $\vartheta_m$  и податливость соединения  $E_{d,m}$  антивибратора такими, чтобы настройка  $\sqrt{\Delta_0}$  была в точности равна частоте  $\sqrt{\Delta_e}$ , то амплитуда вынужденных колебаний  $d$ -й массы окажется равной нулю (см. 9.06)

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} + \frac{\Delta_e}{E_{d,m}(\Delta_e - \Delta_0)}} \right| = \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{0 + \frac{\Delta_e}{E_{d,m}0}} = 0.$$



При данной настройке антивибратора обеспечивается уменьшение амплитуды  $d$ -й массы от бесконечно большого ее значения до нуля, однако может оказаться, что в рабочий диапазон переместится опасный резонанс более высокой формы колебаний, и, следовательно, антивибратор не обеспечит требуемого эффекта. Для пояснения этого рассмотрим уравнение свободных колебаний системы с антивибратором:

$$H_d^{(1)(p)(m)} = H_d^{(1)(p)} + \frac{\Delta}{E_{d,m}(\Delta - \Delta_0)} = 0, \quad (9.08)$$

которое представим в виде, более удобном для исследования:

$$\frac{\Delta}{H_d^{(1)(p)}} = -E_{d,m}(\Delta - \Delta_0). \quad (9.09)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой функциональную характеристику исходной системы (без антивибратора), а правая — характеристику антивибратора. Введем обозначения:

$$Y_1 = \frac{\Delta}{H_d^{(1)(p)}}; \quad Y_2 = -E_{d,m}(\Delta - \Delta_0) \quad (9.10)$$

и построим кривые  $Y_1$  и  $Y_2$  на рис. 74, а. Точки  $A_1, A_2, \dots$  на этом рисунке, на которых кривая  $Y_1$  получает бесконечно большие значения, соответствуют частотам свободных колебаний исходной системы, а точки  $H_1, H_2, H_3, \dots$  пересечения кривых  $Y_1$  и  $Y_2$  соответствуют частотам свободных колебаний системы с антивибратором. Итак, присоединение к системе антивибратора существенно снизило частоты свободных колебаний системы всех форм колебаний и, следовательно, соответствующих резонансов.

Если в системе без антивибратора была опасной одноузловая форма колебаний, а резонанс имел место при частоте  $\sqrt{\Delta_{e1}} = \sqrt{\Delta_{A1}}$ , то после присоединения антивибратора этот резонанс снизился до частоты  $\sqrt{\Delta_{H1}}$  и стал не опасным. Одновременно снизилась резонансная частота двухузловой формы колебаний с частоты  $\sqrt{\Delta_{A2}}$  до частоты  $\sqrt{\Delta_{H2}}$ ; при этом амплитуды вынужденных колебаний этой формы при частоте  $\sqrt{\Delta_{H2}}$  могут отказаться выше допустимых (рис. 74, б).

Возьмем теперь другую настройку  $\sqrt{\Delta'_0}$ , большую  $\sqrt{\Delta_0}$ , и проведем на рис. 74, а прямую  $Y'_2$ , соответствующую этой новой настройке (полученной, например, уменьшением момента инерции маховика  $\vartheta_m$  при неизменной податливости соединения  $E_{d,m}$ ). При измененной настройке амплитуды вынужденных колебаний  $d$ -й массы во всем рабочем диапазоне частот ниже допустимых, так

как частоты одноузловой формы свободных колебаний, соответствующие точке  $H'_1$ , и двухузловой формы (точка  $H'_2$ ) оказались вне рабочего диапазона частот (рис. 74, б).

Рассмотрим теперь нулевые точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  кривой  $Y_1$ , при которых стойкость исходной системы на  $d$ -й массе обращается в бесконечность. Оказывается, что при этих частотах амплитуда

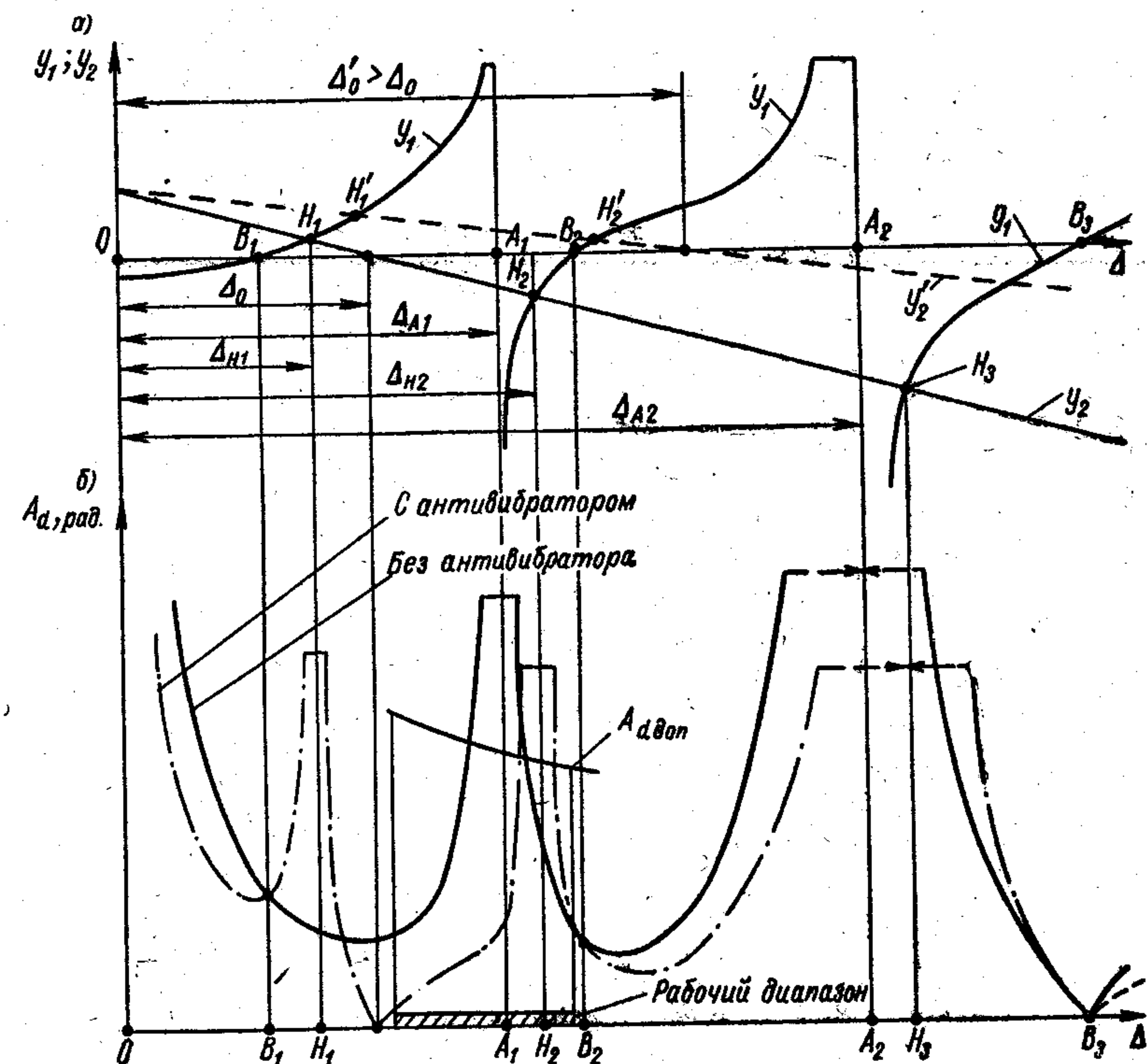


Рис. 74. К исследованию характера колебаний системы с линейным антивибратором.

вынужденных колебаний  $d$ -й массы системы с антивибратором равна амплитуде той же массы системы без антивибратора:

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} \left( 1 + \frac{\Delta}{E_{d,m}(\Delta - \Delta_0) H_d^{(1)(p)}} \right)} \right| = \frac{A_d^u}{\left| 1 + \frac{\Delta}{E_{d,m}(\Delta - \Delta_0) \infty} \right|} = A_d^u (\Delta - \Delta_B). \quad (9.11)$$



Точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  на рис. 74, а можно назвать неуправляемыми инвариантами, так как соответствующие им инвариантные амплитуды  $A_d$  не зависят от параметров антивибратора и численно равны амплитудам  $A_d^u$  исходной системы. Если эти амплитуды больше допускаемых, то уменьшить их посредством присоединения к системе антивибратора не представляется возможным. *Инвариантом* вообще называется выражение, остающееся неизменным при определенном преобразовании входящих в него переменных.

При расчете антивибратора сначала выбираем место его присоединения к системе, которое должно находиться в достаточном удалении от узловой точки той формы колебаний, на которую антивибратор настраивается. Далее вычисляем неуправляемые инвариантные амплитуды, которые должны быть ниже допускаемых.

Наконец, по рис. 74, а подбираем, как указывалось выше, настройку антивибратора  $\sqrt{\Delta_0}$  и его параметры, т. е. момент инерции маховика  $\vartheta_m$  и податливость соединения  $E_{d,m}$ .

#### § 84. Понятия о расчете нелинейного антивибратора

Нелинейный антивибратор, по сравнению с линейным, имеет больше возможностей в борьбе с опасными крутильными колебаниями, так как в нем имеется три варьируемых параметра: момент инерции маховика  $\vartheta_m$ , податливость  $E_{m,d}$  (или  $E_{m,ст}$ ) и зазор в ограничителях  $\varphi_1$ , а для антивибратора, показанного на рис. 70, кроме того, еще и величина предварительного натяжения пружин.

Теория и расчет нелинейного антивибратора весьма сложны и освещены в специальной литературе (см. [58]), поэтому ниже приводятся лишь некоторые расчетные формулы и даются краткие пояснения, необходимые для понимания существа вопроса.

Рассмотрим нелинейный антивибратор (см. рис. 71), присоединенный к системе по схеме рис. 68, а. Амплитуды вынужденных колебаний  $d$ -й массы системы с нелинейным антивибратором до того момента, пока амплитуда  $B_{m,d}$  деформации соединения не достигнет ограничителей колебаний ( $B_{m,d} < \varphi_1$ ), определяются по формуле (9.06).

Предельное значение эластического момента, при котором вступают в работу ограничители, определяется из уравнения (7.38)

$$F_{m,d} = \frac{\varphi_1}{E_{m,d}} = \left| \frac{\bar{Q}_{m,d}^{(1)(p)(m)}}{E_{m,d}^{(1)(p)(m)}} \right| = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} E_{m,d}^{(1)(p)(m)}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} \left( E_{m,d} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta} + \frac{1}{H_d^{(1)(p)}} \right)} \right| =$$

$$= \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} \left( E_{m,d} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta} \right) \left[ 1 + \frac{1}{\left( E_{m,d} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta} \right) H_d^{(1)(p)}} \right]} \right|. \quad (9.12)$$

Для определения же предельной амплитуды колебаний  $d$ -й массы перепишем уравнение (9.06) в виде

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} \left[ 1 + \frac{1}{\left( E_{m,d} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta} \right) H_d^{(1)(p)}} \right]} \right| \quad (9.13)$$

и, решив его совместно с уравнением (9.12), получим

$$A_{d(B_{m,d} = \varphi_1)} = \left| \frac{\varphi_1}{E_{m,d} \left( E_{m,d} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta} \right)} \right| =$$

$$= \frac{\varphi_1 E_{m,d}}{E_{m,d}} \left| \left( 1 - \frac{1}{\vartheta_m E_{m,d} \Delta} \right) \right| = \left| 1 - \frac{\Delta_0}{\Delta} \right| \varphi_1. \quad (9.14)$$

На участках кривых  $A_d$ , расположенных выше кривой  $A_{d(B_{m,d} = \varphi_1)}$ , амплитуды крутильных колебаний достигают ограничителей колебаний и описываются нижеследующим уравнением (приведенным здесь без вывода), [58, гл. 83]:

$$A_d^{ог} = \left| \frac{\varphi_1}{1 - \frac{H_d^{(1)(p)}}{\vartheta_m \Delta}} - \frac{A_d^u}{1 - \frac{\vartheta_m \Delta}{H_d^{(1)(p)}}} \right|. \quad (9.15)$$

Из уравнения (9.15) следует, что амплитуды вынужденных колебаний системы с нелинейным антивибратором находятся в сложной зависимости от величины зазора  $\varphi_1$ , момента инерции массы антивибратора, частоты, а также параметров исходной системы. Из этого уравнения следует, кроме того, что при частотах, обращающихся в бесконечность стойкость системы без антивибратора ( $H_d^{(1)(p)} = \pm \infty$ ), амплитуды  $A_d^{ог}$  оказываются равными амплитудам  $A_d^u$  исходной системы (т. е. системы без антивибратора):

$$A_{d(H_d^{(1)(p)} = \pm \infty)}^{ог} = A_d^u.$$

Это означает, что при данных частотах амплитуды вынужденных колебаний не зависят от параметров антивибратора, также не зависят от них и сами частоты. Поэтому, если при расчете системы окажется, что при данных частотах амплитуды  $A_d^u$  вынужденных



Свободные колебания рассмотрим для идеализированных систем (в которых нет сопротивлений) как колебания с постоянной амплитудой. В реальных системах подобные колебания могут мыслиться для коротких промежутков времени, в течение которых первоначально накопленная энергия, расходуемая на преодоление сил трения и других сопротивлений, может считаться неизменной.

Амплитуда вынужденных колебаний сохраняет свою величину постоянной при наличии трения в системе только потому, что поглощаемая им энергия непрерывно восстанавливается за счет работы возмущающих сил. Если энергия, подводимая к системе возмущающими силами, достаточно велика, амплитуды вынужденных колебаний могут быть весьма значительны, а вместе с тем могут быть большими и напряжения от крутильных колебаний в некоторых элементах системы. Под влиянием этих напряжений при длительной работе установки в материале вала могут появиться разрушения от усталости.

Вынужденные колебания в простейшем случае осуществляются с частотой наиболее сильной гармонической составляющей возмущающих моментов, которая, как было показано в § 6, изменяется пропорционально числу оборотов вала двигателя. По мере приближения частоты вынужденных колебаний к частоте свободных колебаний какой-либо формы, характер колебаний меняется. При последующем совпадении этих частот наблюдается значительное возрастание амплитуд

Рис. 6. Образование резонансов и запретных зон.

колебаний, что характеризует развитие *резонансных колебаний*, представляющих часто большую угрозу для работоспособности силовой установки.

Таким образом, *резонансом* называется совпадение частот вынужденных и свободных колебаний, или точнее, явление возрастания амплитуд колебаний при совпадении частоты какой-либо гармонической составляющей возмущающего момента с частотой какой-либо формы свободных колебаний.

Резонансные режимы легко найти наложив графики, представленные на рис. 6, а и 6, б, что выполнено на рис. 6, в. Каждое пересечение прямых на этом последнем графике определяет число оборотов двигателя, при котором наступает явление резонанса.

Например, на режиме  $n_A$  имеет место резонанс второй гармоники возмущающего момента с одноузловой формой колебаний. Аналогично определяются другие резонансы. Обороты вала двигателя, при которых наступают резонансы, называются *критическими*. Если трение в системе отсутствует, то, как показано в курсах теоретической механики, например [66, стр. 55], амплитуды колебаний масс системы возрастают до бесконечности.

При пуске двигателя и увеличении числа оборотов вала до номинальных установка последовательно проходит через все свойственные ей критические обороты. Однако, как правило, только некоторые из них представляют опасность для длительной работы установки. Амплитуды, а следовательно, и напряжения при остальных критических оборотах обычно не столь значительны и при работе установки часто не ощущаются.

При прохождении через резонанс (при чрезвычайно медленном увеличении числа оборотов двигателя) амплитуды крутильных колебаний растут вначале медленно, а затем быстро. Вблизи резонанса они достигают максимальной величины. При дальнейшем увеличении числа оборотов они быстро уменьшаются.

Это явление наглядно представляется с помощью графика, называемого *кривой резонанса* (рис. 6, г).

Так как напряжения в валах системы пропорциональны амплитудам, то на оси ординат можно отложить оба этих параметра в соответствующих масштабах. По оси абсцисс отложим числа оборотов вала двигателя.

При таком построении кривой резонанса на оси ординат можно нанести также величину допускаемого напряжения, установленного из соображений усталостной прочности материала, из которого выполнен вал, или на основании существующего опыта. Если горизонтальная линия, изображающая здесь допускаемое напряжение, не пересекает кривой резонанса ( $n_B$  и  $n_C$ ), то это значит, что резонансные напряжения особой опасности не представляют, в противном случае ( $n_A$ ) прямая отсекает на кривой участок, который характеризуется наличием чрезмерно больших напряжений (диапазон  $n_1 - n_2$ ). Этот диапазон называется *запретной зоной*. Длительная работа установки в пределах запретной зоны не допускается. Для того чтобы технический персонал имел возможность избегать работы установки в этой зоне, часть шкалы тахометра двигателя, соответствующая запретной зоне, закрашивается красной краской. Закрашивание шкалы тахометра имеет также то значение, что при изменении режима работы установки, т. е. при увеличении или уменьшении числа оборотов двигателя, механик (в соответствии с инструкцией) производит маневр перехода через запретную зону в кратчайшее время для того, чтобы не дать возможности амплитудам возрасти до значительной величины (см. Приложение XII).



колебаний системы без антивибратора выше допустимых, то понизить их антивибратором нельзя и необходимо избрать другое средство борьбы с опасными колебаниями или изменить место установки антивибратора.

При расчете нелинейного антивибратора определяются по выше приведенным формулам такие величины зазора  $\varphi_1$  в ограничителях и момента инерции маятника антивибратора  $\vartheta_m$ , которые обеспечили бы амплитуды  $A_d^{or}$  колебаний  $d$ -й массы системы меньшими допустимых.

На рис. 75 представлены кривые  $A_d$  и  $A_d^{or}$  развития амплитуд колебаний  $d$ -й массы до и после вступления в работу ограничителей.

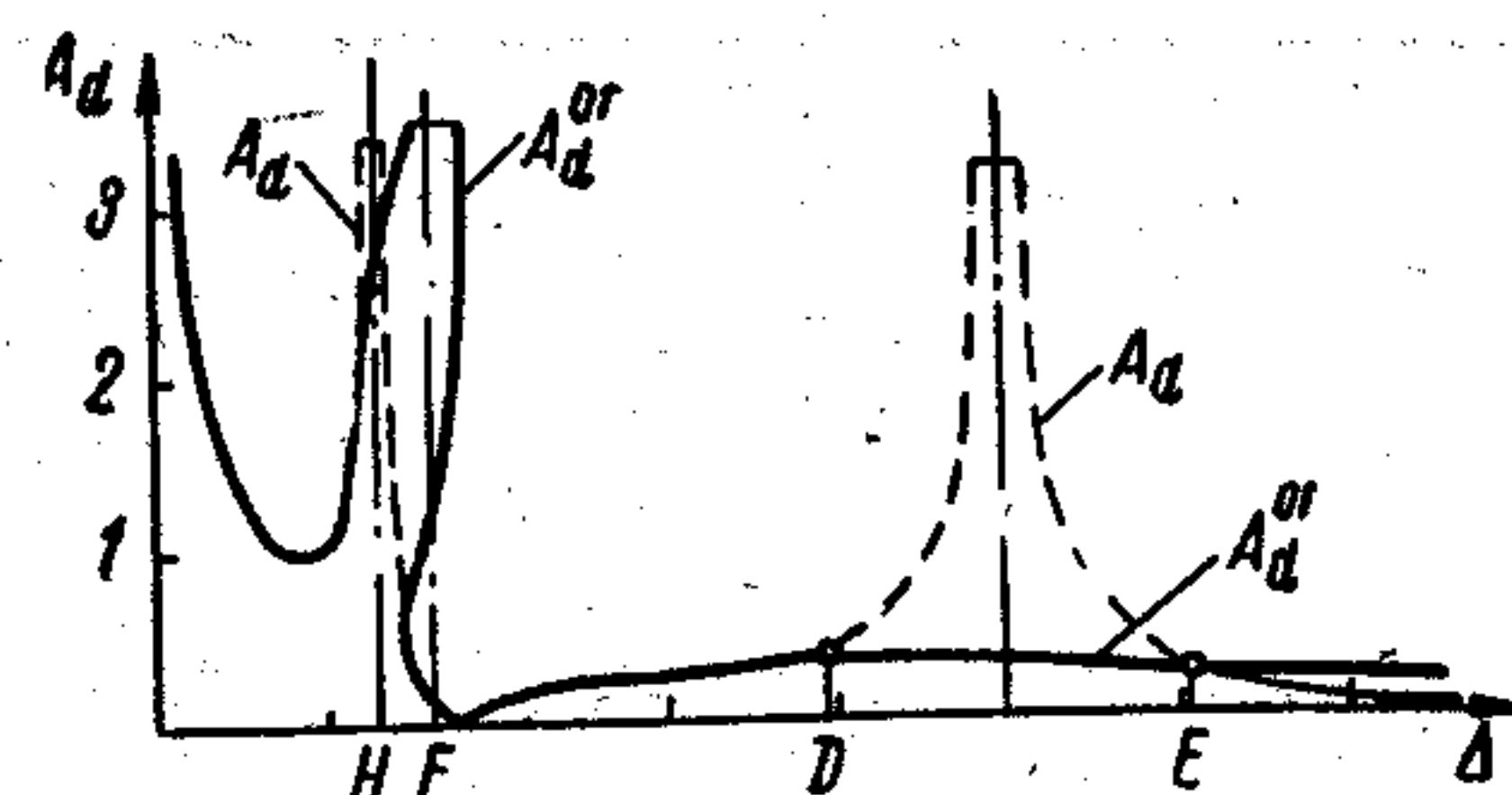


Рис. 75. Влияние ограничителей на развитие вынужденных колебаний.

Таким образом, в диапазоне частот между точками  $D$  и  $E$  ограничители освобождают систему от опасного развития колебаний двухузловой формы, но в то же время они повышают частоту свободных колебаний одноузловой формы от точки  $H$  до точки  $F$ . Отсюда следует, что если оказывается опасной, например, двухузловая форма колебаний, то установкой нелинейного антивибратора, при соответствующем выборе по вышеприведенным формулам зазора в ограничителях, можно существенно снизить опасные колебания.

### § 85. Эквивалентные параметры маятникового антивибратора

При теоретических исследованиях и расчетах маятниковый антивибратор заменяется эквивалентными параметрами, которые, как доказывается в теории колебаний [15, стр. 195], полностью характеризуют эффект от включения антивибратора в систему. Используем эквивалентные параметры, введенные В. П. Терских, при помощи которых маятниковый антивибратор заменяется двумя эквивалентными массами, связанными эквивалентным соединением (см. рис. 76). Эквивалентные моменты инерции масс ступицы ( $\vartheta_{ст}^*$ ) и маятников ( $\vartheta_m^*$ ) и податливость эквивалентного соединения ( $E_{м, ст}^*$ ) при малых углах качания маятников ( $B_{м, ст} < 0,1 \div 0,2$  рад.) определяются по формулам (приведенным здесь без вывода):

$$\vartheta_{ст}^* = \vartheta_{ст} + z\vartheta_m; \quad (9.16)$$

$$\vartheta_m^* = \frac{1}{\theta_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 zM(r_1 + r_2)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \vartheta_m^{эж}; \quad (9.17)$$

$$E_{м, ст}^* = \frac{\nu^2}{\left(\nu_H + \frac{1}{\nu_H}\right)^2 \vartheta_m^{эж} \Delta}, \quad (9.18)$$

где обозначено (рис. 72):

$\nu$  — порядок возмущающего момента;  
 $\nu_H = \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{D - d}}$  — абсолютная настройка антивибратора;  
 $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от прямых, соединяющих центры отверстий в ступице и маятниках, до оси вала и до центра тяжести маятников;

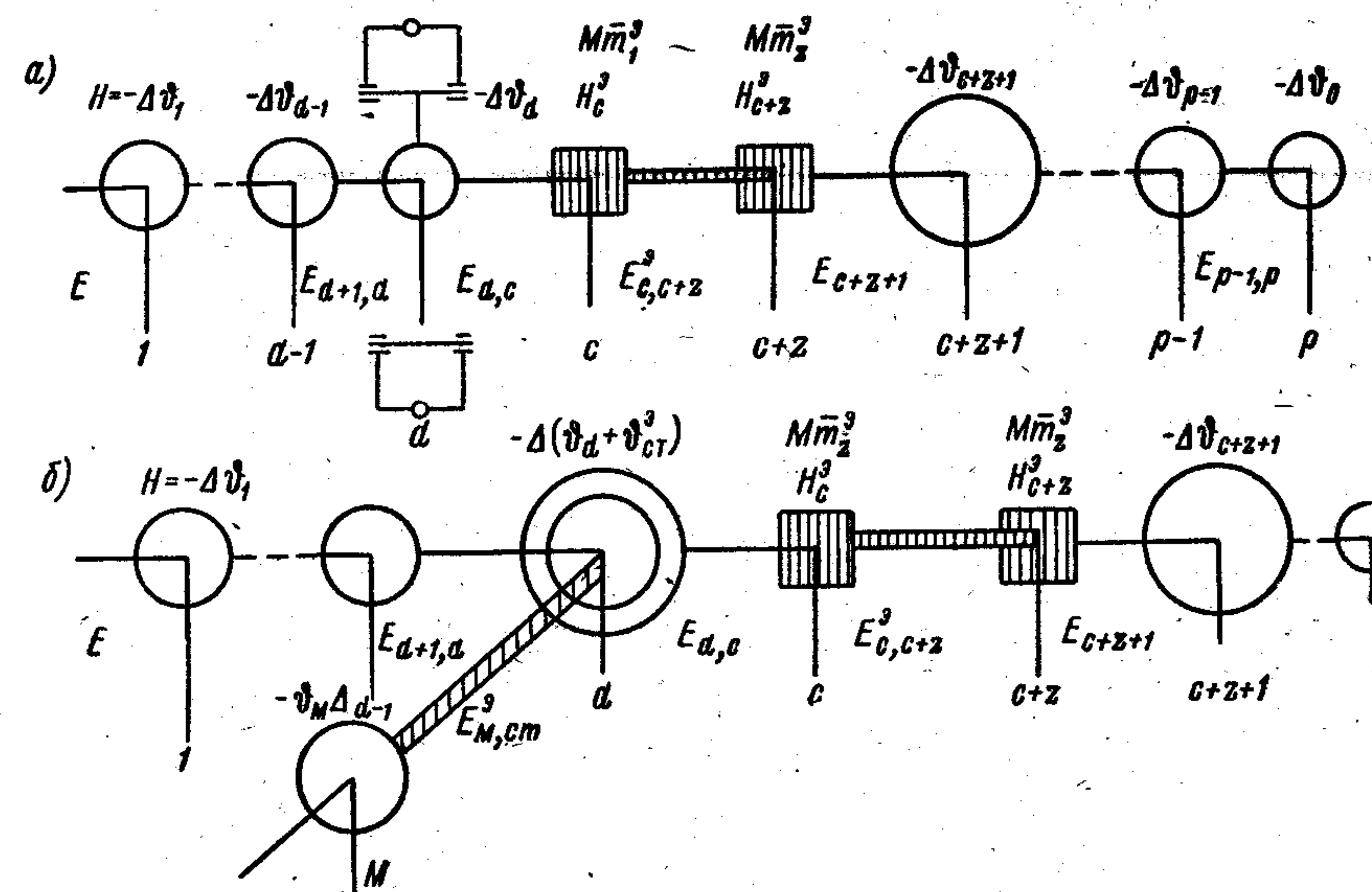


Рис. 76. Схема системы с маятниковым антивибратором (а) и эквивалентная замена его двумя упруго соединенными массами (б).

$D$  и  $d$  — диаметры отверстий в ступице и маятнике и диаметр пальцев;

$\vartheta_{ст}$  и  $\vartheta_m$  — моменты инерции ступицы и маятника относительно осей, проходящих через их центры тяжести;

$\vartheta_m^{эж} = \frac{z}{\theta_0} M(r_1 + r_2)^2$  — эквивалентный момент инерции всех маятников в предположении их жесткой связи со ступицей ( $D = d$ );

$z$  и  $M$  — число маятников и масса каждого из них;

$\theta_0$  — постоянная перехода от абсолютной системы к безразмерной.



## § 86. Теоретическое исследование и расчет маятникового антивибратора

Рассмотрим систему на рис. 76, а, б, в которой ступица маятникового антивибратора присоединена непосредственно к ее  $d$ -й массе. Сравнивая схемы на рис. 68, и 76, б, видим, что они аналогичны, но на рис. 76, б элементы  $\vartheta_d + \vartheta_{ст}$ ,  $E_{м, d}$  и  $\vartheta_m$  — эквивалентные. При исследовании системы с маятниковым антивибратором можно воспользоваться приведенными выше формулами (9.06) — (9.11), относящимися к обычному антивибратору, если в них указанные выше элементы заменить эквивалентными:  $\vartheta_d + \vartheta_{ст}^*$ ,  $E_{м, d}^*$  и  $\vartheta_m^*$ .

Амплитуда вынужденных колебаний  $d$ -й массы системы с маятниковым антивибратором при малых колебаниях маятников и без учета трения (в системе и антивибраторе) определяется по формуле, аналогичной (9.06):

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) + \frac{1}{E_{м, d}^* + \frac{1}{-\vartheta_m^* \Delta}}} \right|. \quad (9.19)$$

После подстановки в данную формулу значений  $E_{м, d}^*$  и  $\vartheta_m^*$  по (9.17) и (9.18), она преобразуется к виду:

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) \left( 1 - \frac{\vartheta_m^{*ж} \Delta}{H_d^{(1)}(p) \cdot \frac{\nu_n^2 - \nu^2}{\left( \nu_n + \frac{1}{\nu_n} \right)^2}} \right)} \right| = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) \left( 1 - \frac{Y_1}{Y_2} \right)} \right|, \quad (9.20)$$

где обозначено:

$$Y_1 = \frac{\vartheta_m^{*ж} \Delta}{H_d^{(1)}(p)} \quad \text{и} \quad Y_2 = \frac{\nu_n^2 - \nu^2}{\left( \nu_n + \frac{1}{\nu_n} \right)^2}. \quad (9.21)$$

Из формулы (9.20) следует, что при настройке антивибратора, равной порядку колебаний ( $\nu_n = \nu$ ), амплитуда вынужденных колебаний  $d$ -й массы становится равной нулю при любых числах оборотов (так как при этом по (9.21) —  $Y_2 = 0$ ):

$$A_d = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) \left( 1 + \frac{Y_1}{0} \right)} \right| = 0.$$

Это свойство маятникового антивибратора — гасить колебания только данного порядка (независимо от частоты и формы) является его характерной особенностью по сравнению с обычным антивибратором.

Частота свободных колебаний системы с маятниковым антивибратором определяется из уравнения, получаемого приравнением нулю знаменателя формул (9.20),

$$H_d^{(1)}(p) - \frac{\vartheta_m^{*ж} \Delta}{\frac{\nu_n^2 - \nu^2}{\left( \nu_n + \frac{1}{\nu_n} \right)^2}} = 0,$$

откуда

$$\frac{\vartheta_m^{*ж} \Delta}{H_d^{(1)}(p)} = \frac{\nu_n^2 - \nu^2}{\left( \nu_n + \frac{1}{\nu_n} \right)^2}.$$

Используя обозначения по (9.21), уравнение свободных колебаний может быть представлено в виде

$$Y_1 = Y_2, \quad (9.22)$$

исследование которого проведем при помощи графических построений (рис. 77).

Частоты свободных колебаний системы с маятниковым антивибратором по уравнению (9.20) могут быть определены на графиках рис. 77, а как точки пересечения кривой  $Y_1$  с горизонтальной прямой  $Y_2$ . В случае жесткой связи маятников со ступицей (т. е. при  $D = d$ ) эквивалентная податливость  $E_{м, d}^* = 0$  и формула (9.19) преобразуется к виду

$$A_d^{ж} = \left| \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) - \vartheta_m^{*ж} \Delta} \right|. \quad (9.23)$$

Частоту свободных колебаний системы в этом случае находят из уравнения

$$H_d^{(1)}(p) - \vartheta_m^{*ж} \Delta = 0, \quad (9.24)$$

а по графикам рис. 77, а как точки пересечения кривой  $Y_1$  с горизонталью, проведенной от оси абсцисс на расстоянии, равном единице, так как из (9.24) следует

$$Y_1 = \frac{\vartheta_m^{*ж} \Delta}{H_d^{(1)}(p)} = 1.$$

Точки  $A_1, A_2, \dots$ , соответствующие асимптотам кривой  $Y_1$  на рис. 77, а, являются квадратами частот свободных колебаний си-



Figure 1 consists of two parts, (a) and (b). Part (a) is a phase portrait in the  $y_1, y_2$  plane. It shows several trajectories starting from a point  $D_2$  and ending at points  $F_1, F_2, H_1, H_2, H_3$ . The trajectories are labeled with  $H_1^H, H_2^H, H_3^H$  and  $y_1, y_2$ . The horizontal axis is labeled  $y_1$  and the vertical axis is labeled  $y_2$ . The trajectories are shown for different values of  $\nu_H$ :  $\nu_H = \infty$ ,  $\nu_H > \nu$ ,  $\nu_H = \nu$ ,  $\nu_H < \nu$ , and  $\nu_H = \nu_{Hmin} = (1.5 \div 2)$ . Part (b) is a graph of the control variable  $A_d$  versus time  $t$ . It shows the optimal control program with solid and dashed lines. The control variable  $A_d$  is shown as a function of time  $t$ , with the optimal control program being a solid line and the control program for  $\nu_H = \nu$  being a dashed line. The graph shows several peaks and valleys, with the control variable  $A_d$  being zero at points  $H_1^I, F_1, A_1, H_2^I, F_2, A_2, B_3$ . The control variable  $A_d$  is also shown as a function of time  $t$ , with the optimal control program being a solid line and the control program for  $\nu_H = \nu$  being a dashed line.

при помощи графических построений такого вида выбрать настройку такой, чтобы частоты свободных колебаний системы (а следовательно, и резонансы) располагались вне рабочего диапазона. Примерный характер зависимости от частоты амплитуд вынужденных колебаний в системе с маятниковым антивибратором представлен на рис. 77, б.

238

Graph showing the dynamic stiffness  $d$  (cm) versus the rotational speed  $n$  (ob/min) for an anti-vibrator. The curves represent different values of the parameter  $\nu$  (2, 2.5, 4). A horizontal line at  $d = 5.7$  is labeled "Выбранная настройка антивибратора".

настройки, сильно отличающихся от данного  $\nu$ , эти ветви идут очень круто. На графиках рис. 78 видно, что изменение настройки в диапазоне  $\nu_n = 4 \div 5$  существенно снижает частоты свободных колебаний системы и соответствующие резонансы от возмущающих моментов 4-го порядка (пологий участок кривой) и почти не влияет на резонансы, соответствующие порядку колебаний  $\nu = 2,5$ . Отмеченное здесь оказывается очень важным свойством маятникового антивибратора — снижать частоты колебаний только данного порядка, и поэтому можно не опасаться, что в рабочий диапазон переместятся резонансы от возмущающих моментов других порядков, находящиеся в системе без антивибратора выше этого диапазона.

$$\vartheta_{M \max}^{\text{ЭЖ}} = 2M \frac{(r_1 + r_2)^2}{\theta_0}.$$



Далее отбираем по данным расчета порядки  $\nu = \nu_1; = \nu_2; \dots$  возмущающих моментов, резонансы от которых в системе без антивибратора оказываются опасными, и для каждого из них вычисляем амплитуду  $B$  качания маятников [см. 58, гл. 83]:

$$B \approx 91 \frac{\nu^2}{1 + \nu^2} \cdot \frac{M_d^{(1)(p)}}{\theta_0 e_0 \vartheta_m^{\text{ж}} | \max | n^2},$$

которая по имеющимся опытным данным не должна превышать  $(0,5 \div 1,2)$  радиана. Наконец, определяем настройку  $\nu_n$  антивибратора, используя графические построения, аналогичные представленным на рис. 77 и 78.

Настройка  $\nu_n$  должна быть по величине близкой к порядку колебаний. При этом не следует обязательно добиваться «острой настройки», при которой  $\nu_n = \nu$ . Важно лишь обеспечить, чтобы резонансы от возбудителей других порядков не попали в область рабочих чисел оборотов, так как в этом случае снизится эффективность введения в систему антивибратора.

После окончательного определения всех параметров антивибратора вычисляем новые резонансные напряжения и границы запретных зон чисел оборотов для системы с антивибратором.

При больших углах качания маятника ( $B > 0,1 \div 0,2$  радиана) система с маятниковым антивибратором становится нелинейной, что вносит ряд особенностей в методику расчета. Здесь этот вопрос не рассматривается.

## § 87. Теоретическое исследование силиконового демпфера

Рассмотрим многомассовую систему (см. рис. 68, б) с присоединенным к ее массе через упругую связь силиконовым демпфером. Возбуждение системы приложено только к массам двигателя. Трение в системе принимаем пренебрежимо малым по сравнению с трением в демпфере.

В данном демпфере имеется четыре параметра, определяющих его эффективность:

- податливость упругого крепления ступицы демпфера —  $E_{ст, d}$ ;
- момент инерции ступицы —  $\vartheta_{ст}$ ;
- момент инерции маховика —  $\vartheta_m$ ;
- трение демпфирующей (силиконовой) жидкости, заполняющей зазор между маховиком и ступицей (корпусом) антивибратора.

В некоторых случаях дополнительным параметром, определяющим эффективность демпфера, может быть зазор или ограничитель деформации в упругом креплении ступицы демпфера к массе системы.

Амплитуда вынужденных колебаний  $d$ -й массы системы с демпфером определяется по формуле аналогичной (7.47) и (9.06),

$$\bar{A}_d = \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{\bar{H}_d^{(1)(p)}} = \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} + \frac{1}{E_{d, ст} + \frac{1}{-\vartheta_{ст}\Delta + \frac{1}{\bar{E}_{ст, м} + \frac{1}{-\vartheta_m\Delta}}}}}, \quad (9.25)$$

где  $\bar{E}_{ст, м} = iE_{ст, м}^\Phi$  — комплексная податливость соединения в демпфере, которую определяем из условия, что  $\vartheta_{ст}$  и  $\vartheta_m$  связаны между собой только жидкостным трением;

$E_{ст, м}^\Phi$  — параметр трения (9.38).

Формуле (9.25), после некоторых преобразований и перехода к модулям, можно придать вид, более удобный для исследования влияния параметров демпфера,

$$A_d = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0^{II}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0^I}\right)^2 \frac{1}{(\bar{E}_{ст, м}^\Phi \vartheta_m \Delta)^2}}{\left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0^{II}}\right)^2 \frac{1}{(A_d^0)^2} + \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0^I}\right)^2 \frac{1}{(A_d^{\text{ж}})^2 (E_{ст, м}^\Phi \vartheta_m \Delta)^2}}}, \quad (9.26)$$

где  $\Delta_0^I$  и  $\Delta_0^{II}$  — величины, квадратные корни из которых условимся называть настройками демпфера.

$$\Delta_0^I = \frac{1}{(\vartheta_{ст} + \vartheta_m) E_{ст, d}}; \quad \Delta_0^{II} = \frac{1}{\vartheta_{ст} E_{ст, d}}; \quad (9.27)$$

$A_d^0$  и  $A_d^{\text{ж}}$  — амплитуды колебаний  $d$ -й массы системы при отсутствии маховой массы (трение в демпфере равно нулю) и при жесткой связи его со ступицей (трение в демпфере равно бесконечности):

$$\bar{A}_d^0 = \frac{\bar{M}_d^{(1)(p)}}{H_d^{(1)(p)} + \frac{1}{E_{d, ст} + \frac{1}{-\vartheta_{ст}\Delta}}} = \dots$$

$$\dots = \frac{\bar{A}_d^{\text{ж}}}{1 + \frac{\Delta}{E_{d, ст} (\Delta - \Delta_0^{II}) H_d^{(1)(p)}}}; \quad (9.28)$$



$$\bar{A}_d^* = \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p) + \frac{1}{E_{d, \text{ст}} + \frac{1}{-(\vartheta_{\text{ст}} + \vartheta_m) \Delta}}} = \dots$$

$$\dots = \frac{\bar{A}_d^n}{1 + \frac{\Delta}{E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I) H_d^{(1)}(p)}}; \quad (9.29)$$

$\bar{A}_d^n$  — амплитуда колебаний  $d$ -й массы исходной системы (без демпфера)

$$\bar{A}_d^n = \frac{\bar{M}_d^{(1)}(p)}{H_d^{(1)}(p)}. \quad (9.30)$$

Из формулы (9.26) следует, что зависимость амплитуды  $A_d$  от параметра трения  $E_{\text{ст}, m}^\Phi$  исчезает при так называемых инвариантных частотах  $\sqrt{\Delta_{I \text{ инв}}}$  и  $\sqrt{\Delta_{II \text{ инв}}}$ , когда справедливо равенство

$$\bar{A}_d^0 = \pm \bar{A}_d^*.$$

Это означает, что при любом трении в демпфере все кривые амплитуд  $A_d$  будут проходить через одни и те же инвариантные точки. Инвариантные частоты находим, приравняв правые части формул (9.28) и (9.29)

$$\frac{\bar{A}_d^n}{1 + \frac{\Delta}{E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^{II}) H_d^{(1)}(p)}} = \frac{\bar{A}_d^*}{1 + \frac{\Delta}{E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I) H_d^{(1)}(p)}}. \quad (9.31)$$

При знаке плюс в правой части это уравнение удовлетворяется только при частоте  $\sqrt{\Delta_I}$ , когда стойкость системы  $H_d^{(1)}(p)$  принимает бесконечно большое значение

$$H_d^{(1)}(p) = \infty. \quad (9.32)$$

Инвариантные частоты  $\sqrt{\Delta_{I \text{ инв}}}$ , определяемые уравнением (9.32), не зависят ни от одного параметра демпфера  $E_{d, \text{ст}}$ ,  $\vartheta_{\text{ст}}$  и  $\vartheta_m$ , а определяются только элементами системы и местом его присоединения. Также не зависят от них и соответствующие этим частотам инвариантные амплитуды  $A_{d \text{ I инв}}$

$$A_{d \text{ I инв}} = \begin{cases} \left| \frac{\bar{M}_{d-1}^{(1)}}{H_{d-1}^{(1)}} \right| & \text{— если при } \Delta = \Delta_{I \text{ инв}} \dots E_{d-1, d}^{(1)} = 0, \\ \left| \frac{M_{d+1}^{(p)}}{H_{d+1}^{(p)}} \right| & \text{— если при } \Delta = \Delta_{I \text{ инв}} \dots E_{d, d+1}^{(p)} = 0. \end{cases} \quad (9.33)$$

Эти инвариантные частоты и амплитуды можно назвать *неуправляемыми*, так как на их величины нельзя повлиять изменением параметров демпфера.

При знаке минус в правой части уравнения (9.31) получаем уравнение для определения инвариантных частот  $\sqrt{\Delta_{II \text{ инв}}}$

$$\frac{\Delta}{H_d^{(1)}(p)} = \frac{-E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I)(\Delta - \Delta_0^{II})}{\Delta - \frac{\Delta_0^I + \Delta_0^{II}}{2}}. \quad (9.34)$$

Инвариантные частоты, определяемые уравнением (9.34), зависят как от податливости  $E_{d, \text{ст}}$ , так и от моментов инерции  $\vartheta_{\text{ст}}$  и  $\vartheta_m$ , неявно входящих в это уравнение через настройки  $\sqrt{\Delta_0^I}$  и  $\sqrt{\Delta_0^{II}}$ . Зависят от них и соответствующие им инвариантные амплитуды. Инвариантные частоты  $\sqrt{\Delta_{II \text{ инв}}}$ , определяемые уравнением (9.34), и соответствующие им инвариантные амплитуды назовем *управляемыми*, поскольку на их величины можно влиять соответствующим изменением параметров демпфера.

Выражения, определяющие инвариантные амплитуды, могут быть получены непосредственно из формул (9.28) или (9.29) после подстановки в них значения инвариантной частоты из уравнения (9.34):

$$\bar{A}_{d \text{ II инв}} = \left( 2 + \frac{\vartheta_m}{\vartheta_{\text{ст}}} - \frac{2\Delta_{II \text{ инв}}}{\Delta_0^I} \right) \frac{\vartheta_{\text{ст}}}{\vartheta_m} (\bar{A}_d^n)_{\Delta = \Delta_{II \text{ инв}}}. \quad (9.35)$$

Для определения инвариантных частот воспользуемся графическим изображением на рис. 79, а левой и правой частей уравнения (9.34) в виде кривых

$$y_1 = \frac{\Delta}{H_d^{(1)}(p)} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{-E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I)(\Delta - \Delta_0^{II})}{\Delta - 0,5(\Delta_0^I + \Delta_0^{II})}.$$

Нулевые точки  $B_1, B_2 \dots$  кривой  $y_1$  определяют неуправляемые, а точки  $C_1, C_2 \dots$  (пересечения кривых  $y_1$  и  $y_2$ ) — управляемые частоты.

Если приравнять нулю знаменатели формул (9.28) и (9.29), получим уравнения, определяющие частоты свободных колебаний системы:

при отсутствии трения в демпфере

$$\frac{\Delta}{H_d^{(1)}(p)} = -E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I) = y_3$$

и при бесконечно большом трении в ней

$$\frac{\Delta}{H_d^{(1)}(p)} = -E_{d, \text{ст}}(\Delta - \Delta_0^I) = y_4.$$



Эти частоты определяются на рис. 79, а как точки пересечения кривой  $y_1$  с прямыми  $y_3$  (точки Н) и  $y_4$  (точки F). При данных частотах амплитуды  $A_d^0$  и  $A_d^*$  будут принимать бесконечно большие значения.

При увеличении трения в демпфере от нуля до бесконечно большого (рис. 79, б) происходит перемещение максимума кривой  $A_d$

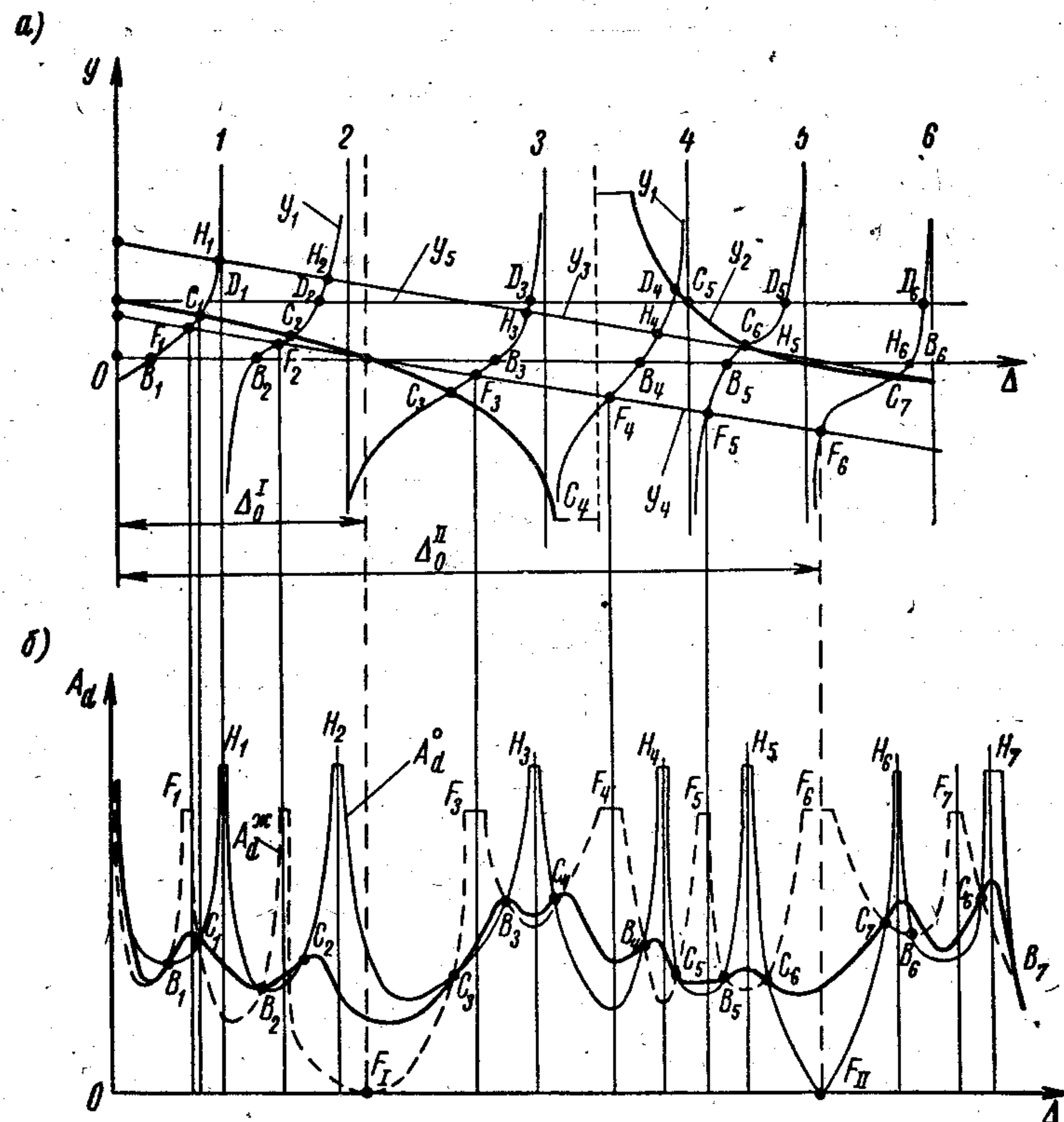


Рис. 79. К исследованию системы с силиконовым демпфером: а — графическое определение инвариантных частот и асимптот; кривых  $A_d$ ,  $A_d^*$ ,  $A_d^0$  (б).

с частот, соответствующих частотам свободных колебаний системы без маховой массы демпфера (когда этот максимум достигает величины  $A_d = A_d^0 = \infty$ ), на частоты, численно равные частотам свободных колебаний той же системы, но при жесткой связи маховой массы со ступицей (в этом случае величина максимума амплитуды снова достигает бесконечности  $A_d = A_d^* = \infty$ ). При всех промежуточных значениях параметра трения  $E_{ст, м}^{\Phi}$  амплитуда  $A_d$  конечна, а максимальное значение ее вначале уменьшается, а затем возрас-

тает, причем наименьшее значение максимума будет при инвариантных частотах. При расчете демпфера необходимо так подобрать параметр трения, чтобы максимум кривой для рассчитываемой формы колебаний приходился на управляемые инвариантные частоты.

Для анализа влияния демпфера на колебания системы при жестком креплении его к  $d$ -й массе используем полученные выше выражения (9.34) и (9.35), положив в них  $E_{d, ст} = 0$ . В результате получим, что неуправляемые инвариантные частоты и в данном случае определяются по уравнению (9.32). Управляемые же инвариантные частоты могут быть найдены из уравнения

$$\frac{\Delta}{H_d^{(1)}(\nu)} = \frac{1}{\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m}, \quad (9.36)$$

а соответствующие этим частотам амплитуды — из уравнения

$$\bar{A}_{d инв} = \frac{2\vartheta_{ст} + \vartheta_m}{\vartheta_m} \bar{A}_d^n. \quad (9.37)$$

Частоты по уравнению (9.36) определяются на графиках рис. 79, а точками  $D_1, D_2$  пересечения кривой  $y_1$  с прямой  $y_5$

$$y_5 = \frac{1}{\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m}.$$

По графикам на рис. 79, а можно проследить влияние демпфера на частоты свободных колебаний многомассовой системы. Без демпфера эти частоты соответствуют асимптотам кривых  $y_1$ . В системе с оптимальным демпфером частоты свободных колебаний снижаются до точек  $D_1, D_2, \dots$  — при жестком креплении демпфера и до точек  $C_1, C_2, \dots$  — при упругом креплении его к массе системы. Нетрудно заметить, что точки  $C_1, C_2, \dots$  располагаются при более низких частотах, чем точки  $D_1, D_2, \dots$ , поэтому при упругом креплении один и тот же демпфер способен снизить амплитуду  $A_d$  на большую величину. Это является существенным преимуществом упругого крепления демпфера по сравнению с жестким.

## § 88. Расчет силиконового демпфера

При расчете силиконового демпфера сначала устанавливаем (как и при расчете антивибратора) место его установки. Пусть это будет масса с номером  $d$ , обладающая большими амплитудами при данной форме колебаний. Для этой массы находим амплитуды  $A_d^n$  вынужденных колебаний исходной системы по формуле (9.30), а также допускаемые амплитуды и выбираем вид крепления демпфера к намеченной массе (упругое или жесткое).

В случае упругого крепления демпфера расчет производим в следующем порядке. По конструктивным соображениям и на основа-



нии опыта расчетов аналогичных систем задаемся несколькими значениями момента инерции ступицы, маховой массы и податливости упругого крепления и, следовательно, несколькими настройками демпфера  $\sqrt{\Delta_0^I}$  и  $\sqrt{\Delta_0^{II}}$ . Далее строим кривую  $y_1$  и определяем неуправляемые инвариантные частоты и амплитуды по формулам (9.32) и (9.33). Если эти амплитуды оказываются выше допускаемых, то изменяем место установки демпфера или параметры системы.

По выбранным выше настройкам демпфера строим кривые  $y_2$  и определяем управляемые инвариантные частоты, а по формулам (9.35) — инвариантные амплитуды, и выбираем такие настройки, при которых эти амплитуды ниже или равны допускаемым. Одновременно обращаем внимание на то, чтобы резонансы высших форм колебаний не переместились в рабочий диапазон чисел оборотов.

При жестком креплении демпфера определяем неуправляемые инвариантные частоты и амплитуды так же, как и в предыдущем случае, по формулам (9.32) и (9.33). Далее строим (рис. 80, б) график зависимости от частоты амплитуд  $A_d^n$  вынужденных колебаний исходной системы (без демпфера) и на нем — график допускаемых амплитуд. На рис. 80, а строим кривую

$$\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m = \frac{H_d^{(1)}(\rho)}{\Delta},$$

на которую сносим точку С пересечения кривых  $A_d^n$  и  $A_{д. доп.}$ . На оси ординат рис. 80, а получаем минимальное значение величины  $\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m$ , при которой амплитуды  $A_d$  равны допускаемым амплитудам  $A_{д. доп.}$ . Принимать рекомендуется несколько большее значение суммарных моментов инерции  $(\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m)$ , чтобы амплитуды вынужденных колебаний системы с демпфером были меньше допускаемых (точка  $C_1$ ). В действительности амплитуды  $A_d$  будут ниже точки  $C_1$ , так как при оптимальном демпфере резонанс исходной системы переместится на частоту, соответствующую этой инвариантной точке, и будет сказываться трение в системе, не учтенное при подборе параметров демпфера. Зная величину  $\vartheta_{ст} + 0,5\vartheta_m$ , из конструктивных соображений определяем моменты инерции маховой массы демпфера  $\vartheta_m$  и его ступицы  $\vartheta_{ст}$ .

После определения параметров демпфера выполняем поверочный расчет с учетом трения в системе и вычисляем параметр трения  $E_{ст. м.}$ , величина которого должна обеспечивать перемещение на инвариантную частоту максимума кривой  $A_d$  с резонансной частоты при отсутствии маховой массы демпфера (в случае упругого крепления) или при отсутствии маховика и ступицы демпфера (при жестком креплении). Чтобы удовлетворить этому условию, вычисляем параметр трения  $E_{ст. м.}$  по ниже приведенным формулам, которые даем без вывода [58].

При упругом креплении демпфера

$$E_{ст. м.} = \frac{1 - \frac{\Delta_{инв}}{\Delta_0^I}}{\vartheta_m \Delta_{инв} \left(1 - \frac{\Delta_{инв}}{\Delta_0^{II}}\right)} \sqrt{\frac{(A_d^ж)'_{\Delta=\Delta_{инв}}}{(A_d^0)'_{\Delta=\Delta_{инв}}}}, \quad (9.38)$$

и при жестком креплении

$$E_{ст. м.} = \frac{1}{\vartheta_m \Delta_{инв}} \sqrt{\frac{(A_d^ж)'_{\Delta=\Delta_{инв}}}{(A_d^0)'_{\Delta=\Delta_{инв}}}}, \quad (9.39)$$

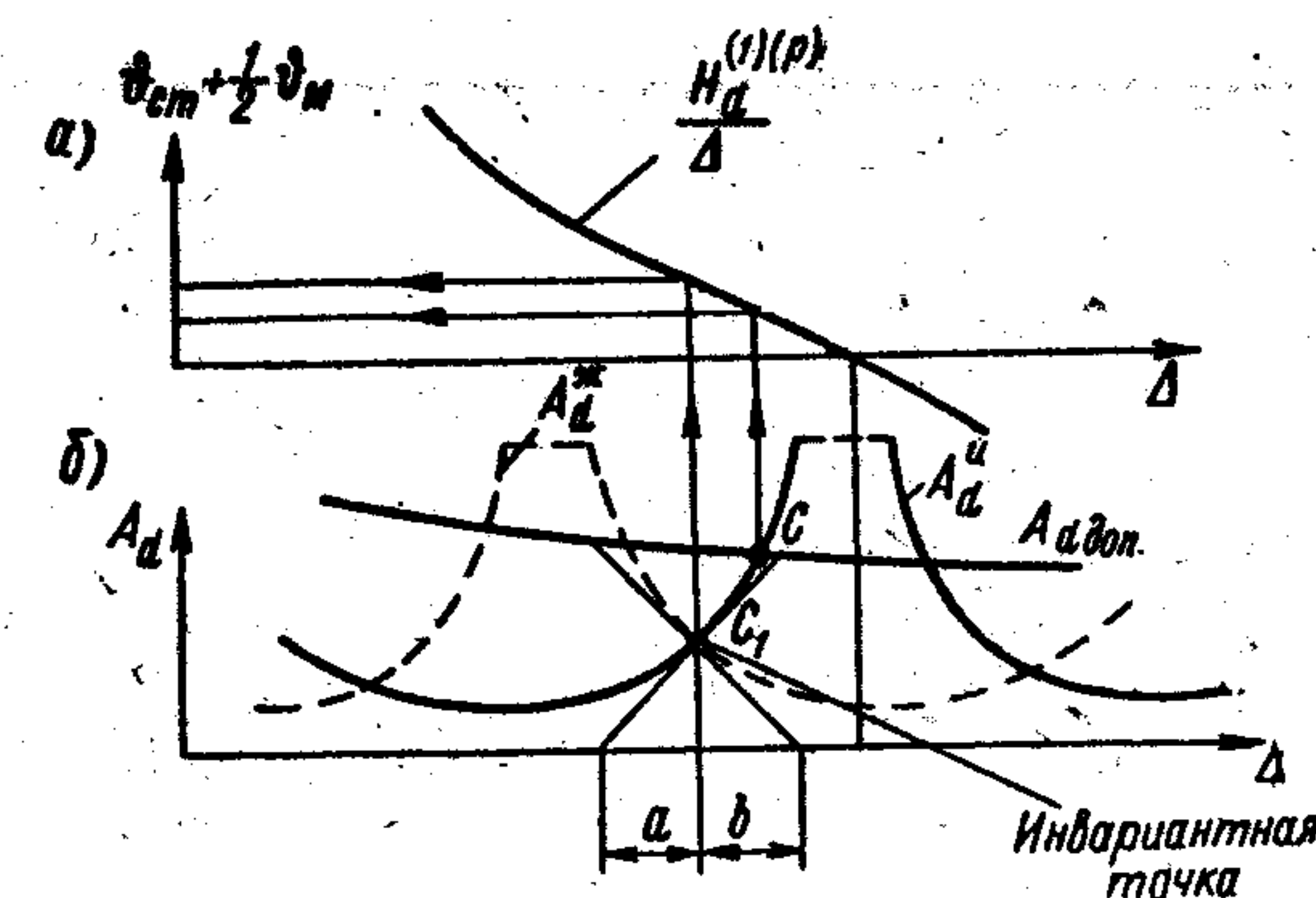


Рис. 80. К выбору момента инерции при жестком креплении демпфера к системе.

где  $(A_d^ж)'_{\Delta=\Delta_{инв}}$  и  $(A_d^0)'_{\Delta=\Delta_{инв}}$  — производные от амплитуды по частоте.

Подкоренное выражение в формулах (9.38) и (9.39) определяем по рис. 80, б как отношение отрезков, отсекаемых на оси абсцисс касательными к кривым  $A_d^ж$  и  $A_d^0$  в инвариантной точке

$$\frac{(A_d^ж)'_{\Delta=\Delta_{инв}}}{(A_d^0)'_{\Delta=\Delta_{инв}}} = \frac{a}{b}.$$

## § 89. Выбор силиконовой жидкости

Величина силы трения  $P$ , возникающей при относительной скорости  $v$  смещения двух поверхностей с площадями  $S$  см<sup>2</sup> каждая и разделенной зазором  $h$ , определяется формулой

$$P = v \frac{\gamma}{g} \frac{Sv}{h} \kappa \Gamma,$$



где  $\gamma = (0,97 \div 1,1) \cdot 10^{-3} \text{ кг см}^{-3}$  — удельный вес жидкости;  
 $g = 981 \text{ см сек}^{-2}$  — ускорение силы тяжести;  
 $\nu \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости в стоксах.

Многочисленные исследования силиконовой жидкости показывают, что она обладает нелинейным трением, так как вязкость ее уменьшается с увеличением скорости сдвига  $D = v/h$ . По графикам зависимости вязкости от скорости сдвига, взятым из работы [73],

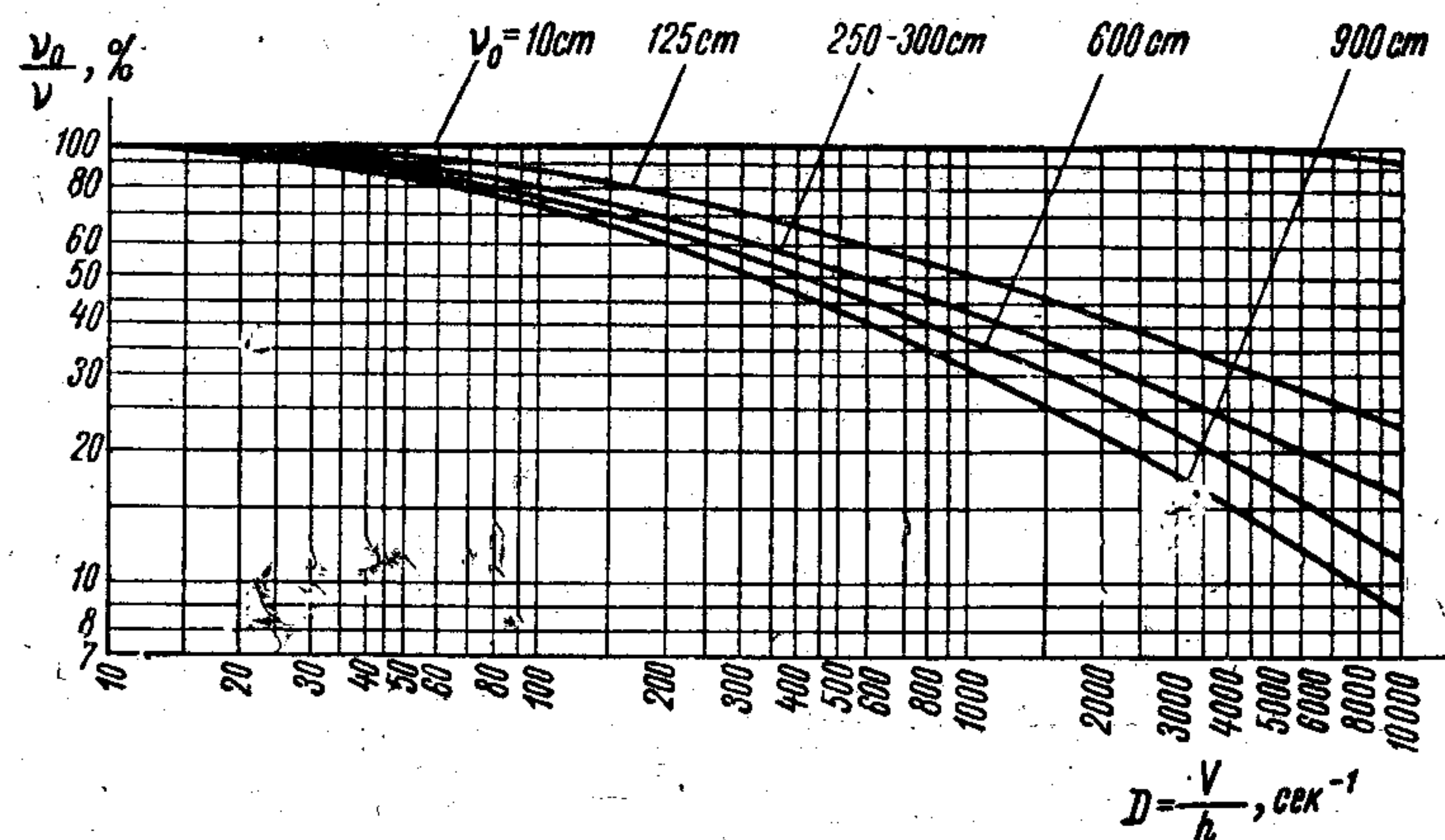


Рис. 81. График зависимости коэффициента вязкости силиконовых жидкостей от скорости сдвига  $D$  в % и вязкости жидкости при  $D = 10 \text{ сек}^{-1}$ .

и представленным на рис. 81, получена следующая формула этой зависимости

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{\sqrt{1 + kD}} \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}, \quad (9.40)$$

где  $\nu_0 \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}$  — коэффициент кинематической вязкости при скорости сдвига  $D \approx 0$ ;

$k \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \nu_0$  — опытный коэффициент.

Соответственно этому демпфирующий момент, возникающий в демпфере, определится выражением

$$U = \int_0^p R dP = \frac{\gamma}{g} \int_0^S R \nu D dS \text{ кг см},$$

где  $R$  — радиус расположения элементарных площадок  $dS$ .

Подставляя сюда значение  $\nu$  (9.40), а вместо  $D$  выражение, соответствующее колебательному движению маховой массы отно-

сительно ступицы, которое принимается косинусоидальным, получаем

$$D = \frac{v}{h} = \frac{R \dot{\phi}}{h} = \frac{RB\omega}{h} \cos \omega t \text{ сек.}^{-1};$$

$$du = \frac{\gamma}{g} \nu_0 \int_0^S \frac{R^2 B \omega \cos \omega t dS}{h \sqrt{1 + k \frac{RB\omega}{h} \cos \omega t}} \text{ кг см}. \quad (9.41)$$

В обычном конструктивном оформлении демпфера имеются две торцовые поверхности маховой массы и кожуха и две цилиндрические поверхности. Элементарные площадки  $dS$  здесь будут

$$dS_r = 2\pi R dR; \quad dS_{\text{ц}} = 2\pi (R_{\text{н}} + R_{\text{в}}) dL,$$

где  $R_{\text{н}}$ ,  $R_{\text{в}}$  и  $L$  — наружный и внутренний диаметры маховика демпфера и его ширина.

В результате интегрирования выражения (9.41) получена формула для определения кинематической вязкости жидкости, требуемой для оптимального демпфера (дается без вывода), [1]

$$\nu_0 = \frac{h}{\pi \rho R_{\text{н}}^4 M E_{\text{м, ст}}^{\Phi}} \sqrt{\frac{\theta_0}{\Delta e_0} \left[ \frac{1,27 \cdot 10^{-6} N}{\rho M^2 R_{\text{н}}^3} G_{\text{м, ст}} + \right.}$$

$$\left. + \sqrt{1 + \left( \frac{1,27 \cdot 10^{-6} N}{\rho M^2 R_{\text{н}}^3} G_{\text{м, ст}} \right)^2} \right], \quad (9.42)$$

где в дополнение к принятым обозначениям —

$\theta_0$  и  $e_0$  — постоянные безразмерной системы;  
 $M$  и  $N$  — коэффициенты, определяемые по формулам

$$M = 1 - \frac{R_{\text{в}}^4}{R_{\text{н}}^4} + 2 \frac{L}{R_{\text{н}}} \left( 1 + \frac{R_{\text{в}}^3}{R_{\text{н}}^3} \right);$$

$$N = 1 - \frac{R_{\text{в}}^5}{R_{\text{н}}^5} + 2,5 \frac{L}{R_{\text{н}}} \left( 1 + \frac{R_{\text{в}}^4}{R_{\text{н}}^4} \right);$$

$\rho = \frac{\gamma}{g} \text{ кг сек}^2 \text{ см}^{-4}$  — плотность силиконовой жидкости;

$G_{\text{м, ст}} \text{ кг см}$  — амплитуда приведенного к синусоидальному демпфирующего момента (6.07), определяемая по формулам:



при упругом креплении демпфера

$$G_{м, ст} = \frac{A_d^n}{e_0 |E_{ст, d}^{(l)} H_{ст}^{(l)}| \sqrt{(E_{м, ст}^{\Phi})^2 + \left(\frac{1}{H_{ст}^{(l)}} + \frac{1}{-\vartheta_{м\Delta}}\right)^2}} \text{ кгсм}; \quad (9.43)$$

при жестком креплении демпфера

$$G_{м, d} = \frac{A_{d+ст}^n}{e_0 \sqrt{(E_{м, d}^{\Phi})^2 + \left(\frac{1}{H_{d+ст}^{(l)}} + \frac{1}{-\vartheta_{м\Delta}}\right)^2}} \text{ кгсм}, \quad (9.44)$$

где момент инерции  $d$ -й массы равен  $\vartheta_{(d+ст)} = \vartheta_d + \vartheta_{ст}$ .

Обычно в спецификациях вязкость указывается при температуре  $t = (20 \div 25)^\circ \text{C}$ ; если в эксплуатационных условиях температура иная, то необходимо внести соответствующую поправку согласно графику на рис. 82.

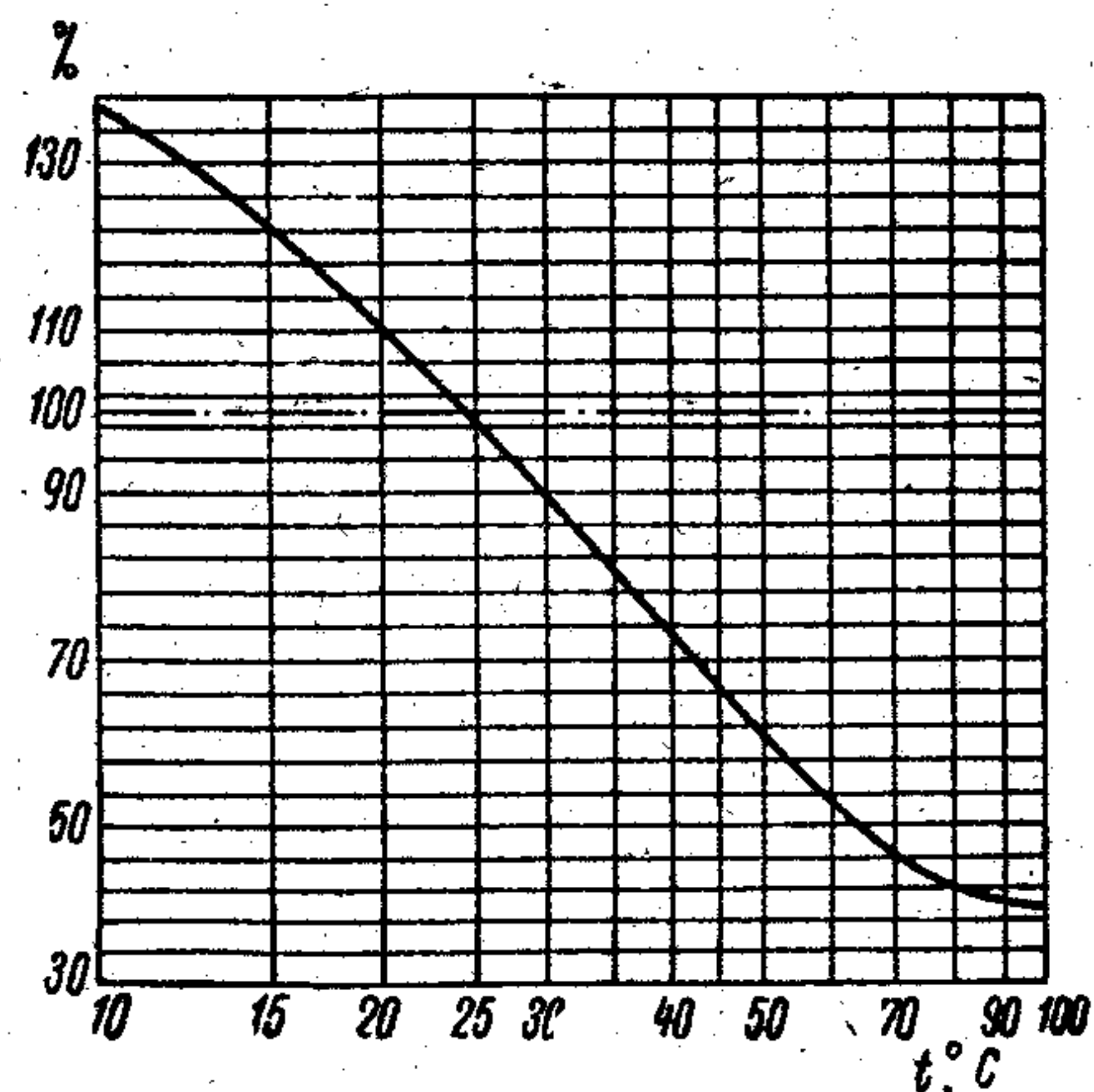


Рис. 82. Зависимость коэффициента вязкости силиконовой жидкости от температуры.

При конструктивной разработке демпфера необходимо установить его тепловой режим. Приближенное количество выделяемого демпфером тепла в течение одного часа может быть найдено по формуле

$$Q_{м, ст} = \frac{G^2 E_{м, ст}^{\Phi} \sqrt{\Delta}}{23,7 e_0 \sqrt{\vartheta_{оe_0}}} \text{ ккал/час}, \quad (9.45)$$

и площадь поверхности маховика демпфера

$$S = 2\pi (L + R_n - R_b) (R_n + R_b) \text{ см}^2. \quad (9.46)$$

Если окажется [см. 73], что

$$\frac{Q_{м, ст}}{S} \leq 0,55 \text{ ккал/час}, \quad (9.47)$$

то демпфер не требует искусственного отвода тепла.

## § 90. Выбор типа успокоителя и способы его включения в систему

Антивибратор, как и демпфер, должен обеспечить снижение амплитуд всех опасных резонансов до допустимой величины, иметь минимальный вес и габариты. Он должен быть также прост в эксплуатации и изготовлении, надежен в работе.

В установках однорежимных (например в дизель-генераторах) может быть успешно применен линейный антивибратор, при помощи которого довольно просто удастся переместить опасный резонанс в нерабочий диапазон чисел оборотов. В многорежимных судовых установках необходимо сначала рассмотреть возможность применения силиконового демпфера как наиболее простого в изготовлении и эксплуатации. Если же этот демпфер оказывается неприемлемым, то следует рассмотреть маятниковый или нелинейный антивибраторы.

В установках, в которых резонанс от возмущающего момента одного порядка находится несколько выше номинального числа оборотов и опасными являются обусловленные им вынужденные колебания, маятниковый антивибратор, по-видимому, будет более целесообразным, чем демпфер. Соответствующим выбором настройки антивибратора здесь можно обеспечить такие условия, чтобы при номинальных числах оборотов амплитуда колебаний в месте установки антивибратора была равной нулю. Если же для данной установки применить демпфер (например, силиконовый), то резонанс может приблизиться или оказаться на номинальном числе оборотов. В этом случае система должна быть сильно задемпфирована, для чего, возможно, потребуются большие габариты маховика демпфера.

Если опасный резонанс находится в районе пускового диапазона чисел оборотов или установка является малооборотной, маятниковый антивибратор будет малоэффективен, так как для медленно вращающихся систем требуются большие массы маятников.

Не менее важным и требующим расчетной проверки является вопрос о выборе способа крепления антивибратора или демпфера к системе: упругого или жесткого. В некоторых случаях применимо только жесткое крепление, например, при установке маятникового антивибратора на щеках коленчатого вала, или силиконового демпфера в маховике двигателя, в зубчатом колесе редуктора и т. п. В большинстве же случаев антивибратор или демпфер присоединяются к системе через упругое соединение, которое обычно имеет малую податливость. Однако, если эта податливость и велика, то она часто не используется в качестве варьируемого параметра. Между тем, из приведенного выше исследования следует, что эффективность демпфера может быть значительно повышена упругим креплением его к системе. Конструктивно оно выполняется в виде торсионного валика (например, при установке демпфера с переднего конца двигателя) или в виде соединения с цилиндрическими или плоскими пружинами, резиновыми элементами и т. п. Упругое крепление демпфера дает возможность значительно уменьшить его габариты и вес, а также устанавливать один и тот же типоразмер демпфера на различные установки, варьируя только податливостью упругого крепления. Увеличение податливости упругого крепления ступицы целесообразно только в определенных пределах. При



больших значениях этой податливости упругое крепление может оказаться бесполезным, а возможно и вредным, так как в рабочем диапазоне чисел оборотов двигателя может оказаться резонанс более высокой формы колебаний.

**Пример 1. Расчет демпфера с жестким креплением ступицы к валопроводу.** Валопровод речного танкера грузоподъемностью 5000 т (проект 558) состоит из коленчатого вала четырехтактного двигателя 8 NVD-48A с наддувом, развивающего 1000 э. л. с. при  $n = 375$  об/мин, промежуточного и гребного валов и трехлопастного гребного винта. Крутильная схема валопровода представлена на рис. 83.

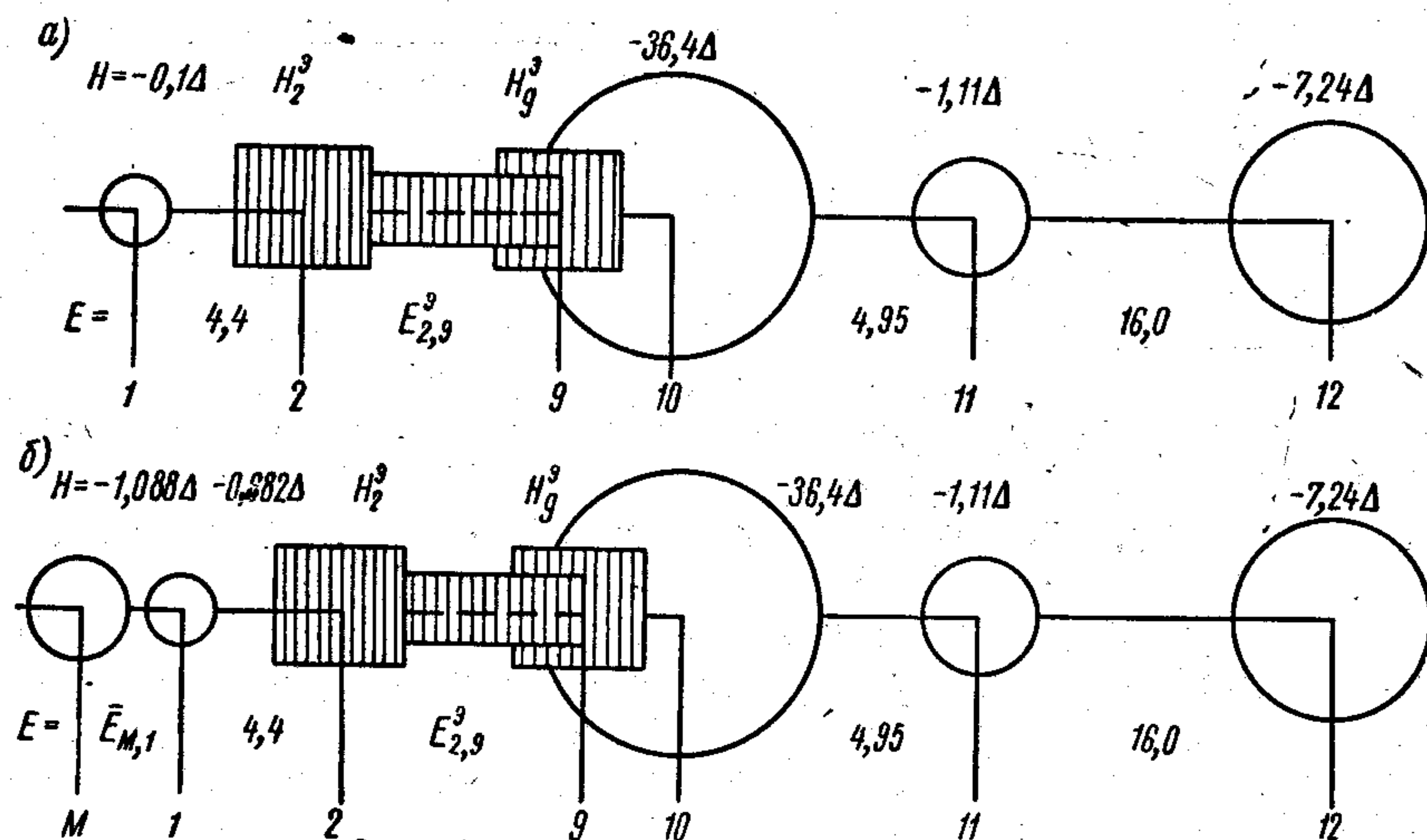


Рис. 83. Расчетная схема системы без демпфера (а) и с демпфером (б).

В результате расчета валопровода на крутильные колебания было установлено, что в нем развивается одноузловая форма колебаний при безразмерной частоте  $\sqrt{\Delta_1} = \sqrt{0,0078}$  ( $N_1 = 1100$  кол/мин), имеющая резонанс от возмущающего момента 4-го порядка при числе оборотов  $n_R = 275$  об/мин. При этой форме колебаний наибольшие напряжения возникают в упорном вале. Они имеют амплитуду  $\tau_{9,10} = 520$  кгс/см<sup>2</sup>. Кроме одноузловой, в валопроводе установки наблюдается двухузловая форма колебаний с частотой  $\sqrt{\Delta_2} = \sqrt{0,0395}$  ( $N_2 = 2490$  кол/мин), при которой в диапазоне чисел оборотов двигателя  $n = 250 \div 355$  об/мин развиваются резонансные колебания от возмущающих моментов  $\nu = 7,5; 8; 8,5$  порядков). В наиболее напряженном соединении — 8,9 (кормовой конец коленчатого вала) расчетные амплитуды напряжений достигают (в кгс/см<sup>2</sup>):

$$\tau_{8,9}(\nu=7,5) = 276; \tau_{8,9}(\nu=8) = 496 \text{ и } \tau_{8,9}(\nu=8,5) = 205.$$

Эти напряжения существенно выше допускаемых Регистром СССР, поэтому на диапазон чисел оборотов  $n = 250 \div 355$  об/мин была наложена запретная зона. Для устранения этой зоны было признано необходимым установить на первой массе системы силиконовый демпфер.

Параметры демпфера будем подбирать исходя из необходимости настройки его на двухузловую форму колебаний. На рис. 84 по данным вы-

полненного расчета исходной системы строим график зависимости амплитуд  $A_2$  для порядка  $\nu = 8$  и допускаемых амплитуд  $A_{2\text{доп}}^H$  от квадрата безразмерной частоты  $\Delta$ . Замечаем, что в системе без демпфера амплитуды колебаний 2-ой массы выше допускаемых.

В результате конструктивных прикидок оказалось возможным определить момент инерции корпуса — ступицы демпфера равным  $\vartheta_{\text{ст}} = 0,582$ . Присоединив к нему момент инерции первой массы исходной системы  $\vartheta_1 = 0,1$ , получим суммарный момент инерции ступицы равным  $\vartheta_1(\text{ст}) = 0,682$ . Вычислим амплитуды вынужденных колебаний  $A_1^0$  первой массы системы (с присоединенной к ней ступицей) и амплитуды  $A_{1\text{доп}}^0$  по формулам

$$A_1^0 = \left| \frac{\bar{M}_1^{(12)}}{H_1^{(12)}} \right| = \left| \frac{\bar{M}_1 + \frac{\bar{M}_2^{(12)}}{E_{1,2}^{(12)} H_2^{(12)}}}{H_1^{(12)}} \right| = \left| \frac{M_2^{(12)}}{H_2^{(12)}} \right| \left| \frac{1}{E_{1,2}^{(12)} H_1^{(12)}} \right| = \left| \frac{A_2^H}{E_{1,2}^{(12)} H_1^{(12)}} \right| \text{ рад;} \quad (9.48)$$

$$A_{1\text{доп}}^0 = \left| \frac{A_{2\text{доп}}^H}{E_{1,2}^{(12)} H_1^{(12)}} \right| \text{ рад;}$$

в которых значения  $A_2^H$  берем из выполненного расчета, а стойкость  $H_1^{(12)}$  вычисляем по формуле

$$H_1^{(12)} = -0,682\Delta + \frac{1}{E_{1,2}^{(12)}}.$$

Соответствующие вычисления приведены в табл. 18.

Далее на рис. 84, а строим кривую зависимости момента инерции маховика  $\vartheta_M$  от  $\Delta$  по упрощенной формуле (9.36) (в данном случае момент инерции ступицы не является варьируемым параметром):

$$\vartheta_M = \frac{2(H_1^{(12)*} - \vartheta_{\text{ст}}\Delta)}{\Delta} = \frac{2H_1^{(12)}}{\Delta}.$$

Вычисления по данной формуле приведены в табл. 18.

Сносим точку пересечения графиков амплитуд  $A_1^0$  и  $A_{1\text{доп}}^0$  на эту кривую и получаем на оси ординат рис. 84, а минимальное значение момента инерции маховика, равное  $\vartheta_M = 0,45$ , удовлетворяющее условию прочности валопровода. Ввиду того, что вблизи резонанса от возмущающих моментов 8-го порядка располагаются резонансы от возмущающих моментов 7,5 и 8,5 порядков двухузловой формы колебаний и 4-го порядка одноузловой формы, увеличиваем момент инерции маховика против минимально-возможного. В результате конструктивной проработки момент инерции маховика принят равным  $\vartheta_M = 1,088$ .

Наконец, вычисляем по табл. 18 амплитуду  $A_1^{\text{ж}}$  при закрепленном маховике, т. е. при моменте инерции ступицы равном  $(\vartheta_{\text{ст}} + \vartheta_M)$ , по формуле, аналогичной (9.48),

$$A_1^{\text{ж}} = \frac{A_2^H}{E_{1,2}^{(12)} H_{1+M}^{(12)}} \text{ рад,}$$



## § 8. Цель и последовательность расчета крутильных колебаний

Первичная цель расчета установки на крутильные колебания — определение запретных зон и их допустимости. В процессе расчета находят также напряжения от крутильных колебаний на всем диапазоне, предусмотренных для данной установки режимов.

В случае, если результаты расчета неудовлетворительны, т. е. рассчитываемая установка не может длительно выполнять свои функции без угрозы для ее надежности и долговечности, необходимо дальнейшее изучение установки и поиски таких мероприятий, которые обеспечат ее работоспособность.

Если расчет производится для уже выполненной установки, то для уточнения полученных результатов, а также для удовлетворения требованиям Регистра СССР производится экспериментальное исследование крутильных колебаний валопровода (торсиографирование) с помощью специальных приборов — торсиографов. Торсиографирование обязательно и для головных образцов новых проектов.

Расчет крутильных колебаний валопровода довольно сложен, он производится в такой последовательности:

- 1) замена действительной системы эквивалентной дискретной системой;
- 2) расчет свободных колебаний;
- 3) определение работы возмущающих моментов;
- 4) определение работы демпфирующих сопротивлений;
- 5) расчет резонансных и окolorезонансных амплитуд и напряжений;
- 6) расчет вынужденных нерезонансных колебаний;
- 7) определение запретных зон;
- 8) мероприятия по обеспечению работоспособности установки.

Первые четыре пункта расчета по существу представляют собой подготовительную часть полного расчета, на основании которой производится последующее определение амплитуд и напряжений. Однако нередко уже на основании выполнения двух первых пунктов оказывается возможным дать обоснованные соображения, позволяющие отказаться от выполнения полного расчета или ограничиться только частью последнего.

Однократные расчеты установок с каким-либо двигателем обычно выполняются расчетчиком с помощью элементарных вычислительных средств и вспомогательных материалов, заимствуемых из специальных справочников. В случаях же, когда данный двигатель подлежит установке на различных объектах, изготавливающий его завод или проектирующая установка организация предпочитают пользоваться электронными вычислительными машинами, на которых выполняются наиболее трудоемкие части расчета.

Следует отметить, что разработка нестандартных мероприятий по обеспечению работоспособности установок (для которых за-

проектированная схема оказалась неудовлетворительной) обычно требует индивидуального подхода. Выбор способа борьбы с крутильными колебаниями, по-видимому, всегда останется за расчетчиком, который для получения оптимальных результатов должен систематически накапливать опыт работы и углублять свои знания в области теории и практики крутильных колебаний.

**Пример.** Определить частоту и период свободных колебаний системы, представленной на рис. 1, а, при следующих данных:  $d = 5$  см;  $D = 25$  см;  $b = 3$  см;  $l = 1,5$  м;  $G = 8,1 \cdot 10^5$  кгсм<sup>-2</sup>.

1. Момент инерции сечения вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,2 \text{ см}^4.$$

2. Момент инерции массы диска

$$\theta = \frac{\pi D^4}{32} b \frac{\gamma}{g} = \frac{3,14 \cdot 25^4}{32} \cdot 3 \cdot \frac{7,8 \cdot 10^{-3}}{981} = 0,916 \text{ кгсмсек}^2.$$

3. Податливость соединения (1.06)

$$e = \frac{l}{G J_p} = \frac{150}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 61,2} = 3,02 \cdot 10^{-6} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

4. Частота свободных колебаний (1.20)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\theta e}} = \sqrt{\frac{10^6}{0,916 \cdot 3,02}} = 600 \text{ сек.}^{-1}.$$

5. Число колебаний в минуту (1.04)

$$N = 9,55 \omega = 9,55 \cdot 600 = 5730 \text{ кол/мин.}$$

6. Период колебаний (1.21)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{600} = 0,0105 \text{ сек.}$$



Вычисление амплитуды  $A_1^0$ ;  $A_1^*$ ;  $A_1^0$  доп;  $\vartheta_m = f(\Delta)$  (к примеру 1)

$\Delta$	$F_{1,2}^{(12)}$	$H_2^{(12)}$	$A_1^0$ доп	$A_1^*$ доп	$A_1^0$ доп	$A_2^*$	$H_1^{(12)}$	$A_1^0 - \frac{(6)}{(2) \cdot (7)}$	$\frac{2H_1^{(12)}}{\Delta} \vartheta_m$	$H_{1+m}^{(12)}$	$A_1^* = \frac{(6)}{(2) \cdot (10)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0,02	14,954	0,09478	0,0094	0,0135	-0,000702	0,05326	-0,001665	5,326	0,0315	-0,00149	
0,025	19,00	0,0685	0,00918	0,01193	-0,001126	0,0356	-0,001665	2,85	0,0083	-0,00114	
0,030	26,90	0,0444	0,00895	0,01068	-0,001964	0,0168	-0,00434	1,12	-0,0159	0,0046	
0,031	29,70	0,0395	0,0089	0,01042	-0,00226	0,0126	-0,00603	0,815	-0,0213	0,00357	
0,032	32,60	0,0355	0,00885	0,01025	-0,00256	0,0089	-0,00883	0,556	-0,0260	0,00302	
0,033	36,90	0,0308	0,0088	0,01	-0,00302	0,0046	-0,01775	0,279	-0,0314	0,00260	
0,035	50,90	0,0215	0,0087	0,00952	-0,00451	-0,00415	0,0214	0,237	-0,04235	0,00139	
0,037	87,70	0,012	0,00818	0,0086	-0,00845	-0,0138	0,00698		-0,0541		
0,038	136,40	0,0076	0,00775	0,00803	-0,01357	-0,01855	0,00536		-0,05997		
0,044	-41,70	-0,0217	0,0051	0,00462	0,0054				-0,10195		
0,048	-19,80	-0,0414	0,00425	0,00348	0,003025				-0,1355		
0,053	-10,40	-0,0675	0,00425	0,00298	0,00194				-0,1900		

а на рис. 84, б строим график зависимости амплитуды  $A_1^*$  от частоты  $\Delta$ . Точка С пересечения кривых  $A_1^0$  и  $A_1^*$  и является инвариантной. На рис. 85 построены кривые  $y_1$  (табл. 19) и прямая  $y_2$  по уравнению (9.36)

$$y_1 = \frac{\Delta}{H_1^{(12)*}}; y_2 = \frac{1}{\vartheta_{ст+1} + 0,5\vartheta_m}$$

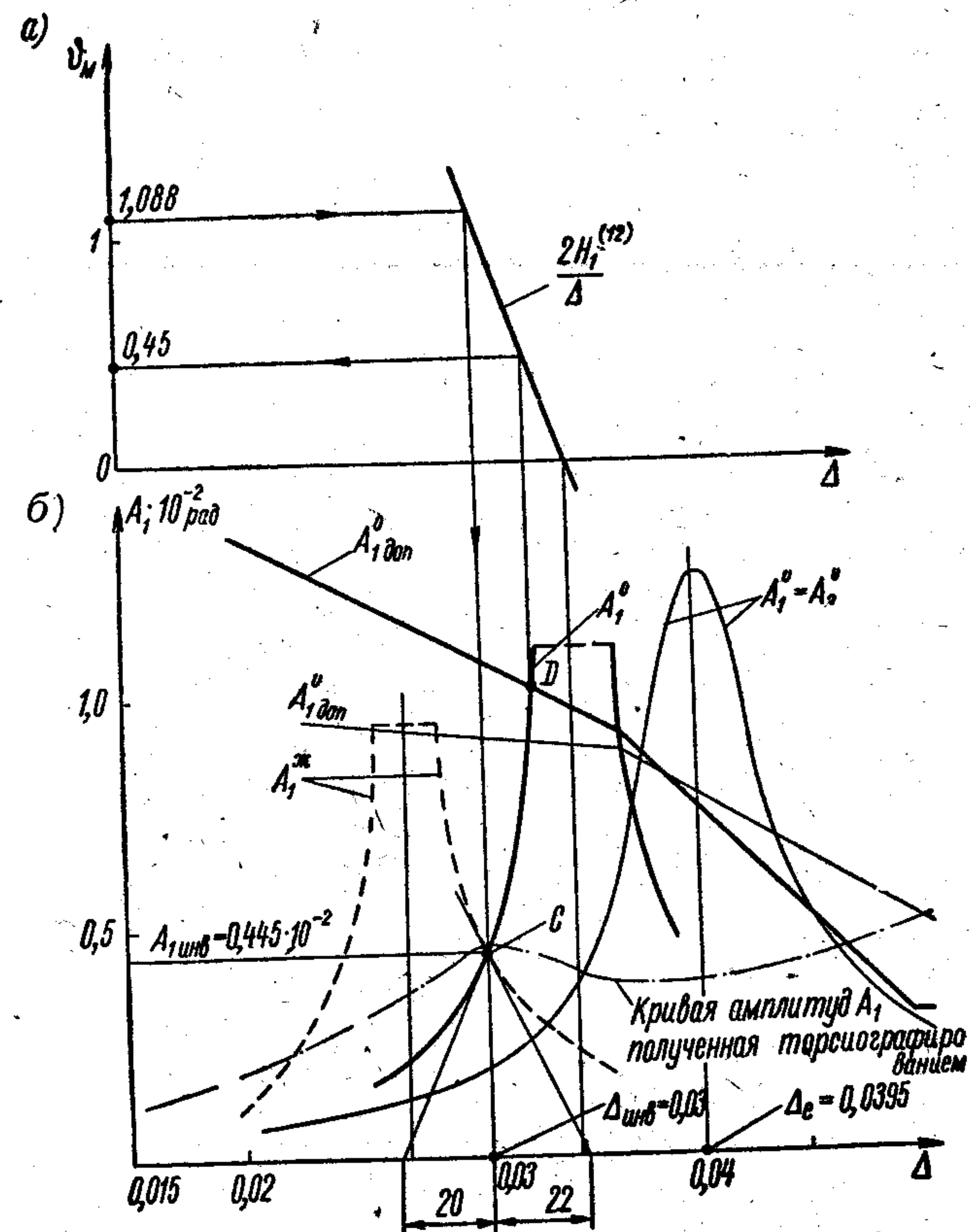


Рис. 84. К выбору момента инерции маховой массы демпфера.

точки пересечения которых определяют инвариантные частоты. Итак, изменение параметров демпфера (определяющее отстояние прямой  $y_2$  от оси абсцисс) перемещает инвариантные частоты только двухузловой формы колебаний, на которую и настроен демпфер. Для одноузловой формы демпфер уже не будет оптимальным, однако за счет трения в демпфере амплитуды колебаний этой формы будут также несколько снижены.

Задачей дальнейшего расчета является такой подбор параметра трения  $E_{м.ст}^Ф$ , чтобы резонанс двухузловой формы колебаний исходной системы



с частоты  $\sqrt{\Delta_e} = \sqrt{0,0395}$  передвинулся на инвариантную частоту  $\sqrt{\Delta_{инв}} = \sqrt{0,03}$ . Для этого определяем  $E_{м.ст}^{\Phi}$  по формуле (9.39)

$$E_{м.ст}^{\Phi} = \frac{1}{\vartheta_m \Delta_{инв}} \sqrt{\frac{(A_d^*)'}{(A_d^0)'}} = \frac{1}{1,088 \cdot 0,03} \sqrt{0,9} = 26,6.$$

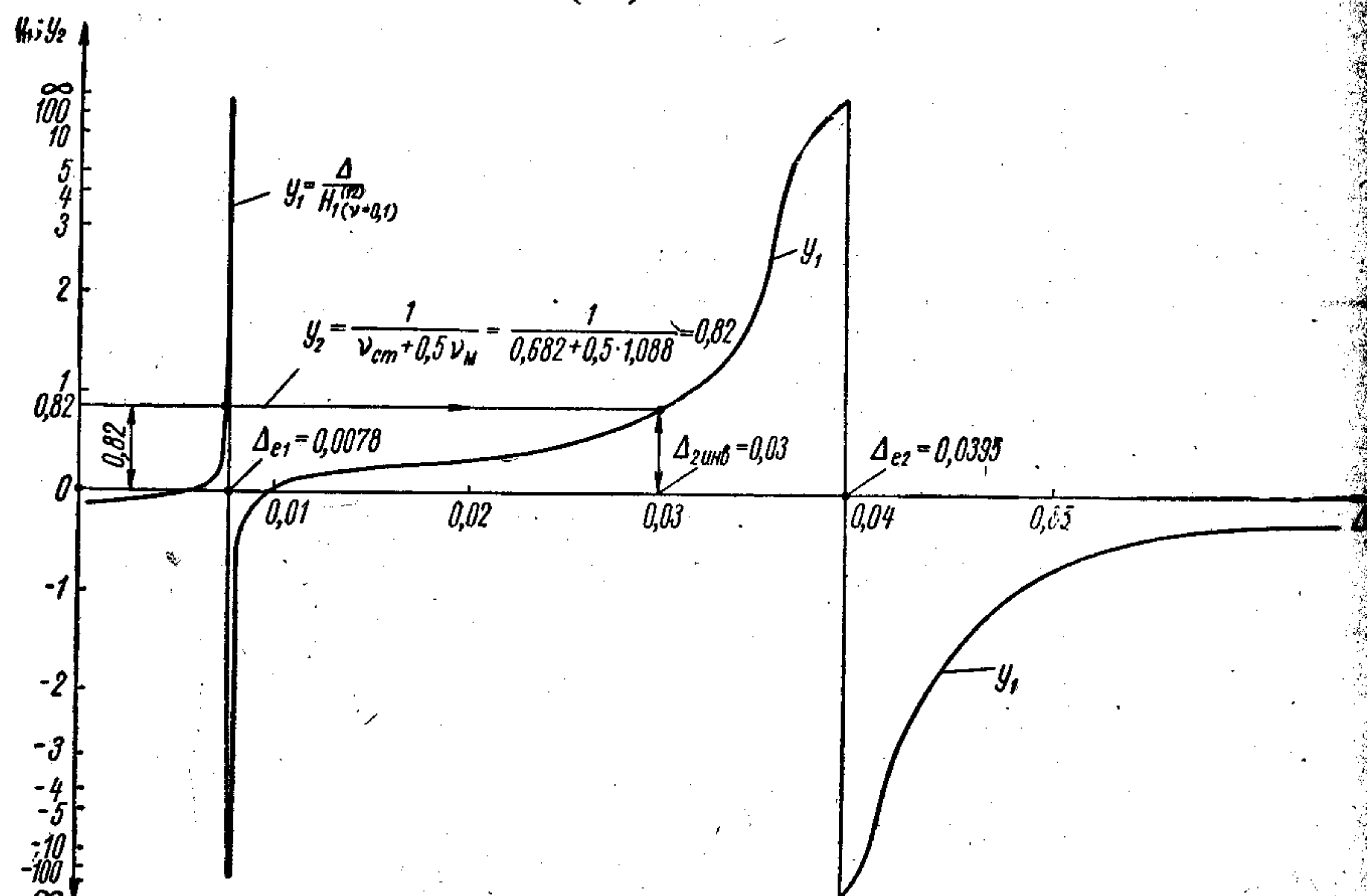


Рис. 85. Определение инвариантных частот рассчитываемой системы.

Отношение производных  $(A_d^*)'$  и  $(A_d^0)'$  определяем как отношение отрезков, отсекаемых на оси абсцисс касательными, проведенными к кривым  $A_d^*$  и  $A_d^0$  в инвариантной точке С:

$$\frac{(A_d^*)'}{(A_d^0)'} = \frac{20}{22} = 0,9.$$

Для определения требуемой при оптимальном демпфере кинематической вязкости силиконовой жидкости вычисляем входящие в формулу (9.42) величины:

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{981} = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ кгсек}^2 \text{ см}^{-4} \text{ — плотность силиконовой жидкости;}$$

$N$  и  $M$  — параметры, определяемые размерами маховика:

$$N = 1 - \left(\frac{R_B}{R_H}\right)^5 + 2,5 \frac{L}{R_H} \left[1 + \left(\frac{R_B}{R_H}\right)^4\right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{20}{35}\right)^5 + 2,5 \frac{10}{35} \left[1 + \left(\frac{20}{35}\right)^4\right] = 1,73;$$

Таблица 19

Вычисление функциональной характеристики системы без демпфера

$\Delta$	$H_1^{(12)*}$	$\frac{\Delta}{H^{(12)}}$	$\Delta$	$H_1^{(12)*}$	$\frac{\Delta}{H^{(12)}}$
0,001	-0,00919	-0,109	0,033	0,0238	1,38
0,007	0,0545	0,128	0,035	0,0162	2,16
0,008	-0,25	-0,032	0,038	0,00355	10,7
0,02	0,065	0,308	0,044	-0,0238	-1,55
0,025	0,050	0,5	0,048	-0,0553	-0,87
0,03	0,0342	0,875	0,053	-0,1015	-0,52

\* Значения стойкостей взяты из расчета системы без демпфера.

$$M = 1 - \left(\frac{R_B}{R_H}\right)^4 + 2,0 \frac{L}{R_H} \left[1 + \left(\frac{R_B}{R_H}\right)^3\right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{20}{35}\right)^4 + 2,0 \left(\frac{10}{35}\right) \left[1 + \left(\frac{20}{35}\right)^3\right] = 1,57,$$

где  $R_H = 35 \text{ см}$ ,  $R_B = 20 \text{ см}$ ;  $L_0 = 10 \text{ см}$  — наружный и внутренний диаметры и его ширина;  
 $h = 0,1 \text{ см}$  — зазор между маховиком и корпусом демпфера;  
 $\theta_0 = 155 \text{ кг см сек}^2$ ;  $e_0 = 0,375 \cdot 10^{-8} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}$  — постоянные системы;  
 $G_{м.1} \text{ кг см}$  — амплитуда демпфирующего момента, определяемая по формуле (9.44):

$$G_{м.1} = \frac{A_{инв}^0}{e_0 \sqrt{(E_{м.1}^{\Phi})^2 + \left(\frac{1}{H_1^{(12)}} + \frac{1}{-\vartheta_m \Delta_{инв}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{0,445 \cdot 10^{-2}}{0,375 \cdot 10^{-8} \sqrt{(26,6)^2 + \left(\frac{1}{0,0168} - \frac{1}{1,088 \cdot 0,03}\right)^2}} = 3 \cdot 10^4 \text{ кг см},$$

где  $A_{инв}$  и  $\sqrt{\Delta_{инв}}$  — инвариантные амплитуды и частота (берем из графика на рис. 84, б);

$H_1^{(12)}$  — стойкость системы в 1-й массе при инвариантной частоте.

Подставляем полученные значения в формулу (9.42)

$$y_0 = \frac{h}{\pi \rho R_H^4 M E_{м.ст}^{\Phi}} \sqrt{\frac{\theta_0}{\Delta e_0}} [a + \sqrt{1 + a^2}] =$$

$$= \frac{0,1}{\pi 1,02 \cdot 10^{-6} 35^4 \cdot 1,57 \cdot 26,6} \sqrt{\frac{155}{0,03 \cdot 0,375 \cdot 10^{-8}}} [0,614 + \sqrt{1 + 0,614^2}] =$$

$$= 1120 \text{ см},$$



Таблица 20  
Вычисление формы колебаний и амплитуд напряжений в сечениях валопровода при оптимальном демпфере  
К примеру 1

Величины	$H_1$	$E_{1,2}$	$H_2^3$	$E_{2,9}^3$	$H_9^3$	$E_{9,10}$	$-9_{10}^4$	$E_{10,11}$	$-9_{11}^4$	$E_{11,12}$	$-9_{12}^4$
$a_z$											
$\delta_{z,z+1}$											
$W_{z,z+1} \text{ см}^3$											
$\tau_{z,z+1} = \frac{\delta_{z,z+1} A_1}{e_0 W_{z,z+1} a_i} \text{ кгс см}^{-2}$											
	21,4	4,4 22,7 27,1	-0,135 0,179 0,044 17,95	5,43 0,147 5,577	-0,135 6,900 6,765 0,477	1,1 -0,955 0,145 3,29 1600 133	-1,09 0,0428 -1,0472 -3,14	4,95 18,4 23,35 -0,134 984 7,8	-0,0333 0,0877 0,0544 2,472	16,00 -4,61 13,39 -0,217 984 12,2	-0,217 -0,03 1,00

где

$$a = \frac{1,27 \cdot 10^{-6} N}{\rho M^2 R_H^3} G_{м, ст} = \frac{1,27 \cdot 10^{-6} \cdot 1,73 \cdot 3 \cdot 10^4}{1,02 \cdot 10^{-6} \cdot 1,57^2 35^3} = 0,614.$$

Учтем изменение вязкости жидкости от температуры по графику рис. 8, считая, что демпфер будет работать при температуре  $t = 40^\circ \text{C}$ , при которой

$$k_t = \frac{\nu_0(t=40^\circ)}{\nu_0(t=25^\circ)} = 0,75. \text{ Следовательно, требуемая для оптимального демпфера вязкость силиконовой жидкости}$$

равна  $\nu_0(t=40^\circ) = \frac{1120}{0,75} = 1500 \text{ см}^2/\text{сек}$ .

$$\nu_0(t=40^\circ) = \frac{1120}{0,75} = 1500 \text{ см}^2/\text{сек}$$

Для решения вопроса об отводе тепла от демпфера при его работе определим по формуле (9.45) количество выделяемого им тепла в течение одного часа

$$Q_{м, ст} = \frac{(e_0 G_{м, ст})^2 E_{м, ст}^{\Phi} \sqrt{\Delta}}{23,7 \cdot e_0 \sqrt{\theta_0 e_0}} = \frac{G_{м, ст}^2 E_{м, ст}^{\Phi}}{23,7 \sqrt{\frac{\theta_0}{\Delta e_0}}} = \frac{(3,0 \cdot 10^4)^2 26,6}{23,7 \cdot 1,19 \cdot 10^6} = 850 \text{ ккал/час.}$$

Определим площадь поверхности маховика демпфера по формуле (9.46):

$$S = 2\pi(L + R_H - R_B)(R_H + R_B) = 2\pi(10 + 35 - 20)(35 + 20) = 8650 \text{ см}^2$$

Отношение  $\frac{Q_{м, ст}}{S} = \frac{850}{8650} = 0,098$ , что значительно меньше соответствующей величины  $0,55 \text{ ккал/час}$ , приведенной в формуле (9.47). Следовательно, демпфер искусственного отвода тепла не требует.

В конце расчета определяем напряжения в соединениях валопровода при оптимальном демпфере по формуле

$$\tau_{z,z+1} = \frac{\delta_{z,z+1}}{e_0 W_{z,z+1} a_i} A_1 \text{ кгс см}^{-2},$$

где  $W_{z,z+1} \text{ см}^3$  — момент сопротивления на кручение расчетных сечений валопровода.

Соответствующие вычисления приведены в табл. 20, из которой следует, что валопровод не имеет опасных крутильных колебаний во всем рабочем диапазоне чисел оборотов двигателя.

Рассчитанный выше демпфер был изготовлен и установлен на валопровode танкера «Волгонефть-16». На рис. 84, б приведены результаты испытаний, которые подтвердили результаты расчета.

**Пример 2. Расчет силиконового демпфера при упругом креплении его к системе.** В настоящем примере не приводится полного расчета силиконового демпфера. Здесь рассмотрено лишь вычисление податливости упругого крепления для случая, когда эта податливость является варьируемым параметром.

Возьмем дизель-генераторную установку с двухтактным V-образным восьмицилиндровым двигателем 45Д Коломенского завода им. В. В. Куйбышева; номинальное число оборотов двигателя  $n_H = 750 \text{ об/мин}$  (см. схему системы на рис. 87, а).

По расчету завода, в установке без демпфера наибольшие напряжения от крутильных колебаний при резонансе с возмущающим моментом 8-го порядка одноузловой формы ( $n = 465 \text{ об/мин}$  и  $\sqrt{\Delta} = 0,0313$ ) достигают следующих величин: в коленчатом валу  $\tau_{8,9} = 2060 \text{ кгс см}^{-2}$  и в соединительном валу  $\tau_{9,10} = 890 \text{ кгс см}^{-2}$ . Эти напряжения значительно превышают допускаемые, а потому было признано необходимым установить на переднем конце двигателя силиконовый демпфер крутильных колебаний.

Параметры силиконового демпфера были приняты следующие:

$\theta_m = 2,98$  и  $\theta_{ст} = 2,29$  — моменты инерции маховика и корпуса демпфера;

$R_H = 30,5$ ;  $R_B = 15,5$ ;  $L = 12 \text{ см}$  — наружный и внутренний радиусы маховика демпфера и ширина его;

$h = 0,018$  — зазор между корпусом и маховиком демпфера;

$E_{ст,1} = 0,635$  — податливость соединения между корпусом демпфера и первой массой двигателя.

В установке с этим демпфером при податливости упругого крепления  $E_{ст,1} = 0,635$  по расчету получена инвариантная амплитуда колебаний первой массы  $A_1 = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$ . (удовлетворяющая условию допустимости) и инвариантная частота  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,021}$ . Поставим задачу за счет увеличения податливости упругого крепления и уменьшения габаритов демпфера получить ту же самую амплитуду колебаний первой массы при той же инвариантной частоте. Для решения этой задачи выполним нижеследующие вычисления.

В диапазоне частот, в котором могут изменяться частоты возмущающего крутящего момента 8-го порядка, вычисляем амплитуды  $A_1^n$  вынужденных



колебаний первой массы двигателя исходной системы (без демпфера) и допускаемые амплитуды  $A_{1\text{доп}}$  по формулам

$$A_1^H = \frac{M_1^{(10)}}{H_1^{(10)}} = \frac{-M_1 \frac{H_1^3}{\Delta} \left( 1 + \frac{1}{E_{1,8}^{(10)} H_8^{(10)}} \right)}{H_1^{(10)}} \text{ рад.};$$

$$A_{1\text{доп}} \approx |E_{1,8}^{(10)} H_8^{(10)} E_{8,9}^{(10)}| F_{8,9\text{доп}},$$

где  $F_{8,9\text{доп}}$  — безразмерная величина допускаемой амплитуды эластического момента (взятая из расчета);

$$F_{8,9\text{доп}} = \tau_{8,9} W_{8,9\text{min}} e_0 = 300 \cdot 756 \cdot 51,2 \cdot 10^{-10} = 0,116 \cdot 10^{-2};$$

$\tau_{8,9} = 300 \text{ кгсм}^{-2}$  — допускаемая амплитуда напряжений в коленчатом вале (соединение 8,9);

$W_{8,9\text{min}}$  — момент сопротивления кручению в наименьшем сечении соединения 8,9;

(подсчеты см. табл. 21).

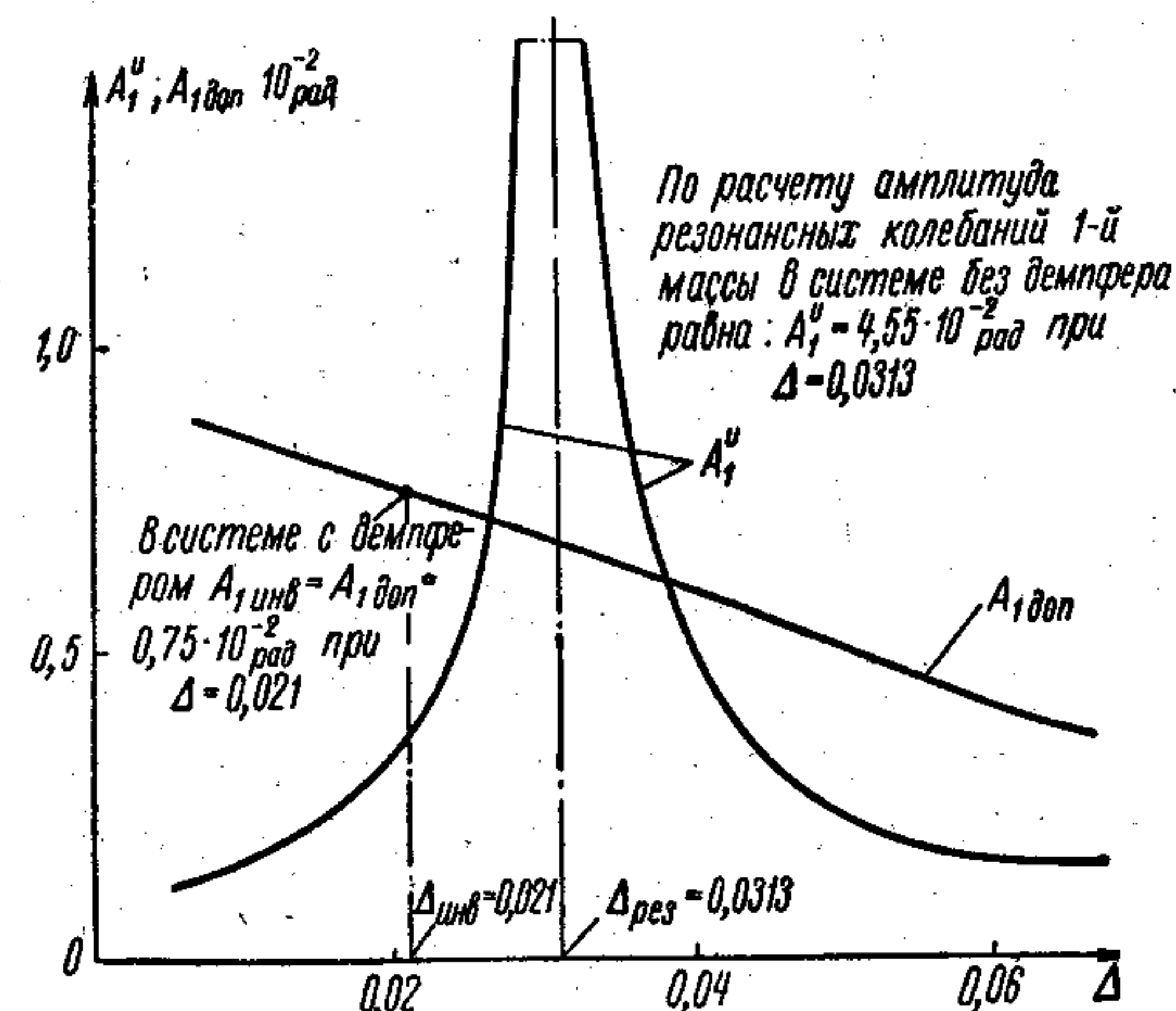


Рис. 86. График развития амплитуд вынужденных и допускаемых колебаний первой массы двигателя в системе без демпфера.

$$E_{\text{ст.1}} = \frac{2 + k \left( 1 - \frac{A_{1\text{доп}}}{A_1^H} \right)}{2(1+k) \vartheta_{\text{ст}} \Delta} = \frac{2 + 1,3 \left( 1 - \frac{A_{1\text{доп}}}{A_1^H} \right)}{2(1+1,3) 1 \Delta} (*); \quad (9.49)$$

$$E_{\text{ст.1}} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{2+k}{(1+k) \vartheta_{\text{ст}}} - y_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[ \frac{2+k}{(1+k) \vartheta_{\text{ст}}} - y_1 \right]^2 - 2 \frac{2+k}{(1+k) \vartheta_{\text{ст}}} \left[ \frac{2}{(2+k) \vartheta_{\text{ст}}} - y_1 \right]} \right\} =$$

Таблица 21

Вычисление амплитуд вынужденных и допускаемых колебаний первой массы двигателя в системе без демпфера (к примеру 2)

	n	186	263	372	432	492	558	645	790	900
(1)	$\Delta$	0,005	0,010	0,02	0,027	0,035	0,045	0,06	0,08	0,095
(2)	$H_8^3 = H_1^3$	-0,0204	-0,0415	-0,0862	-0,12	-0,1608	-0,2165	-0,312	-0,470	-0,630
(3)	$(2) : (1) =$	-4,08	-4,15	-4,31	-4,45	-4,59	-4,81	-5,2	-5,875	-6,63
(4)	$M_1 \cdot 10^{-5} =$	2,56	2,70	2,98	3,20	3,40	3,76	4,30	5,13	5,75
(5)	$E_{1,8}^{(10)} =$	7,24	7,46	7,32	7,16	7,01	6,96	7,47	21,77	-1,89
(6)	$H_8^{(10)} =$	1,94	0,99	0,72	0,632	0,548	0,445	0,294	0,054	-0,177
(7)	$(5) \cdot (6) =$	14,03	7,40	5,27	4,53	3,84	3,10	2,20	1,174	-0,334
(8)	$(1) : (8) =$	0,0713	0,135	0,190	0,221	0,260	0,322	0,455	0,852	3,00
(9)	$1 + (8) =$	1,0713	1,135	1,190	1,221	1,260	1,322	1,455	1,852	4,00
(10)	$(3) \cdot (4) \cdot (9) \cdot 10^{-3} = M_1^{(10)}$	0,112	0,127	0,153	0,174	0,197	0,240	0,326	0,558	1,525
(11)	$H_1^{(10)}$	0,118	0,092	0,051	0,020	-0,018	-0,073	-0,178	-0,424	-1,160
(12)	$A_1 = (10) : (11) \cdot 10^{-2}$	0,0949	0,138	0,300	0,870	-1,094	-0,329	-0,183	-0,1317	-0,1312
(13)	$E_{8,9}^{(10)}$	0,51	0,970	1,240	1,330	1,410	1,510	1,650	1,910	2,230
$A_{1\text{доп.}}$	$(7) \cdot 0,116 \cdot 10^{-2} \cdot (13)$	0,830	0,833	0,758	0,700	0,628	0,544	0,421	0,261	0,0864



$$= \frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{2+1,3}{(1+1,3)1} - y_1 \pm \sqrt{\left[ \frac{2+1,3}{(1+1,3)1} - y_1 \right]^2 - 2 \frac{2+1,3}{(1+1,3)1} \left[ \frac{2}{(2+1,3)1} - y_1 \right]} \right\} (**), \quad (9.50)$$

в которых обозначено

$$k = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_{ст}} = \frac{1,3}{1} = 1,3;$$

$A_1^n$  и  $A_{1доп}$  радиан — амплитуды вынужденных и допускаемых колебаний 1-й массы исходной системы (см. табл. 21)

$$y_1 = \frac{\Delta}{H_1^{(10)}} \text{ — функциональная характеристика исходной системы.}$$

По результатам вычислений на рис. 87 строим графики зависимости  $E_{ст,1}$  от  $\Delta$ . Координаты точек A и B пересечения этих кривых определяют по оси ординат, где отложены величины податливости упругого крепления демпфера, удовлетворяющие условиям допустимости соответствующих инвариантных амплитуд. По оси абсцисс здесь отложены инвариантные частоты.

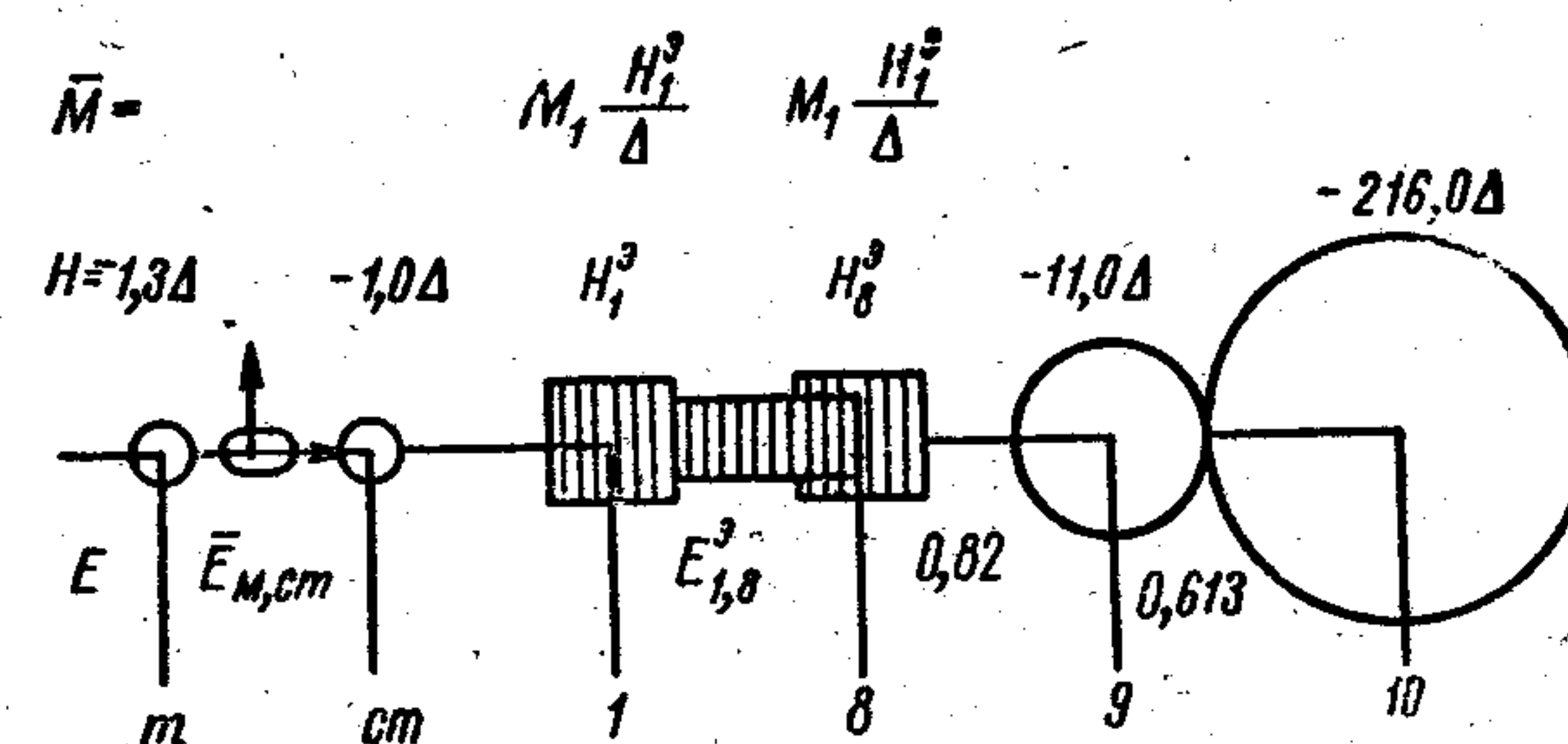
Если на рис. 87 проведем горизонталь через точку B, то получаем податливость равной  $E_{ст,1} = 25$ , которой соответствуют инвариантные частоты  $\sqrt{\Delta_I} = \sqrt{0,014}$  и  $\sqrt{\Delta_{II}} = 0,058$ . Точка же A на оси ординат определяет податливость  $E_{ст,1} = 5,5$ , а на оси абсцисс — инвариантную частоту —  $\sqrt{\Delta_I} = \sqrt{0,0021}$ . В рассматриваемой установке по конструктивным соображениям удобнее взять податливость, меньшую из двух полученных выше, поэтому принимаем податливость упругого крепления демпфера  $E_{ст,1} = 5,5$ .

При выводе уравнения (9.49) инвариантная амплитуда принята в точности равной допускаемой амплитуде, т. е.  $A_{инв} = A_{доп}$ . Это равенство справедливо только при инвариантной частоте (в данном случае  $A_{инв} = A_{доп} = 0,75 \cdot 10^{-2}$  при  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,021}$ ). Поэтому для определенных выше податливости  $E_{ст,1} = 5,5$ , момента инерции маховика  $\vartheta_m = 1,3$  и ступицы  $\vartheta_{ст} = 1$  инвариантные амплитуды и частота должны быть точно такими же, что и при первоначально принятых параметрах демпфера (т. е. при  $\vartheta_m = 2,98$ ;  $\vartheta_{ст} = 2,29$ ;  $E_{ст,1} = 0,635$ ). И действительно: из графиков на рис. 87 инвариантная частота равна  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,021}$ . Точно так же инвариантная амплитуда в системе с новым демпфером и при новой податливости упругого крепления равна  $A_{инв} = 0,75 \cdot 10^{-2}$ , что следует из вычислений по формуле (9.35):

$$A_{инв} = \left( 2 + \frac{\vartheta_m}{\vartheta_{ст}} - \frac{2\Delta_{инв}}{\Delta_0^I} \right) \frac{\vartheta_{ст}}{\vartheta_m} A_{1(\Delta=\Delta_{инв})}^n = \\ = \left( 2 + 1,3 - \frac{2 \cdot 0,021}{0,079} \right) \frac{1}{1,3} \cdot 0,353 \cdot 10^{-2} = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад.},$$

где  $\Delta_0^I = (\vartheta_m + \vartheta_{ст}) E_{ст,1}^{-1} = [(1,3 + 1) 5,5]^{-1} = 0,079$  — настройка демпфера.

Таким образом, за счет увеличения податливости упругого крепления мы получили ту же амплитуду колебаний 1-й массы, но при демпфере, имеющем вес в 2,7 раза меньше, чем рассчитанный в первоначальном варианте (пример 1).



Постоянные системы:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 40,3 \text{ кг/см сек}^2; \\ e_0 &= 51,2 \cdot 10^{-10} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1} \\ N &= 21030 \sqrt{\Delta} \text{ кол/мин} \end{aligned}$$

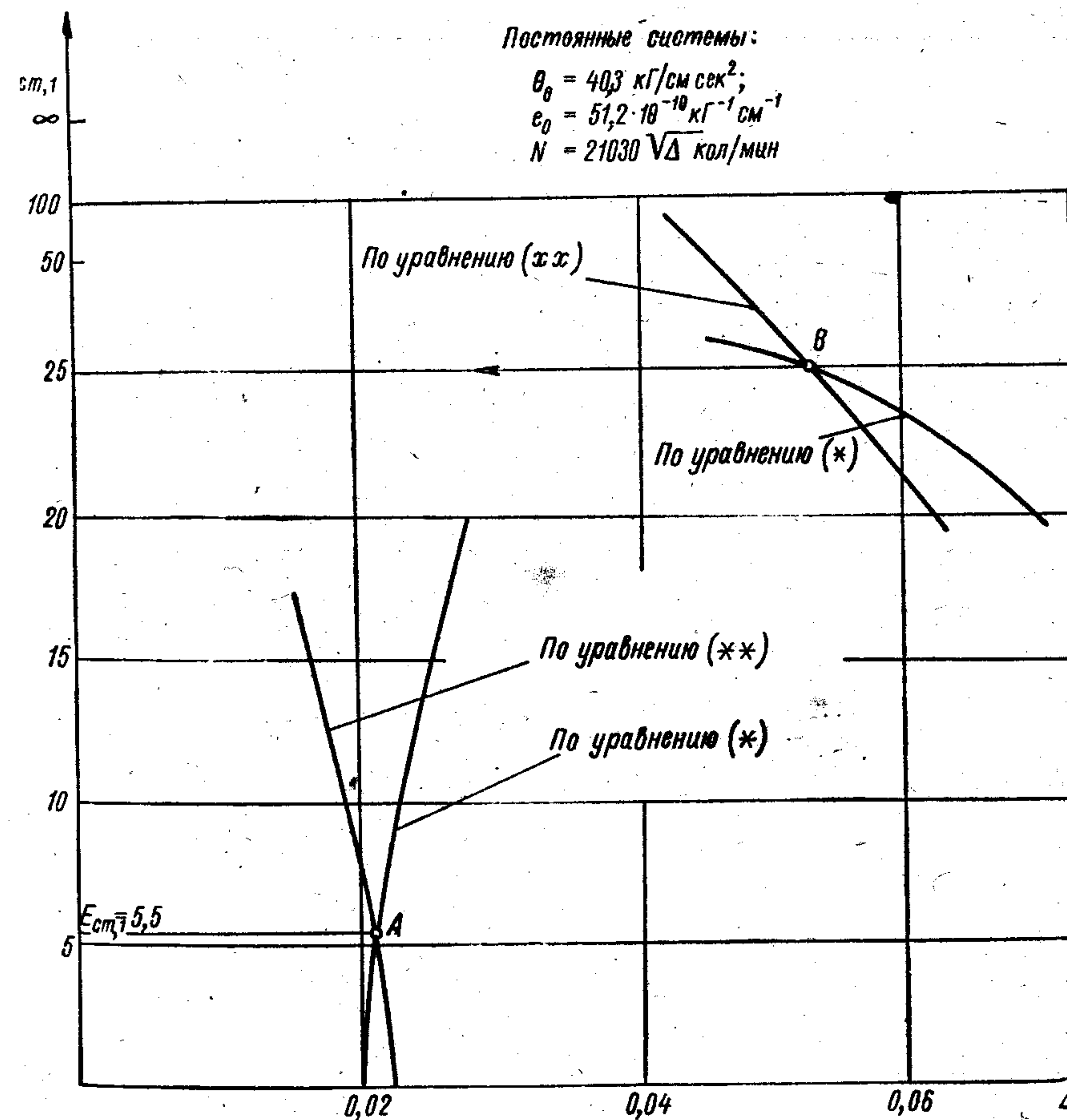


Рис. 87. Графическое решение уравнений \* и \*\* (к примеру 2).



Дальнейшие вычисления аналогичны выполненным в примере 1, но параметр трения  $E_{\text{ст, м}}^{\Phi}$  вычисляется по формуле (9.38), применяемой при упругом креплении демпфера.

**Пример 3.** Установка, рассмотренная в примере 3, гл. 3, эксплуатировалась на режиме  $n = 470$  об/мин, но при перегрузке ( $n_{\text{max}} = 484$  об/мин) в ней наблюдались сильные вибрации. В связи с модернизацией этой установки число оборотов вала повышается до 512 и устанавливается новый гребной винт, который, с учетом увлекаемой им воды, обладает таким же моментом инерции. Необходимо обеспечить надежную работу установки при новом режиме.

1. В примере 3, гл. 3, были установлены частоты свободных колебаний установки до модернизации:  $N_1 = 1470$  кол/мин и  $N_2 = 3770$  кол/мин. Найдем порядки резонирующих гармоник возмущающего момента и критические числа оборотов валопровода

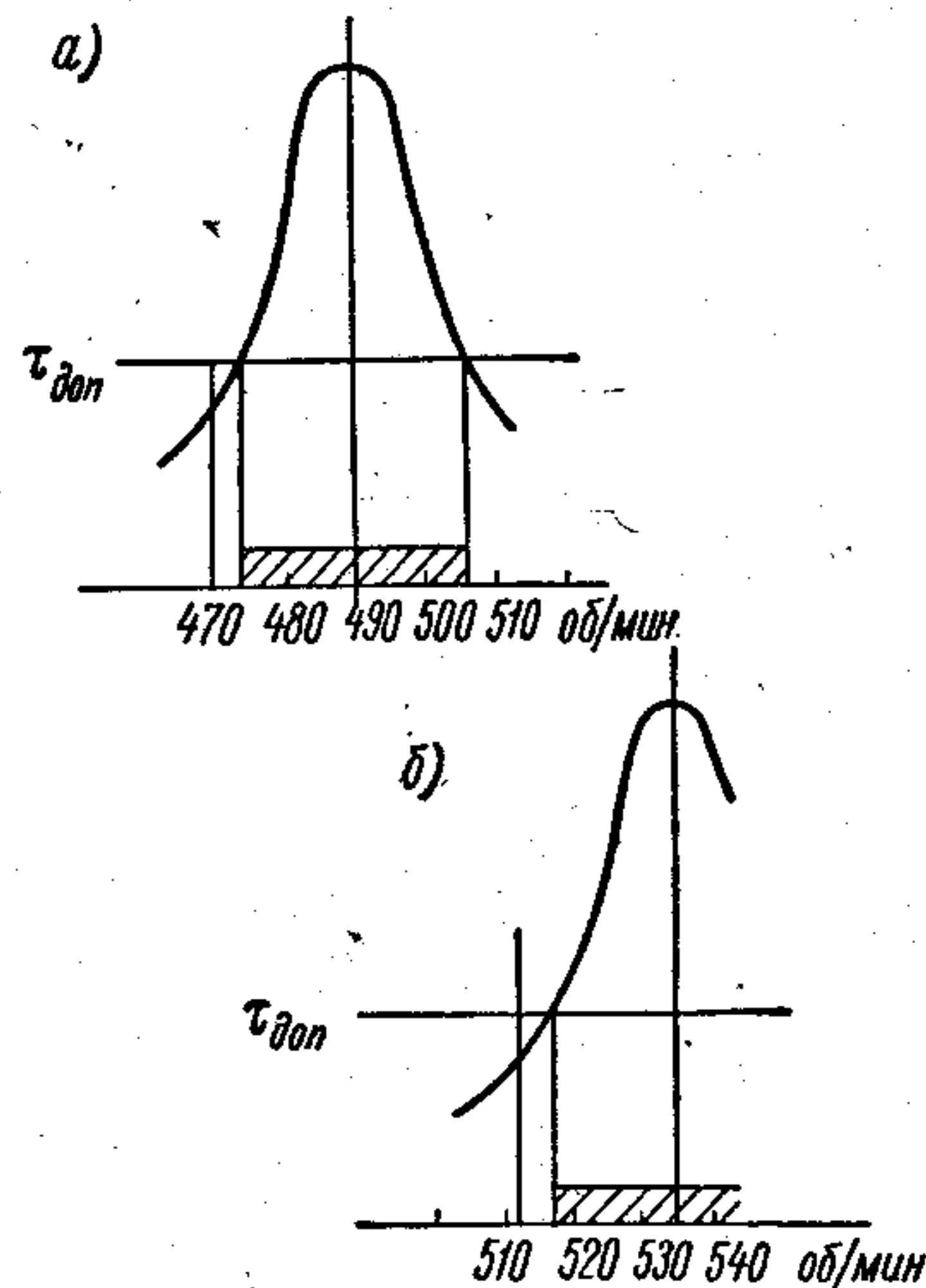


Рис. 88. К примеру 3.

$$\nu_1 = \frac{N_1}{n} = \frac{1470}{470} = 3,13 \approx 3; n_R = \frac{N_1}{\nu_1} = \frac{1470}{3} = 490 \text{ об/мин};$$

$$\nu_2 = \frac{N_2}{n} = \frac{3770}{470} = 8,02 \approx 8; n_R = \frac{N_2}{\nu_2} = \frac{3770}{8} = 473 \text{ об/мин}.$$

2. Так как 8-й порядок не является для шестицилиндрового двигателя главным и эксплуатация установки при  $n = 470$  об/мин была разрешена, то остается считать причиной вибрации резонанс третьей гармоники возмущающего момента с частотой одноузловых свободных колебаний. Как видно из рис. 88, а, где дана кривая резонанса, при перегрузке установки

работала в запретной зоне, а при смещении резонанса на  $n_R = 535$  об/мин нужный для эксплуатации диапазон оборотов вала запретной зоны не имеет (рис. 88, б). Это может быть достигнуто варьированием элементами системы. Находим резонансную частоту и квадрат безразмерной частоты

$$N'_1 = \nu n'_R = 3535 = 1605 \text{ кол/мин}; \Delta = \left( \frac{N'_1}{a} \right)^2 = \left( \frac{1605}{11350} \right)^2 = 0,02.$$

3. Расчет выполняем в табл. 22, а при  $\Delta = 0,2$ . Варьируя податливостью соединения 7—8, оставляем соответствующую клетку таблицы незаполненной, а в третьей строке последнего столбца записываем 0. В результате вычислений находим  $E'_{7,8} = 12,61$ . Находим податливость соединения

$$e'_{7,8} = E'_{7,8} e_0 = 12,61 \cdot 3,2 \cdot 10^{-9} = 40,6 \cdot 10^{-9} \text{ кг}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

4. Варьируя моментом инерции гребного винта (масса 8), составляем табл. 22, б, не меняя соединения 7—8. Клетку для  $N_8$  оставляем свободной

Таблица 22

К примеру 3

а) 6	7	8
—0,02	1,2	—0,102
	—6,7	—0,182
—0,14	—5,5	—0,284

б) 7	8
—0,102	15,3
	—3,52
—0,284	11,78

Два столбца таблицы остаются без изменения, а потому таблица укорачивается. После выполнения вычислений находим

$$N'_8 = -0,0849; \vartheta'_8 = \frac{N'_8}{-\Delta} = \frac{-0,0849}{-0,02} = 4,245;$$

$$\vartheta'_8 = \vartheta'_8 \vartheta_0 = 4,245 \cdot 22,2 = 942 \text{ кг см сек}^2.$$

5. Устанавливаем целесообразный вариант варьирования: при варьировании массой гребного винта его момент инерции с увлекаемой водой необходимо уменьшить на

$$\delta \vartheta = \frac{\vartheta_8 - \vartheta'_8}{\vartheta_8} 100\% = \frac{5,5 - 4,24}{5,5} 100\% = 22,9\%;$$

при варьировании податливостью приставного вала его диаметр  $d$  следует увеличить на 11%

$$\frac{E'_{7,8}}{E_{7,8}} = \frac{d^4}{d'^4} \dots d' = d \sqrt[4]{\frac{E_{7,8}}{E'_{7,8}}} = d \sqrt[4]{\frac{15,3}{12,61}} = 1,11d.$$

Первое мероприятие требует существенного уменьшения толщины лопастей винта, что понизит их прочность и не может быть рекомендовано, а второе — увеличения диаметра приставного вала на 11% — вполне возможно и должно быть признано целесообразным. Окончательная рекомендация может быть дана только после того, как будет установлено, что при таком изменении вала не возникает запретных зон на эксплуатационных режимах за счет других резонансов.



## ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ АППАРАТУРА, ПРИМЕНЯЕМАЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОПРОВОДОВ

### § 91. Способы измерения колебаний и напряжений

Техника и методика измерений крутильных колебаний за последние годы претерпела существенное изменение. Если раньше эти измерения производились в основном механическими торсиографами, то в настоящее время наиболее употребительными являются различные электрические способы измерения крутильных колебаний. Наиболее существенные преимущества электрических измерительных средств: возможность записи колебаний при высоких частотах, высоких числах оборотов вала, при неустановившихся режимах (например, при пуске двигателя), а также возможность гармонического анализа сложных кривых колебаний непосредственно во время процесса торсиографирования.

Особенное развитие получило тензометрирование при помощи проволочных тензометров сопротивления, наклеиваемых на исследуемый вал. Тензодатчики могут быть наклеены в малодоступных участках вала, например, в сверлениях коленчатого вала, в впадинах зубьев зубчатых колес и т. п., что значительно расширяет возможности экспериментального исследования.

В отличие от измерений торсиографом, при помощи которого напряжение в опасном сечении определяется косвенным путем, т. е. путем пересчета амплитуд колебаний, найденных в сечении вала, где производилось торсиографирование (по форме колебаний), тензометрирование в ряде случаев дает возможность получить амплитуды напряжений непосредственно в опасном сечении валопровода. Это существенно повышает точность измерений.

Механические и электрические торсиографы также довольно часто применяются при исследованиях крутильных колебаний валопроводов. К недостаткам торсиографов следует отнести и то, что они записывают только амплитуды колебаний в торсиографируемом сечении, в то время как наибольший интерес в большинстве случаев представляет знание амплитуд напряжений в вале. Торсиографы целесообразно применять в случаях, когда в установке имеется свободный торец вала (на переднем конце двигателя, редуктора), а валопровод не имеет свободного участка для наклеивки тензодатчиков и монтажа аппаратуры. В некоторых случаях свободные участки имеются лишь в таких местах системы, где исследуемая форма колебаний обуславливает малые деформации, не обеспечивающие достаточной точности замеров.

В современных силовых установках часто применяются различные эластичные муфты, например, резиновые. В этих случаях необходимым элементом испытаний судового валопровода является определение деформаций, возникающих в муфте при крутильных колебаниях. Для этой цели служат электрический и механический торсиометры, которые измеряют линейное перемещение ведомой части муфт по отношению к ведущей. Разделив величину этого перемещения на радиус установки рычажка торсиометра и крутильную податливость муфты, получим величину эластического момента в муфте, необходимого для оценки нагрузки, испытываемой ее эластичными элементами, и для определения напряжений в опасных сечениях валопровода (по форме колебаний).

Регистрация исследуемых при помощи электрических приборов процессов производится обычно шлейфными осциллографами, например марок Н-700, К-12-21, К-105 и др. В частности, осциллограф К-105 удобен тем, что при торсиографировании процесс проявления и фиксирования записи производится при обычном свете и без применения химических реактивов. Во многих организациях все большее распространение приобретает запись колебаний на магнитную ленту магнитофона. Магнитная аппаратура позволяет вести длительную запись в течение нескольких часов и многократно воспроизводить ее для последующего анализа и регистрации на шлейфный осциллограф.

В последующем изложении дается краткое описание аппаратуры, применяемой при измерениях крутильных колебаний судовых валопроводов. С несколько большими подробностями описывается та современная аппаратура, которая еще не нашла достаточного освещения в литературе.

### § 92. Тензометрирование

**Сущность тензометрирования.** Как указывалось выше, датчиком при тензометрировании является проволочный тензометр сопротивления. Применение тензометров для исследования напряженного состояния основано на изменении относительного электрического сопротивления проволоки  $\Delta R/R$ , пропорционального ее относительной деформации  $\Delta l/l$ . Проволочный тензометр (см. рис. 89,а) представляет собой проводник в виде нескольких петель 1 из тонкой, чаще константовой проволоки диаметром  $0,02 \div 0,05$  мм, концы которой припаиваются к проводникам 2, идущим на приемную часть аппаратуры. Датчик наклеивается на поверхность 3 вала специальным клеем, например, БФ-2, через тонкую изоляционную бумагу 4. Длина петель, называемая базой датчика, составляет 10—20 мм (в некоторых случаях применяют датчики с базой 2—5 мм). В последние годы все большее применение находят



фольговые датчики (см. рис. 89, б) в виде решетки, имеющей базу (3—20) мм, изготавливаемой травлением из тонкой константановой фольги толщиной (0,001 ÷ 0,01) мм. В настоящее время начинают внедряться также полупроводниковые тензодатчики, которые имеют значительно больший коэффициент тензочувствительности  $k = \frac{\Delta R}{R} : \frac{\Delta l}{l}$ , что дает возможность использовать их без специальной усилительной аппаратуры.

Точность и надежность работы тензодатчиков в значительной мере зависят от качества их наклейки. Поверхность вала перед наклейкой тензодатчиков должна быть тщательно очищена от грязи и жира и обработана наждачной бумагой. При наклейке тензодатчика на вал клеем БФ-2 должен быть выдержан температурный режим его сушки путем постепенного повышения температуры исследуемого вала в месте наклейки датчика до 180° С. Так как обеспечение этого режима в судовых условиях часто бывает затруднительным, то применяют способ наклейки тензодатчика на специальной подложке из металлической фольги толщиной (0,1 ÷ 0,15) мм. Наклеенный на подложку датчик проходит температурную обработку в лабораторных условиях, после чего подложка приваривается к поверхности вала точечной электросваркой.

Принцип измерения напряжений при помощи тензодатчиков заключается в следующем. На поверхность исследуемого вала наклеивают два или четыре тензодатчика под углом 45° к оси вала, составляющие полумост или мост Уитстона. При скручивании вала поверхностные волокна металла растягиваются или сжимаются, одновременно деформируется проволока тензодатчиков, что вызывает изменение ее электрического сопротивления. По измеряемой диагонали моста Уитстона будет проходить ток, величина которого изменяется пропорционально скручиванию вала. Этот ток снимается специальным токосъемником, усиливается и подается на шлейф осциллографа.

**Аппаратура, применяемая при тензометрировании.** При измерении напряжений во вращающихся валах возникают большие затруднения в осуществлении токосъема, так как помехи, создаваемые токосъемным устройством, часто бывают соизмеримы с величиной полезного сигнала от тензодатчиков. Это нарушает достоверность показаний.

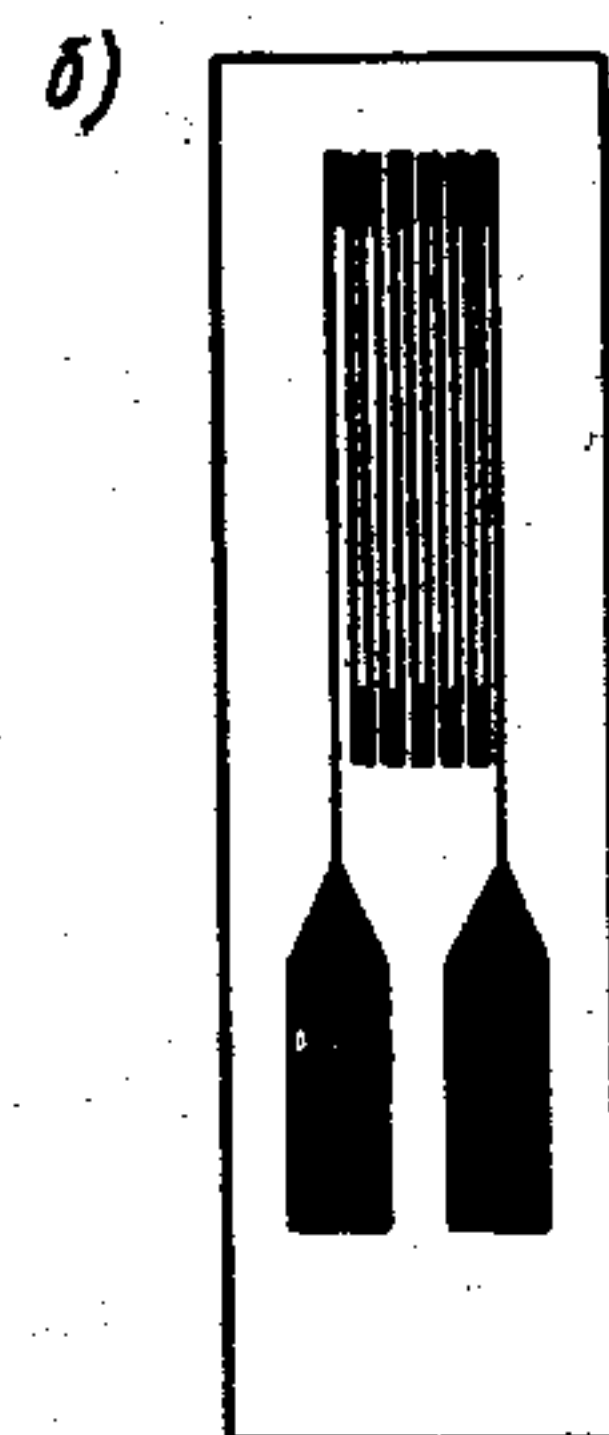
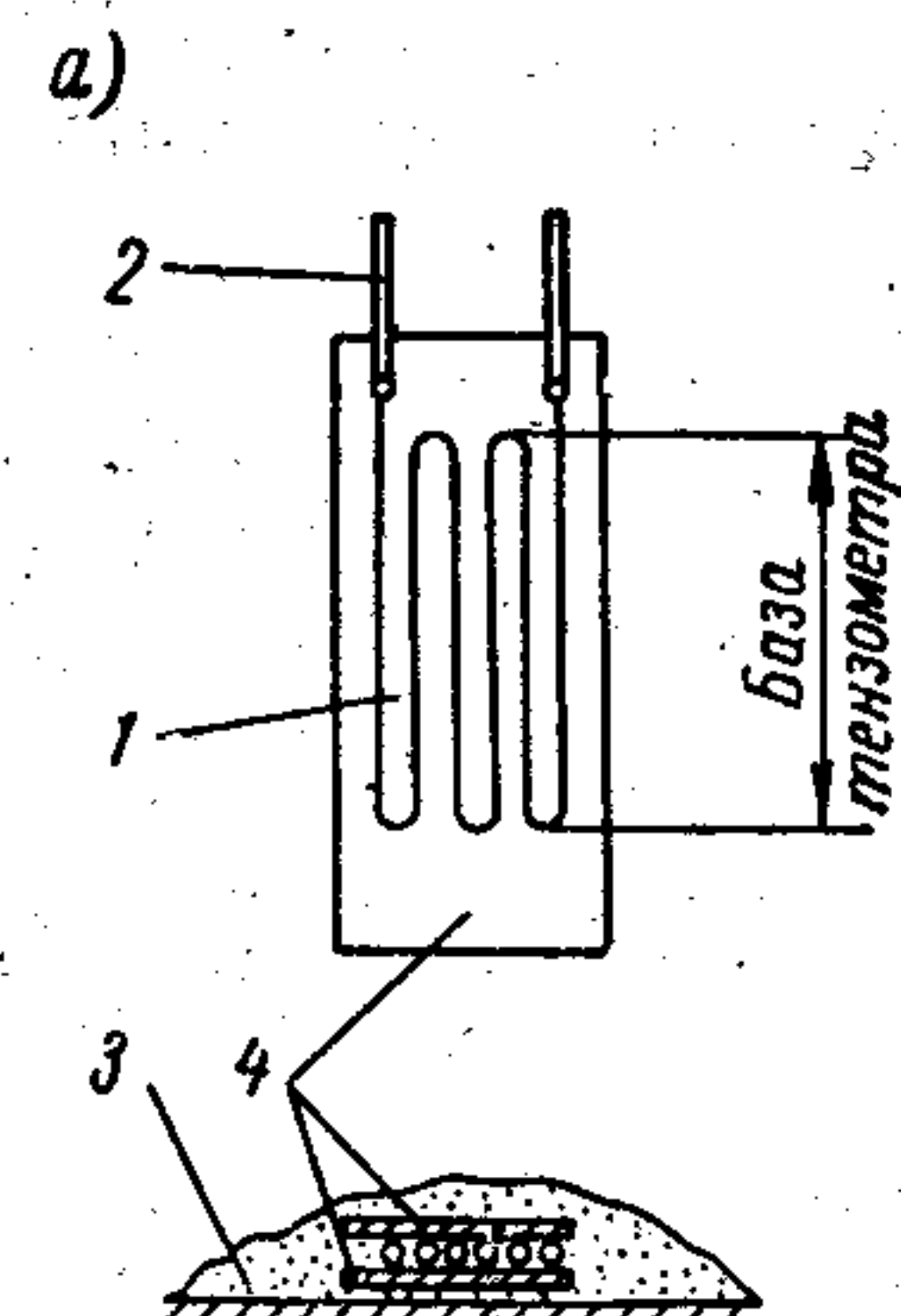


Рис. 89. Схемы тензометров: а — проволочного, б — фольгового.

В судовых установках, имеющих свободный торец, доступный для размещения токосъемника (торсионный вал привода редуктора или вспомогательных механизмов двигателя, вал ведущей шестерни

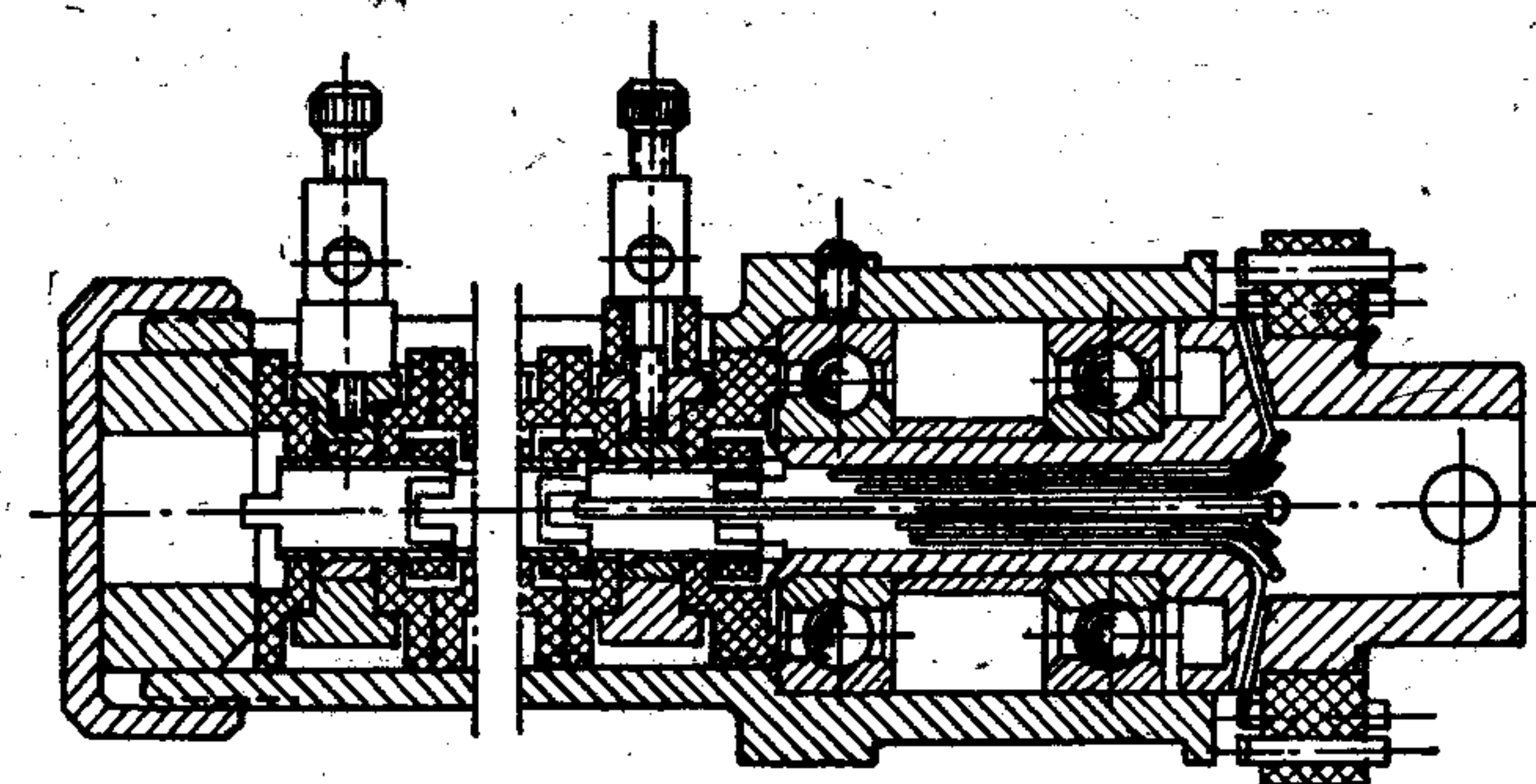


Рис. 90. Ртутный токосъемник.

конической передачи крыльчатого движителя и т. п.), электрическая связь проволочных датчиков с измерительной аппаратурой осуществляется при помощи ртутного торцового токосъемника.

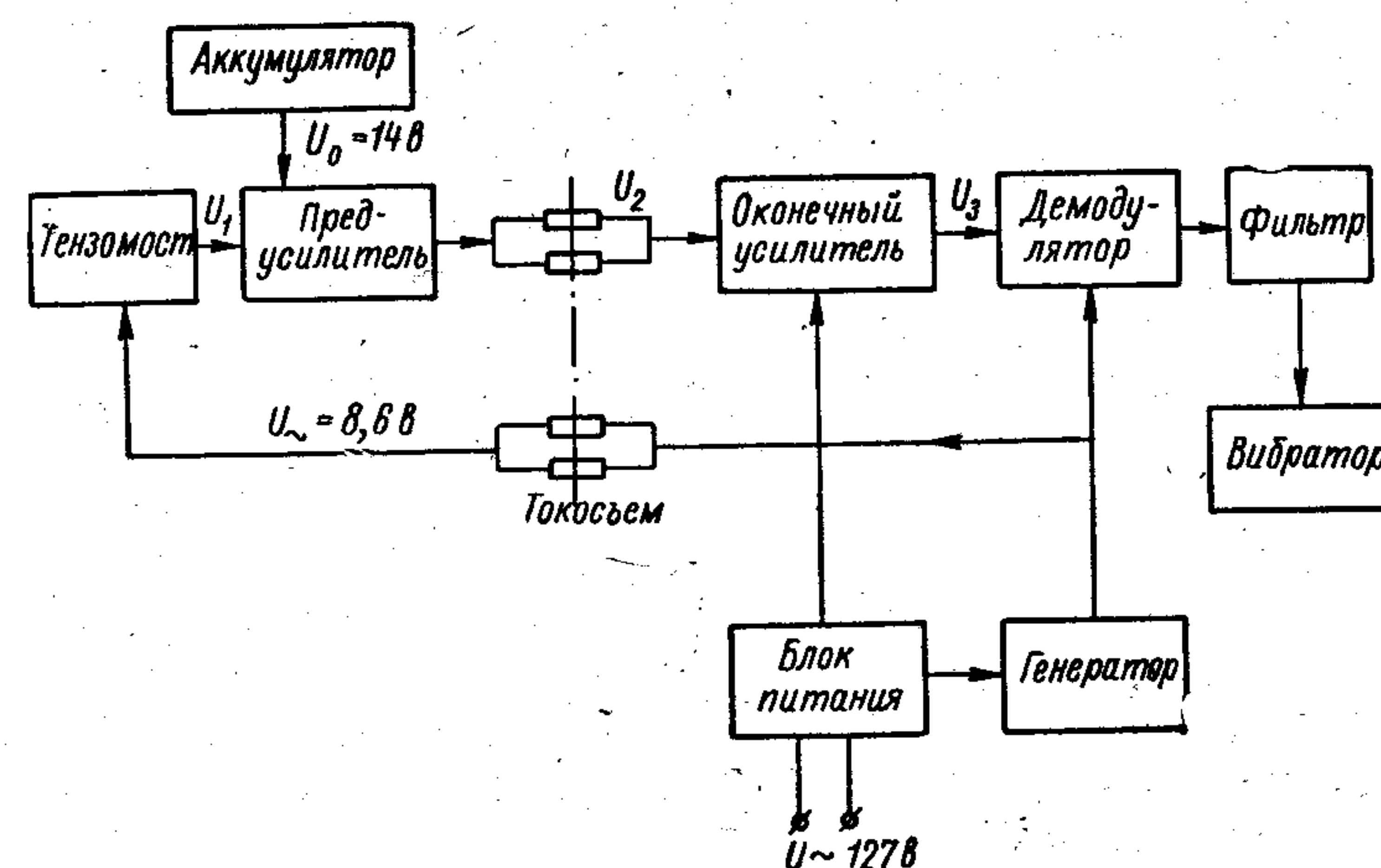


Рис. 91. Блок-схема аппаратуры ТСС (тензостанция специальная щеточная) с предварительным усилителем и щеточным токосъемом.

Одна из конструкций такого токосъемника изображена на рис. 90. [58]. При тензометрировании с ртутным токосъемником применяются стандартные тензометрические усилители, например, типа ТА-5 (четырёхканальный, работающий на несущей частоте 7 кгц и имеющий рабочий диапазон частот 0 ÷ 1000 гц).



Современный судовой валопровод, как правило, не имеет свободных торцов для установки ртутного токосъемника, поэтому в последние годы нашла применение разработанная Ленинградским механическим институтом тензометрическая аппаратура с предварительным усилителем, вращающимся вместе с валом. На рис. 92 изображена блок-схема этой аппаратуры. Электрический сигнал переменного тока  $U_1$  подается с тензометрического моста на предварительный усилитель, собранный на полупроводниках. Здесь сигнал усиливается до значения  $U_2 = 260 U_1$  и через токосъемные кольца

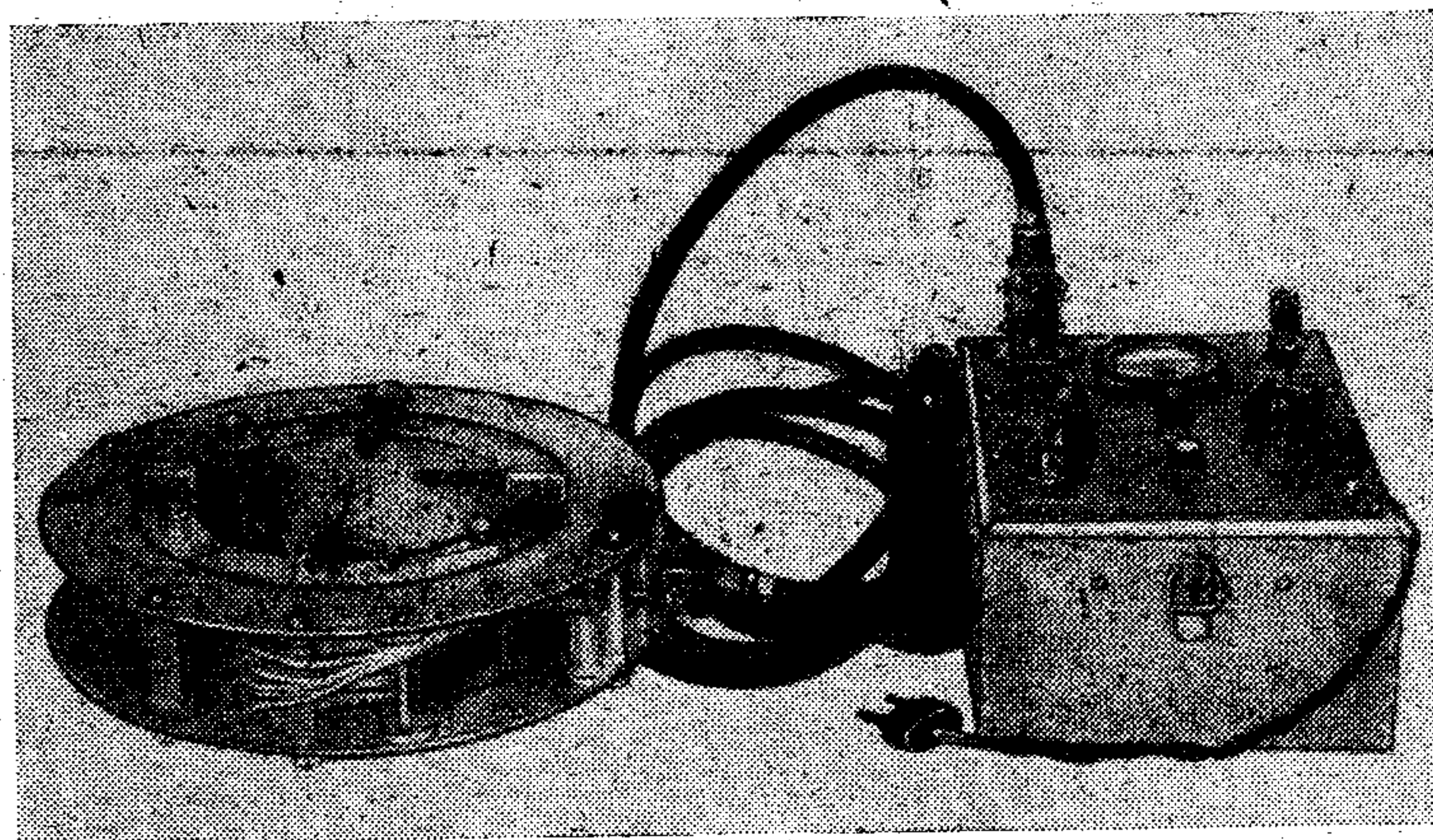


Рис. 92. Тензостанция ТСЩ с токосъемным кольцом.

подается на ламповый усилитель. С выхода усилителя сигнал подается на демодулятор, затем на фильтр и вибратор магнитного электрического осциллографа. Аппаратура питается от сети переменного тока  $U = 127$  в,  $I = 14$  ма и от блока питания от аккумуляторов  $U_0 = 14$  в. Генератор вырабатывает синусоидальное напряжение частоты  $f = 2$  кГц для питания тензометрического моста и демодулятора. Блок питания обеспечивает стабилизированное напряжение анодных и накальных цепей генератора и оконечного усилителя.

На исследуемом валу устанавливается тензомост, предварительный усилитель, аккумулятор и кольцо токосъема. Щетки же токосъема и остальные части аппаратуры неподвижны. Общий вид тензостанции с токосъемным кольцом показан на рис. 92.

Неподвижная часть представляет собой металлический кожух, внутри которого расположены два блока: блок оконечного каскада усиления, демодулятора и генератора и блок питания. На верхней плате кожуха расположены приборы контроля работы и балансировки, тумблеры включения питания, клеммы и разъемы. Подвижная часть устанавливается на вращающемся валу и состоит

разъемной муфты, на которой снаружи укреплены четыре латунных токосъемных кольца и два щеткодержателя (по восемь медно-графитовых щеток в каждом), а внутри — предварительный усилитель, блок аккумуляторов, регулировочные сопротивления и переключатель. Муфта используется также для центрирования обода с щеткодержателями и разъемом.

К валу муфта крепится с помощью восьми установочных штифтов. Муфты изготавливаются четырех размеров для тензометрирования валов, имеющих диаметры  $(50 \div 160)$  мм;  $(150 \div 310)$  мм;  $(300 \div 460)$  мм и  $(450 \div 700)$  мм. Аппаратура имеет один канал измерений и предназначена для измерения напряжения в валах в пределах  $\tau = (20 \div 2500)$  кгс/см<sup>2</sup> при окружной скорости вала до  $30$  м/сек и частотах от  $0$  до  $10\,000$  кол/мин. Длина участка вала для установки муфты составляет  $(100 \div 150)$  мм.

Работы по дальнейшему совершенствованию измерительной аппаратуры, применяемой при тензометрировании вращающихся валов, ведутся в направлении осуществления бесконтактного съема сигналов. К настоящему времени созданы опытные образцы такой аппаратуры, которые успешно применяются. На вращающемся валу устанавливается предварительный усилитель и передатчик. Неподвижная часть состоит из приемника, оконечного усилителя и шлейфного осциллографа. Бесконтактная связь между передающей системой и приемной осуществляется по принципу емкостного высокочастотного перехода через обычную штыревую антенну. В другом варианте данной аппаратуры при передаче сигналов используется индуктивный метод, по которому на вращающемся валу устанавливается передающая катушка, а на расстоянии  $(60 \div 100)$  мм от вала — приемная катушка.

### § 93. Электрические и механические торсиографы и торсиометр

Запись крутильных колебаний торсиографами основана на так называемом сейсмическом принципе. Приемная часть торсиографов в виде валика или легкого шкива присоединяется к исследуемому валу, вращается и колеблется вместе с ним. С приемной частью (через эластичные пружины) соединяется маховик, который вращается почти равномерно. Получающаяся разность движений приемной части и маховика, обусловленная крутильными колебаниями вала, в электроторсиографах преобразуется в электрический сигнал и фиксируется шлейфным осциллографом, а в механических торсиографах через систему угловых рычагов передается на регистрирующее перо или иглу торсиографа.

Электрический торсиограф ЭТ-1. ВНИИ Министерства транспортного машиностроения СССР в 1952 г. разработан электроторсиограф, который успешно применяется в ряде организаций. Схема этого торсиографа показана на рис. 93. Валик 3 торсиографа жестко



связан с торсиографируемым валом при помощи фланца 1 и чашки 5. Маховик 4 соединяется с валиком плоскими пружинами 6, на которые наклеиваются проволочные тензодатчики. В результате колебательного движения валика относительно маховика пружина изгибается; вместе с нею деформируются тензометры 2 и изменяется величина тока (пропорционально изменению деформации пружины).

Торсиограф устанавливается на дополнительном валике диаметром 30 мм, жестко присоединяемом к торцу исследуемого вала. Токосъемник имеет четыре латунных кольца, щетки изготовлены из бериллиевой бронзы. Запись осуществляется шлейфным осциллографом. Торсиограф предназначен для записи колебаний с ча-

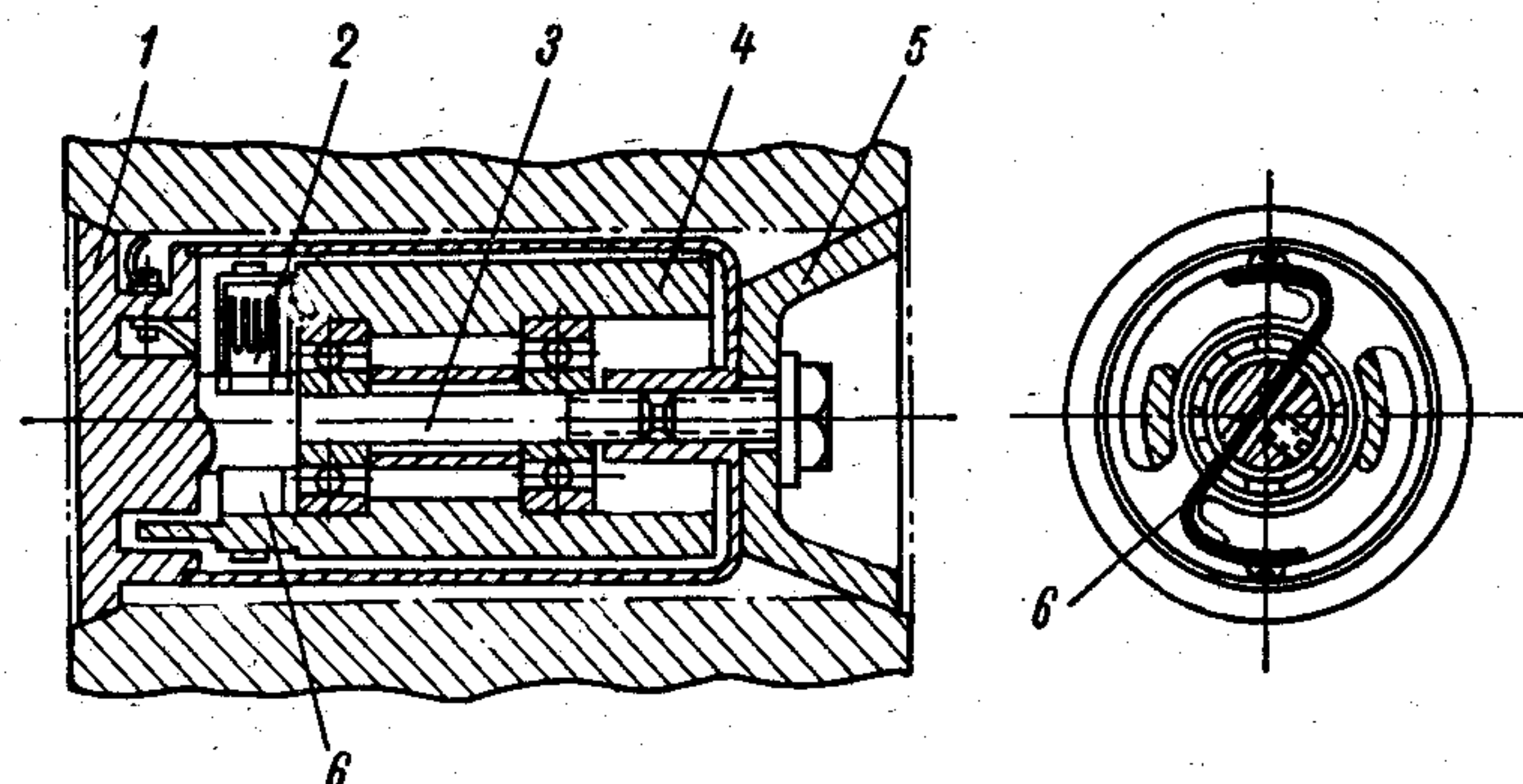


Рис. 93. Электроторсиограф ЭТ-1.

стотой (800—9000) кол/мин при амплитуде до 0,1 радиана. Верхний предел числа оборотов торсиографируемого вала — 2000 об/мин.

**Электрический торсиограф типа 51Д07.** Этот торсиограф, изготавливаемый датской фирмой «Диза Электроник» и показанный на рис. 94, создан на принципе преобразования угловых механических перемещений в пропорциональное им изменение электрической емкости. Валик 1 датчика через муфту 2 соединяется с торцом исследуемого вала. На валике смонтирован на подшипниках маховичок 3, упруго связанный с ним пружинами 4. При крутильных колебаниях исследуемого вала происходит перемещение маховичка относительно вала датчика, которое используется при емкостной передаче измеряемой величины. С этой целью на валике помещена одна половина электрического конденсатора 5 и на маховичке — другая. Возникающее при колебаниях изменение емкости передается на другой конденсатор 6, выполняющий роль бесконтактного токосъема: одна половина его вращается вместе с валиком, а другая расположена изолированно на невращающемся корпусе 7. Выходной сигнал от торсиографа поступает к специальному блоку (осуществляющему частотную модуляцию, демодуляцию и усиление) и далее — к осциллографу. Кроме измерительной системы,

в торсиограф вмонтирован индукционный отметчик оборотов. Торсиограф дает возможность измерять амплитуды крутильных колебаний до 0,035 рад. в пределах частот (18 ÷ 1500) гц при числе оборотов исследуемого вала до 10 000 об/мин.

**Электрический торсиометр ВИ-1.** Для записи деформаций упругих муфт применяется электрический торсиометр ВИ-1, разработанный Ленинградским институтом авиационного приборостро-

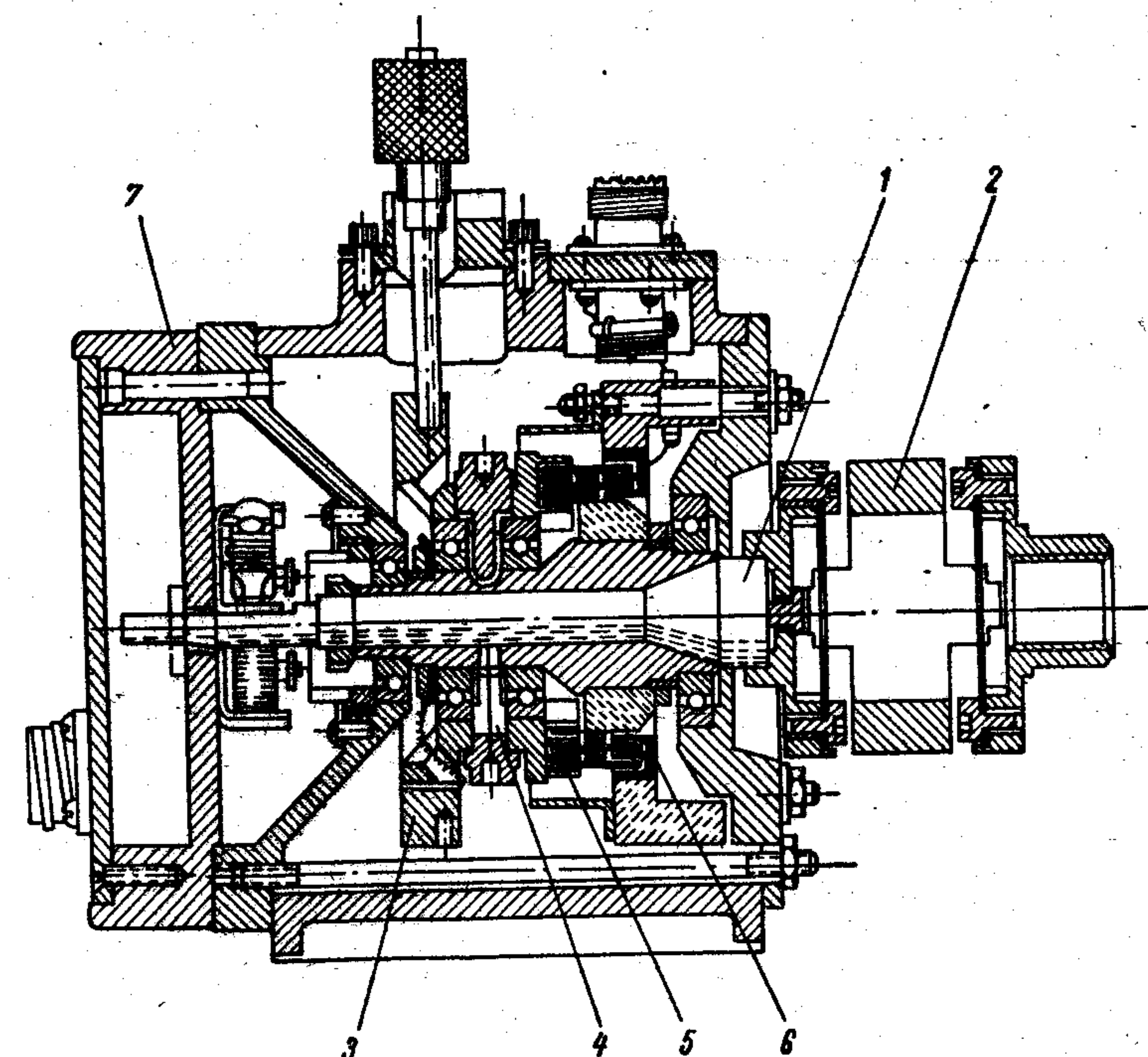


Рис. 94. Электроторсиограф 51Д07.

ния (рис. 95,б). На одной из половин муфты 2 укрепляется индуктивный датчик 5 типа сельсина, работающего в трансформаторном режиме, к которому через пару токосъемных колец 10 подводится ток несущей частоты от машинного преобразователя 6. В подвижной части 4 сельсина (связанной поводком 3 с другой половиной муфты 1 и копирующей деформацию муфты) этот ток модулируется и отводится через вторую пару колец 9 токосъемника к фазочувствительному выпрямителю 7 и далее к шлейфному осциллографу 8.

Торсиограф ВИ-1 приспособлен для записи колебаний с частотой до 5000 кол/мин и линейной амплитудой деформации муфты от 0,1 до 8 мм.

**Механические торсиографы Гейгера и Попова.** Данные торсиографы применяются уже десятки лет. Они общеизвестны и широко







освещены в отечественной и зарубежной литературе, поэтому приведем по ним лишь самые общие данные. Интересующиеся более подробно этими приборами могут найти достаточно подробное описание их в работе [58].

Торсиограф Гейгера (см. рис. 96) надежен и прост в эксплуатации, дает запись колебаний, удобную для обработки. Обычно он используется для записи колебаний при частотах  $N = (50 \div 5000)$  кол/мин при числах оборотов вала до 800 — 1000 об/мин. Имеется быстроходная модель торсиографа, позволяющая производить запись колебаний с частотой до 10 000 кол/мин, однако она применяется довольно редко. Торсиограф может быть присо-

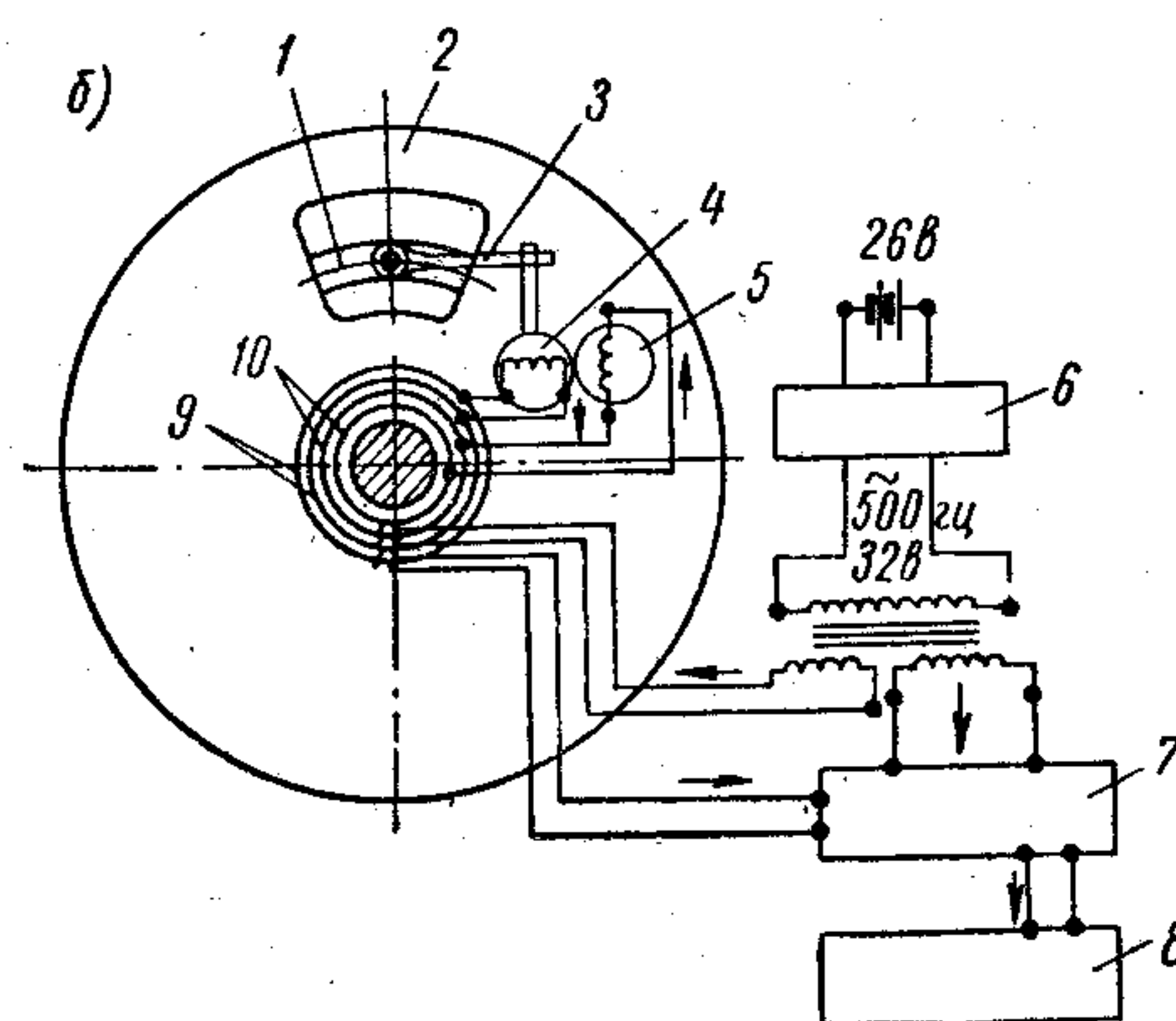
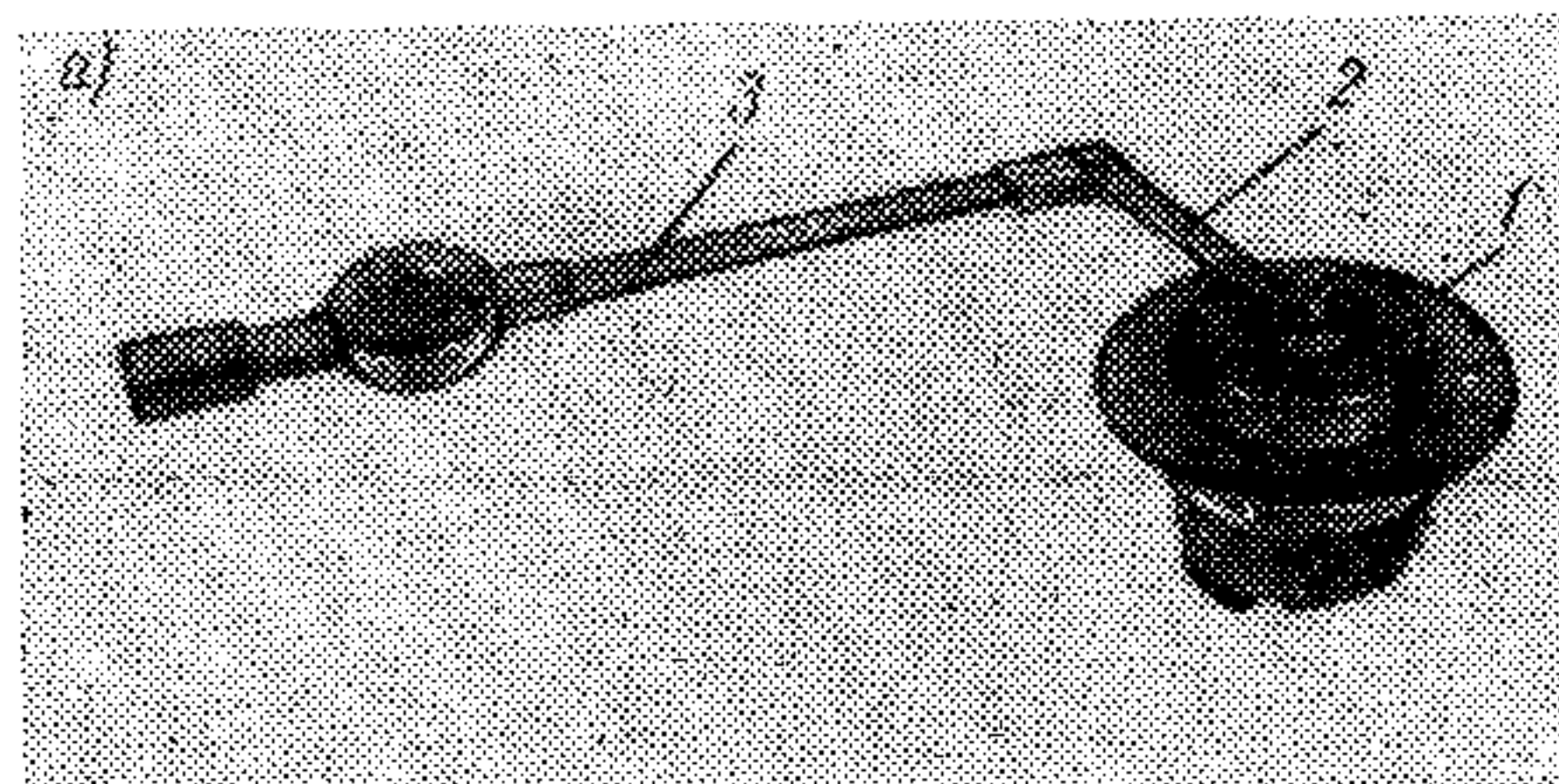


Рис. 95. Электроторсиометр ВИ-1.

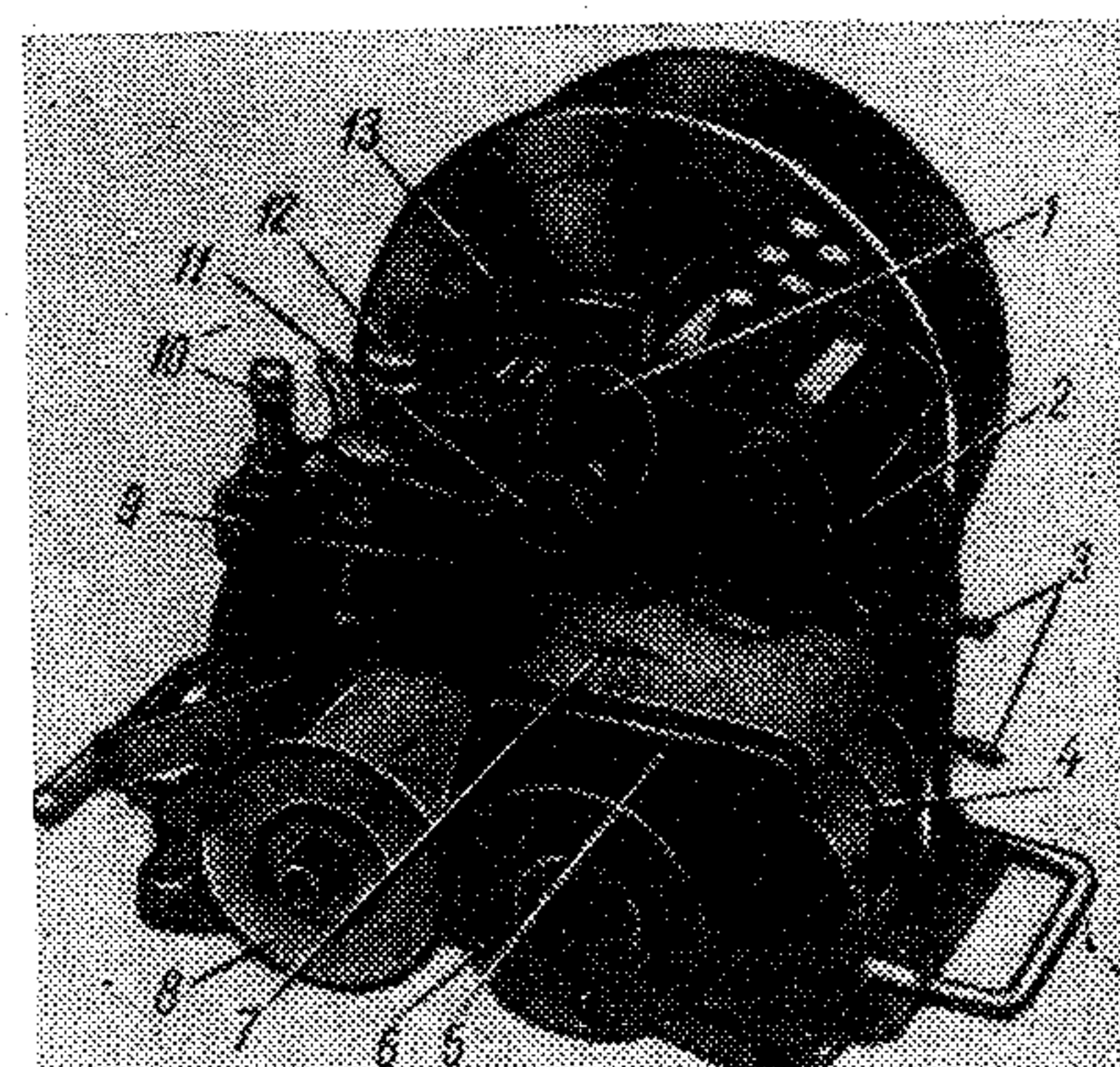


Рис. 96. Торсиограф Гейгера.

единен к торцу вала при помощи жесткого привода или к участку вала через ременной привод.

Приемная часть, соединяющаяся с торсиографируемым валом, состоит из легкого алюминиевого шкива 13 и тяжелого маховика. Оба они сидят на одной оси и связаны между собой спиральной пружиной. При торсиографировании движение шкива относительно маховика передается через угловые рычаги на регистрирующее перо 7. Запись колебаний производится на бумажной ленте 5, которая перематывается через столик с ведомого барабана 8 на ведущий 6. Кроме того, в приборе имеется отметчик времени 1 с грузиком 11, отметчик оборотов 2, рычаги 3 и 10 управления скоростью перематывания ленты, меловой валик 4, винт 12 для регулирования нажима регистрирующего пера на бумагу и цилиндрическая

пружина 9 для установки пишущего конца пера на середине ленты. Соотношение плеч рычагов и пера подобрано так, что масштаб записи обеспечивает получение четких кривых. Он изменяется в пределах от 1 : 3 до 24 : 1.

Торсиограф Н. И. Попова (рис. 97) применяется для записи колебаний при частотах  $N = 1000 - 10\,000$  кол/мин и при числах оборотов вала до 2500 об/мин. Торсиограф устанавливается на двух конических центрах, один из которых входит в центр торца исследуемого вала, а другой — в специальную стойку с противо-

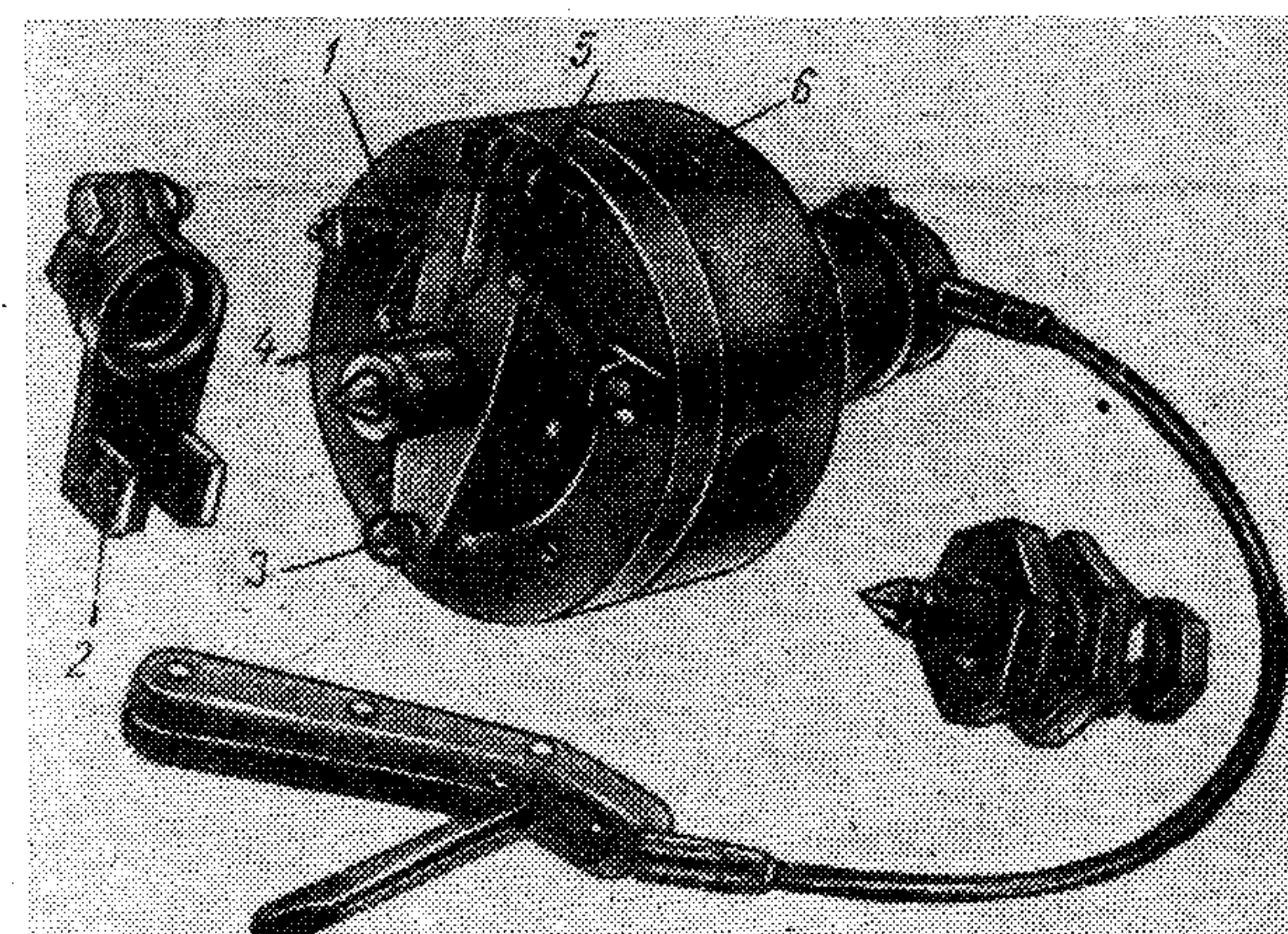


Рис. 97. Торсиограф Попова.

положной стороны прибора. Передача вращения и крутильных колебаний вала осуществляется через поводок 2, в две параллельные плоскости которого входит (с малым зазором) шарик 3, сидящий на диске 4 прибора. Маховой массой здесь является корпус прибора 6, соединенный с диском двумя цилиндрическими пружинами 1. Движение диска относительно маховика прибора фиксируется на целлулоидной ленте иглой 5. В торсиографе имеется еще одна игла, осуществляющая на ленте отметку времени, соответствующую частоте переменного тока электросети, и отметку оборотов (за десять оборотов исследуемого вала одна отметка).

#### § 94. Торсиографирование судового валопровода

**Общие соображения.** Обычно под тензометрированием понимают запись напряжений при помощи тензодатчиков сопротивления, а под торсиографированием — запись колебательного процесса торсиографами или торсиометрами. В последующем изложении условимся объединять оба эти понятия в одно — торсиогра-



фирование, под которым будем понимать измерение и запись крутильных колебаний вращающегося и одновременно крутильно колеблющегося вала.

По правилам классификационных обществ (Английского Ллойд Регистр СССР и др.) и по ведомственным нормам валопроводы вновь строящихся головных судов обязательно должны быть проторсионированы. Это требование вызывается необходимостью опытной проверки расчетных данных по частотам свободных колебаний и амплитудам вынужденных резонансных и нерезонансных колебаний. Дело в том, что при расчете частот свободных колебаний не исключена возможность ошибки при определении параметров схемы системы. Кроме того, хотя в последние годы точность вычислений амплитуд резонансных колебаний значительно повысилась, однако погрешности в определении демпфирующих моментов в элементах судового валопровода еще не дают возможности освободиться от проверки расчетных данных торсионированием.

Перед торсионированием (по данным расчета установки на крутильные колебания) определяется число мест торсионирования (обычно не более трех) и соответствующая аппаратура. Из сечений вала, доступных для установки прибора, выбираются такие, в которых, судя по расчетной форме свободных колебаний, ожидаются наибольшие значения измеряемых амплитуд.

При подготовке аппаратуры к торсионированию необходимо строго руководствоваться соответствующими инструкциями по ее обслуживанию, в которых дается перечень и порядок проведения подготовительных и наладочных операций. В соответствии с данными расчета и с учетом паспортных характеристик аппаратуры устанавливается необходимое усиление, выбирается тип шлейфа осциллографа, устанавливается масштаб записи, производится тарировка аппаратуры.

Торсионирование проводится при медленном и плавном повышении чисел оборотов от минимально-устойчивых до максимально возможных и последующем снижении их до полной остановки двигателя. Для определения резонансов необходимо иметь непрерывную запись колебаний исследуемого сечения вала во всем рабочем диапазоне чисел оборотов двигателя. В районе чисел оборотов, при которых развиваются сильные резонансы, для уточнения картины развития колебаний производится дополнительное торсионирование при очень медленном проходе. Необходимым дополнением к торсионированию является также запись колебаний во время пуска и остановки двигателя, охватывающая диапазон низких чисел оборотов и неустойчивой работы двигателя.

В установках, у которых крутильные характеристики при переднем и заднем ходе различны, следует дополнительно провести торсионирование при движении задним ходом. Торсионирование производится, как правило, при максимальных нагрузках двигателя, а в судовых установках с винтом регулируемого шага

или с крыльчатым двигателем — также при долевых нагрузках (0, 25, 50, 75%).

**Обработка торсионграмм.** Обработка материалов торсионирования требует особой тщательности всех измерений: амплитуд колебаний, чисел оборотов, порядков колебаний и т. п. На месте испытаний проводят обычно лишь предварительную обработку, цель которой — определение наиболее опасных колебаний в исследуемой установке и составление предварительного заключения по расположению запретных зон чисел оборотов двигателя. Кроме того, проверяется зарегистрированы ли на торсионграммах максимальное число оборотов двигателя и процессы пуска и остановки, а также просматривается качество регистрации процесса, отметок оборотов и времени. В случае необходимости (по результатам предварительной обработки) решается вопрос о проведении дополнительного торсионирования.

Детальную обработку торсионграмм следует производить согласно рекомендациям, разработанным В. П. Терских (см. [58]), по которым сначала нумеруются по порядку все циклы колебаний, записанные пером отметчика оборотов, на каждом десятом или двенадцатом цикле измеряются размахи колебаний и определяются числа оборотов, и строится контрольный график. При построении этого графика по оси абсцисс откладываются циклы колебаний, а по оси ординат числа оборотов и размахи колебаний. Контрольный график переносится на обычно представляемый график, в котором по оси абсцисс откладываются числа оборотов, а по оси ординат — амплитуды колебаний в радианах или амплитуды напряжений в  $\text{кг/см}^2$ . Построение контрольного графика повышает точность обработки торсионграмм, так как позволяет корректировать измерение времени и оборотов, а также исключать случайные ошибки.

При обработке торсионграмм, полученных прибором Гейгера, применяется специальный шаблон, координирующий запись трех перьев торсионграфа: главного пера, перьев отметчика оборотов и времени [58, стр. 31]. Торсионграммы прибора Попова, ввиду малых размеров записи, перед обработкой предварительно увеличивают (примерно в десять раз) обычным фотоувеличителем.

Следующий этап обработки — определение действительных напряжений в наиболее нагруженных участках системы. Если напряжения в этих участках не измерялись непосредственно, при помощи тензодатчиков, то их вычисляют по данным торсионирования. Для этого используют форму свободных колебаний. Предварительно следует убедиться, что частоты свободных колебаний, полученные расчетом и торсионированием,\* не отличаются друг от друга более чем на (2 ÷ 5%). Если это расхождение оказывается большим, то проверяют правильность определения параметров

\* За частоту свободных колебаний, полученную торсионированием, принимают частоту, при которой отмечены наибольшие амплитуды колебаний.



системы, вносят соответствующие коррективы, вычисляют уточненную форму колебаний и масштабы напряжений (§ 30).

В большинстве случаев форма записанной на торсиограмме кривой бывает довольно сложной, она состоит из суммы гармоник различных порядков и форм колебаний. Поэтому кривую записанных колебаний нужно сначала разложить на синусоидальные составляющие, для которых в расчете уже имеются масштабы напряжений. Разложение осуществляется обычно приближенно по образцам и номограммам, приведенным в работе [58] или [19], однако в ряде случаев приходится прибегать к специальным электрическим или механическим анализаторам.

При обработке торсиограмм число оборотов двигателя определяется по формуле

$$n = \frac{k}{z} N_{\text{в}} \text{ об/мин,}$$

где  $N_{\text{в}}$  — частота колебаний отметчика времени осциллографа или вибратора-торсиографа Гейгера кол/мин;  
 $k$  — число оборотов, составляющее один цикл измерения;  
 $z$  — число отметок отметчика времени или волн вибратора в пределах этого цикла.

Амплитуды напряжений в валу при торсиографировании с тензодатчиками определяются по графику статической тарировки, представляемому обычно в виде зависимости  $H = f(\tau_{\text{т}})$ , где  $H$  мм — отклонение тарировочных меток на ленте осциллографа,  $\tau_{\text{т}}$  кГсм<sup>-2</sup> — соответствующее ему напряжение. Как правило, эта зависимость прямолинейная и поэтому на практике часто определяют амплитуды напряжений по формуле

$$\tau = \frac{h}{2} k \text{ кГсм}^{-2},$$

где  $h$  мм — размах колебаний записываемого процесса на торсиограмме (осциллограмме);

$$k = \frac{\tau_{\text{т}}}{H} \text{ кГсм}^{-2}/\text{мм} \text{ — масштаб записи.}$$

Амплитуды колебаний по торсиограммам, полученным при помощи торсиографов ЭТ-1 и «Диза Электроник», определяются формулой

$$A = \frac{h}{2} k_{\text{т}} \text{ рад,}$$

где  $h$  мм — размах колебаний записываемого процесса на торсиограмме;

$$k_{\text{т}} = \frac{\alpha_{\text{т}}}{H} \text{ рад/мм} \text{ — масштаб записи, определяемый по данным тарировки;}$$

$\alpha_{\text{т}}$  — тарировочная закрутка торсиографа;

$H$  мм — отметка на осциллограмме, соответствующая тарировочной закрутке.

Амплитуды колебаний по торсиограммам прибора Гейгера определяются по формуле

$$A = \frac{h-b}{id} \text{ рад,}$$

где  $A$  рад — амплитуда колебаний торсиографируемого сечения вала;

$h$  мм — размах (удвоенная величина амплитуды) колебаний на торсиограмме;

$b = (0,3 \div 0,4)$  мм — толщина линии основной записи;

$d$  мм — диаметр торсиографируемого сечения вала (для случая торсиографирования с жестким приводом принимается  $d = 148$  мм — обычный размер шкива торсиографа);

$i$  — масштаб увеличения торсиографа.

**Заключение по торсиографированию.** Последним этапом торсиографирования является составление заключения. На графики, построенные по результатам обработки торсиограмм,  $\tau_{\text{т}, \text{т}+1} = f(n)$  или  $A_{\text{т}} = f(n)$  и  $B_{\text{т}, \text{т}+1} = f(n)$ , наносим кривые допускаемых амплитуд колебаний и отмечаем участки, лежащие выше кривой допускаемых амплитуд. Точки пересечения этих кривых определяют запретные зоны. Числа оборотов в пределах намеченных запретных зон объявляются недопустимыми для постоянной работы двигателя. Работа же двигателя на границах запретной зоны разрешается.

По итогам торсиографирования составляется отчет, в котором должно быть изложено целевое назначение данного торсиографирования, тип и места установки аппаратуры, результаты обработки и анализа торсиограмм, выводы. В отчете должны быть помещены все дополнительные расчеты, которые были выполнены при анализе материалов торсиографирования, а также результаты сопоставления расчетных и опытных данных по частотам, порядкам и амплитудам колебаний. К отчету прикладываются графики, построенные по результатам обработки торсиограмм в виде зависимости амплитуд колебаний от чисел оборотов двигателя, тарировочные кривые и наиболее интересные образцы торсиограмм.



Таблица 1

ПРИЛОЖЕНИЯ  
Таблица обратных величин

100	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	400	0	2	4	6	8	700	0	2	4	6	8
00	909	990	980	971	962	952	943	935	926	917	00	250	249	248	246	245	00	143	142	142	142	141
10	833	901	893	885	877	870	862	855	847	840	10	244	243	242	240	239	10	141	140	140	140	139
20	769	826	820	813	806	800	794	787	781	775	20	238	237	236	235	234	20	139	138	138	138	137
30	714	763	758	752	746	741	735	730	725	719	30	233	231	230	229	228	30	137	136	136	136	136
40	667	709	704	699	694	690	685	680	676	671	40	227	226	225	224	223	40	135	135	134	134	134
50	625	662	658	654	649	645	641	637	633	629	50	222	221	220	219	218	50	133	133	133	132	132
60	588	621	617	613	610	606	602	599	595	592	60	217	216	216	215	214	60	132	131	131	131	130
70	556	585	581	578	575	571	568	565	562	559	70	213	212	211	210	209	70	130	130	130	129	129
80	524	552	549	546	543	541	538	535	532	529	80	208	207	207	206	205	80	128	128	128	127	127
90	498	524	521	518	515	513	510	508	505	503	90	204	203	202	202	201	90	127	126	126	126	125
200	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	500	0	2	4	6	8	800	0	2	4	6	8
00	500	498	495	493	490	488	485	483	481	478	00	200	199	198	198	197	00	125	125	124	124	124
10	476	474	472	469	467	465	463	461	459	457	10	196	195	195	194	193	10	123	123	123	123	122
20	455	452	450	448	446	444	442	441	439	437	20	192	192	191	190	189	20	122	122	121	121	121
30	435	433	431	429	427	426	424	422	420	418	30	189	188	187	186	185	30	120	120	120	120	119
40	417	415	413	412	410	408	407	405	403	402	40	185	185	184	183	182	40	119	119	118	118	118
50	400	398	397	395	394	392	391	389	388	386	50	182	181	181	180	179	50	118	117	117	117	117
60	385	383	382	380	379	377	376	375	373	372	60	179	178	177	177	176	60	116	116	116	115	115
70	370	369	368	366	365	364	362	361	360	358	70	175	175	174	174	173	70	115	115	114	114	114
80	357	356	355	353	352	351	350	348	347	346	80	172	172	171	171	170	80	114	113	113	113	113
90	345	344	342	341	340	339	338	337	336	334	90	169	169	168	168	167	90	112	112	112	112	111
300	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	600	0	2	4	6	8	900	0	2	4	6	8
00	333	332	331	330	329	328	327	326	325	324	00	167	166	166	165	164	00	111	111	111	110	110
10	323	322	321	319	318	318	316	315	314	313	10	164	163	163	162	162	10	110	109	109	109	109
20	303	302	301	300	299	299	297	296	295	294	20	161	161	160	160	159	20	109	108	108	108	108
30	294	293	292	292	291	290	289	288	287	287	30	159	158	158	157	157	30	108	107	107	107	107
40	286	285	284	283	282	282	281	280	279	279	40	156	156	155	155	154	40	106	106	106	106	105
50	278	277	276	275	274	274	273	272	272	271	50	154	153	153	152	152	50	105	105	105	105	104
60	270	270	269	268	267	267	266	265	265	264	60	152	151	151	150	150	60	104	104	104	104	103
70	263	262	262	261	260	260	259	258	258	257	70	149	149	148	148	147	70	103	103	103	102	102
80	256	256	255	254	254	253	253	252	251	251	80	147	147	146	146	145	80	102	102	102	101	101
90	256	256	255	254	254	253	253	252	251	251	90	145	145	144	144	143	90	101	101	101	101	100

Таблица 11

Стойкости системы по группе равных масс  $H_z^{(1)}$

$\Delta$	$H_3^{(1)}$	$H_4^{(1)}$	$H_5^{(1)}$	$H_6^{(1)}$	$H_7^{(1)}$	$H_8^{(1)}$	$H_9^{(1)}$
0,0010	-0,00300	-0,00401	-0,00503	-0,00605	-0,00709	-0,00814	-0,00921
0,0011	-0,00330	-0,00441	-0,00553	-0,00666	-0,00781	-0,00897	-0,01015
0,0012	-0,00360	-0,00482	-0,00604	-0,00728	-0,00853	-0,00980	-0,01110
0,0013	-0,00391	-0,00522	-0,00655	-0,00789	-0,00926	-0,01064	-0,01206
0,0014	-0,00421	-0,00562	-0,00705	-0,00851	-0,00998	-0,01148	-0,01302
0,0015	-0,00451	-0,00603	-0,00756	-0,00912	-0,01071	-0,01232	-0,01398
0,0016	-0,00481	-0,00643	-0,00807	-0,00974	-0,01174	-0,01317	-0,01495
0,0017	-0,00511	-0,00684	-0,00858	-0,01036	-0,01217	-0,01402	-0,01592
0,0018	-0,00541	-0,00724	-0,00909	-0,01098	-0,01290	-0,01485	-0,01689
0,0019	-0,00572	-0,00765	-0,00960	-0,01160	-0,01363	-0,01571	-0,01787
0,0020	-0,00602	-0,00805	-0,01012	-0,01222	-0,01437	-0,01658	-0,01886
0,0022	-0,00662	-0,00886	-0,01115	-0,01347	-0,01586	-0,01832	-0,02086
0,0024	-0,00723	-0,00968	-0,01218	-0,01474	-0,01735	-0,02006	-0,02286
0,0026	-0,00783	-0,01050	-0,01321	-0,01603	-0,01984	-0,02182	-0,02488
0,0028	-0,00844	-0,01131	-0,01424	-0,01723	-0,02034	-0,02358	-0,02694
0,0030	-0,00904	-0,01213	-0,01528	-0,01853	-0,02186	-0,02536	-0,02902
0,0032	-0,00965	-0,01294	-0,01632	-0,01984	-0,02338	-0,02720	-0,03110
0,0034	-0,01026	-0,01376	-0,01736	-0,02106	-0,02492	-0,02894	-0,03220
0,0036	-0,01086	-0,01458	-0,01841	-0,02236	-0,02646	-0,03078	-0,03534
0,0038	-0,01147	-0,01541	-0,01946	-0,02366	-0,02802	-0,03264	-0,03752
0,0040	-0,01208	-0,01623	-0,02050	-0,02492	-0,02956	-0,03448	-0,03970
0,0042	-0,01269	-0,01705	-0,02154	-0,02622	-0,03112	-0,03634	-0,04192
0,0044	-0,01330	-0,01788	-0,02260	-0,02752	-0,03270	-0,03822	-0,04414
0,0046	-0,01391	-0,01870	-0,02366	-0,02884	-0,03428	-0,04112	-0,04638
0,0048	-0,01452	-0,01953	-0,02472	-0,03014	-0,03588	-0,04202	-0,04866
0,0050	-0,01513	-0,02036	-0,02578	-0,03146	-0,03748	-0,04394	-0,05095
0,0055	-0,01665	-0,02244	-0,02846	-0,03478	-0,04154	-0,04884	-0,05680
0,0060	-0,01818	-0,02452	-0,03114	-0,03814	-0,04564	-0,05380	-0,06285
0,0065	-0,01971	-0,02662	-0,03384	-0,04152	-0,04980	-0,05890	-0,06910
0,0070	-0,02124	-0,02872	-0,03656	-0,04494	-0,05405	-0,06405	-0,07555
0,0075	-0,02278	-0,03082	-0,03930	-0,04840	-0,05835	-0,06950	-0,08220
0,0080	-0,02432	-0,03292	-0,04206	-0,05190	-0,06275	-0,07495	-0,08905
0,0085	-0,02588	-0,03504	-0,04484	-0,05545	-0,06720	-0,08055	-0,09610
0,0090	-0,02742	-0,03718	-0,04762	-0,05900	-0,07170	-0,08625	-0,1034
0,0095	-0,02896	-0,03932	-0,05045	-0,06260	-0,07630	-0,09210	-0,1110
0,0100	-0,03052	-0,04148	-0,05325	-0,06625	-0,08095	-0,09810	-0,1188
0,011	-0,03362	-0,04580	-0,05900	-0,07370	-0,09055	-0,1106	-0,1353
0,012	-0,03674	-0,05015	-0,06480	-0,08130	-0,1005	-0,1236	-0,1531
0,013	-0,03988	-0,05450	-0,07070	-0,08905	-0,1108	-0,1375	-0,1724
0,014	-0,04302	-0,05895	-0,07665	-0,09700	-0,1214	-0,1521	-0,1934
0,015	-0,04618	-0,06340	-0,08270	-0,1051	-0,1325	-0,1677	-0,2164



$\Delta$	$H_3^{(1)}$	$H_4^{(1)}$	$H_5^{(1)}$	$H_6^{(1)}$	$H_7^{(1)}$	$H_8^{(1)}$	$H_9^{(1)}$
0,016	-0,04934	-0,06790	-0,08885	-0,1135	-0,1440	-0,1842	-0,2418
0,017	-0,05250	-0,07245	-0,09510	-0,1221	-0,1560	-0,2018	-0,2698
0,018	-0,05570	-0,07700	-0,1014	-0,1309	-0,1686	-0,2208	-0,3012
0,019	-0,05890	-0,08160	-0,1078	-0,1399	-0,1817	-0,2410	-0,3364
0,020	-0,06410	-0,08625	-0,1143	-0,1492	-0,1953	-0,2628	-0,3764
0,022	-0,06855	-0,09560	-0,1278	-0,1684	-0,2244	-0,3114	-0,4742
0,024	-0,07505	-0,1052	-0,1416	-0,1888	-0,2568	-0,3694	-0,6100
0,026	-0,08160	-0,1149	-0,1558	-0,2104	-0,2926	-0,4396	-0,8105
0,028	-0,08822	-0,1248	-0,1705	-0,2336	-0,3326	-0,5265	-1,140
0,030	-0,09490	-0,1349	-0,1858	-0,2582	-0,3780	-0,6880	-1,792
0,032	-0,1016	-0,1451	-0,2016	-0,2846	-0,4300	-0,7865	-3,714
0,034	-0,1083	-0,1555	-0,2180	-0,3130	-0,4896	-0,9930	-146,1
0,036	-0,1151	-0,1661	-0,2352	-0,3436	-0,5595	-1,306	+4,232
0,038	-0,1220	-0,1769	-0,2530	-0,3768	-0,6425	-1,834	+2,160
0,040	-0,1289	-0,1880	-0,2716	-0,4116	-0,7425	-2,948	+1,479
0,042	-0,1359	-0,1993	-0,2908	-0,4522	-0,8675	-6,590	+1,137
0,044	-0,1429	-0,2108	-0,3110	-0,4954	-1,026	+39,42	+0,9330
0,046	-0,1500	-0,2224	-0,3322	-0,5435	-1,236	+5,190	+0,7900
0,048	-0,1572	-0,2346	-0,3544	-0,5965	-1,528	+2,848	+0,6920
0,050	-0,1644	-0,2468	-0,3774	-0,6565	-1,961	+1,991	+0,6155
0,055	-0,1826	-0,2784	-0,4408	-0,8435	-5,440	+1,170	+0,4842
0,060	-0,2014	-0,3120	-0,5135	-1,116	+9,545	+0,8450	+0,3980
0,065	-0,2204	-0,3478	-0,5980	-1,553	+2,742	+0,6680	+0,3354
0,070	-0,2400	-0,3858	-0,6980	-2,382	+1,657	+0,5535	+0,2864
0,075	-0,2600	-0,4262	-0,8180	-4,568	+1,205	+0,4716	+0,2454
0,080	-0,2804	-0,4698	-0,9660	-28,18	+0,9565	+0,4090	+0,2102
0,085	-0,3014	-0,5165	-1,153	+7,455	+0,7965	+0,3584	+0,1789
0,090	-0,3230	-0,5670	-1,399	+3,420	+0,6835	+0,3160	+0,1501
0,095	-0,3450	-0,6215	-1,738	+2,260	+0,5980	+0,2792	+0,1233
0,100	-0,3676	-0,6815	-2,238	+1,708	+0,5310	+0,2468	+0,0979
0,11	-0,4148	-0,8190	-4,628	+1,166	+0,4282	+0,1898	+0,0495
0,12	-0,4648	-0,9885	-84,95	+0,8920	+0,3514	+0,1400	+0,0028
0,13	-0,5180	-1,204	+5,775	+0,7225	+0,2894	+0,0944	-0,0437
0,14	-0,5740	-1,489	+2,906	+0,6040	+0,2366	+0,0513	-0,0912
0,15	-0,6345	-1,888	+1,976	+0,5140	+0,1895	+0,0093	
0,16	-0,6995	-2,490	+1,511	+0,4418	+0,1464	-0,0323	
0,17	-0,7695	-3,508	+1,229	+0,3814	+0,1060	-0,0741	
0,18	-0,8455	-5,640	+1,036	+0,3286	+0,0674	-0,1169	
0,19	-0,928	-13,04	+0,8930	+0,2818	+0,0299	-0,1610	
0,20	-1,018	+55,65	+0,7825	+0,2390	-0,0104		
0,22	-1,228	+5,160	+0,6175	+0,1618	-0,0807		
0,24	-1,491	+2,769	+0,4968	+0,0919	-0,1558		

Эквивалентные стойкости и податливости группы равных масс,  
находящейся в середине системы  
(шестицилиндровый двигатель)

$\Delta$	$H_6^3$	$E_{1,6}^3$	$\Delta$	$H_6^3$	$E_{1,6}^3$	$\Delta$	$H_6^3$	$E_{1,6}^3$
0,0010	-0,00301	+5,00	0,010	-0,0305	+4,80	0,10	-0,368	+3,20
11	-0,00331	+5,00	11	-0,0337	+4,78	11	-0,455	+3,04
12	-0,00361	+4,99	12	-0,0368	+4,76	12	-0,465	+2,89
13	-0,00391	+4,99	13	-0,0430	+4,74	13	-0,518	+2,74
14	-0,00421	+4,98	14		+4,72	14	-0,574	+2,59
15	-0,00451	+4,98	15	-0,0462	+4,74	15	-0,634	+2,45
16	-0,00481	+4,97	16	-0,0493	+4,69	16	-0,700	+2,31
17	-0,00512	+4,97	17	-0,0525	+4,67	17	-0,770	+2,17
18	-0,00542	+4,97	18	-0,0557	+4,65	18	-0,846	+2,04
19	-0,00572	+4,96	19	-0,0589	+4,63	19	-0,928	+1,91
0,0020	-0,00602	+4,96	0,020	-0,0620	+4,61	0,20	-1,02	+1,78
22	-0,00662	+4,96	22	-0,0635	+4,57	22	-1,23	+1,53
24	-0,00723	+4,95	24	-0,0750	+4,53	24	-1,49	+1,30
26	-0,00784	+4,95	26	-0,0816	+4,50	26	-1,83	+1,08
28	-0,00844	+4,94	28	-0,0881	+4,46	28	-2,30	+0,874
0,0030	-0,00904	+4,94	0,030	-0,0948	+4,42	0,30	-2,98	+0,680
32	-0,00965	+4,93	32	-0,102	+4,38	32	-4,10	+0,496
34	-0,0103	+4,93	34	-0,108	+4,35	34	-6,24	+0,325
36	-0,0109	+4,93	36	-0,115	+4,31	36	-12,3	+0,165
38	-0,0115	+4,92	38	-0,122	+4,27	38	-12,3	+0,015
0,0040	-0,0121	+4,92	0,040	-0,129	+4,23	0,40	+15,9	-0,126
42	-0,0127	+4,91	42	-0,136	+4,20	42	+7,52	-0,256
44	-0,0133	+4,91	44	-0,143	+4,16	44	+4,96	-0,379
46	-0,0139	+4,91	46	-0,150	+4,12	46	+3,75	-0,491
48	-0,0145	+4,90	48	-0,157	+4,09	48	+3,01	-0,593
0,0050	-0,0151	+4,90	0,050	-0,164	+4,05	0,50	+2,50	-0,686
55	-0,0166	+4,89	55	-0,182	+3,96	55	+1,74	-0,886
0,0060	-0,0182	+4,88	0,060	-0,201	+3,88	0,60	+1,31	-1,04
65	-0,0197	+4,87	65	-0,220	+3,79	65	+1,01	-1,15
0,0070	-0,0212	+4,86	0,070	-0,240	+3,70	0,70	+0,794	-1,21
0,0075	-0,0228	+4,85	0,075	-0,260	+3,62	0,75	+0,612	-1,24
0,0080	-0,0243	+4,84	0,080	-0,280	+3,53	0,80	+0,463	-1,25
85	-0,0259	+4,83	85	-0,301	+3,45	85	+0,330	-1,22
0,0090	-0,0274	+4,82	0,090	-0,328	+3,37	0,90	+0,212	-1,18
95	-0,0290	+4,81	95	-0,345	+3,28	95	+0,102	-1,10
0,0100	-0,0305	+4,80	0,100	-0,368	+3,20	1,00	0	-1,00



Таблица IV

## Значения безразмерных амплитуд

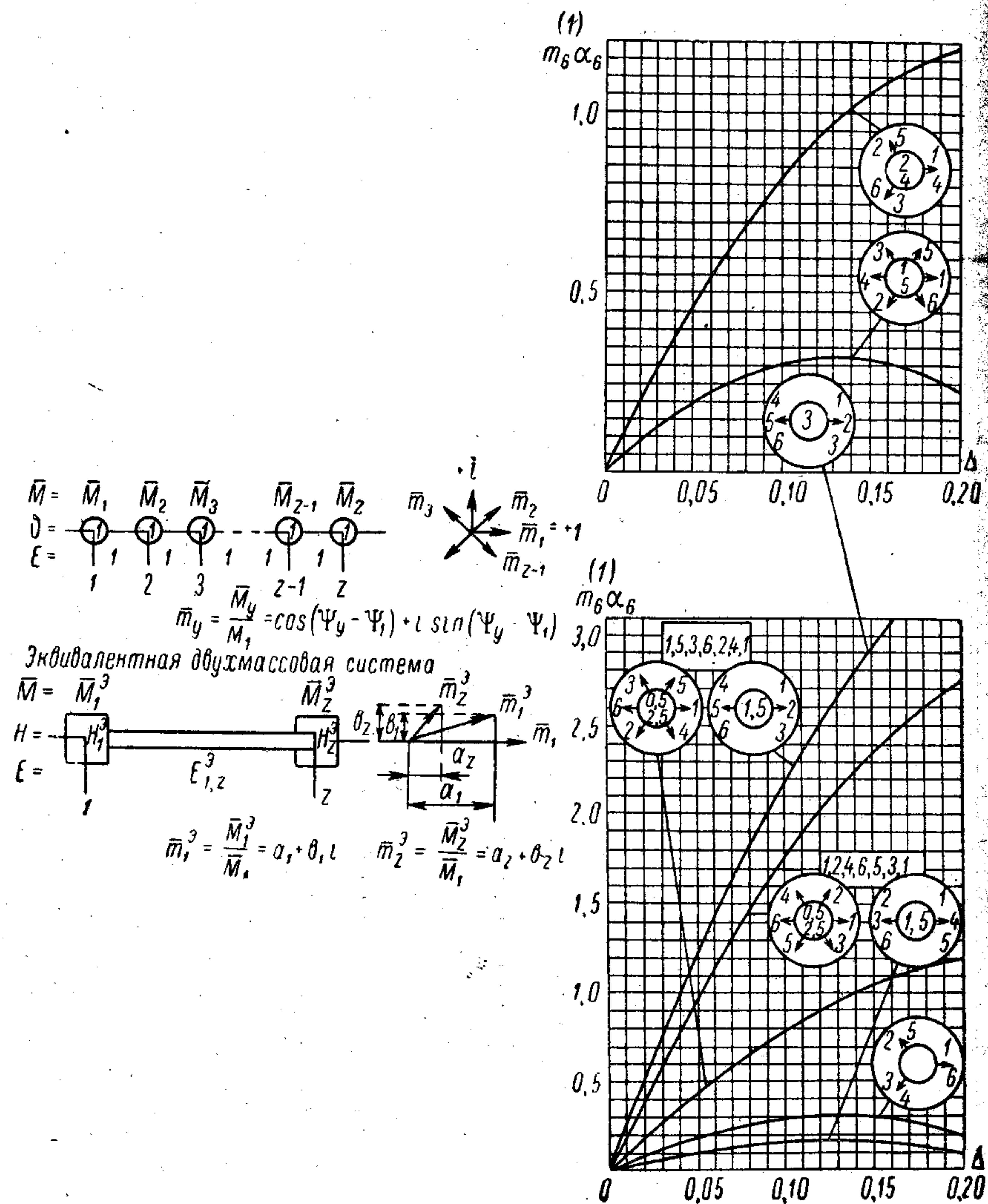
$\Delta \backslash y$	3	4	5	6	7	8
0,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
0,002	0,994	0,988	0,980	0,970	0,958	0,944
0,004	0,988	0,976	0,960	0,940	0,917	0,899
0,006	0,982	0,964	0,940	0,911	0,876	0,836
0,008	0,976	0,952	0,921	0,882	0,836	0,784
0,010	0,970	0,941	0,901	0,853	0,797	0,732
0,012	0,964	0,929	0,882	0,824	0,758	0,682
0,014	0,958	0,917	0,863	0,796	0,720	0,632
0,016	0,952	0,905	0,844	0,768	0,682	0,584
0,018	0,946	0,894	0,825	0,741	0,645	0,536
0,020	0,940	0,882	0,807	0,714	0,608	0,489
0,022	0,934	0,870	0,788	0,687	0,571	0,443
0,024	0,928	0,858	0,769	0,660	0,535	0,398
0,026	0,923	0,847	0,750	0,633	0,500	0,354
0,028	0,917	0,835	0,732	0,607	0,465	0,310
0,030	0,911	0,824	0,713	0,581	0,431	0,268
0,032	0,905	0,813	0,695	0,555	0,397	0,226
0,034	0,899	0,802	0,677	0,530	0,364	0,186
0,036	0,893	0,790	0,659	0,505	0,331	0,146
0,038	0,887	0,779	0,624	0,480	0,299	0,107
0,040	0,881	0,768	0,624	0,455	0,267	0,069
0,042	0,875	0,757	0,606	0,430	0,235	+0,031
0,044	0,870	0,746	0,588	0,405	0,204	-0,005
0,046	0,864	0,734	0,571	0,381	0,174	-0,041
0,048	0,858	0,723	0,554	0,357	0,144	-0,076
0,050	0,852	0,712	0,537	0,334	0,115	-0,110
0,052	0,846	0,701	0,520	0,311	0,086	-0,144
0,054	0,840	0,690	0,503	0,288	0,057	-0,176
0,056	0,834	0,679	0,486	0,265	0,029	-0,208
0,058	0,829	0,609	0,470	0,242	+0,001	-0,239
0,060	+0,823	+0,658	+0,453	+0,220	-0,026	-0,270
0,062	+0,823	+0,658	+0,453	+0,220	-0,026	-0,270
0,064	0,817	0,647	0,436	0,198	-0,053	-0,300
0,066	0,812	0,636	0,419	0,176	-0,079	-0,329
0,068	0,806	0,625	0,403	0,154	-0,105	-0,357
0,070	0,800	0,615	0,387	0,133	-0,130	-0,385
0,072	0,795	0,604	0,371	0,112	-0,155	-0,412
0,074	0,789	0,593	0,355	0,091	-0,179	-0,436
0,076	0,783	0,583	0,339	0,070	-0,203	-0,462
0,078	0,777	0,572	0,324	0,050	-0,227	-0,487
0,080	0,772	0,562	0,308	0,030	-0,250	-0,512
0,082	0,766	0,551	0,292	+0,010	-0,273	-0,534
0,084	0,761	0,541	0,277	-0,010	-0,296	-0,557
0,086	0,755	0,531	0,262	-0,029	-0,318	-0,579
0,088	0,749	0,520	0,247	-0,048	-0,339	-0,600
0,090	+0,743	0,510	0,232	-0,067	-0,360	-0,621

Продолжение табл. IV

$\Delta \backslash y$	3	4	5	6	7	8
0,090	0,738	0,500	0,217	-0,086	-0,381	-0,641
0,092	0,732	0,490	0,202	-0,105	-0,401	-0,662
0,094	0,727	0,479	0,187	-0,123	-0,421	-0,681
0,096	0,721	0,469	0,172	-0,141	-0,442	-0,699
0,098	0,716	0,459	0,157	-0,159	-0,461	-0,716
0,10	0,710	0,449	0,143	-0,177	-0,480	-0,733
0,11	0,683	0,399	0,072	-0,263	-0,569	-0,812
0,12	0,654	0,350	+0,004	-0,343	-0,648	-0,876
0,13	0,627	0,303	-0,061	-0,417	-0,719	-0,927
0,14	0,600	0,256	-0,125	-0,487	-0,782	-0,967
0,15	0,573	0,210	-0,185	-0,552	-0,836	-0,995
0,16	0,545	0,164	-0,245	-0,613	-0,884	-1,013
0,17	0,519	0,120	-0,300	-0,669	-0,923	-1,022
0,18	0,492	0,076	-0,354	-0,721	-0,957	-1,021
0,19	0,466	+0,034	-0,405	-0,767	-0,983	-1,012
0,20	+0,440	-0,008	-0,454	-0,810	-1,004	-0,996
0,21	0,414	-0,049	-0,502	-0,849	-1,018	-0,973
0,22	0,388	-0,089	-0,547	-0,884	-1,027	-0,943
0,23	0,363	-0,128	-0,589	-0,915	-1,030	-0,908
0,24	0,338	-0,166	-0,630	-0,942	-1,028	-0,868
0,25	0,312	-0,203	-0,668	-0,966	-1,022	-0,828
0,26	0,288	-0,240	-0,705	-0,986	-1,012	-0,774
0,27	0,263	-0,276	-0,740	-1,004	-0,996	-0,720
0,28	0,238	-0,311	-0,772	-1,017	-0,977	-0,664
0,29	0,213	-0,345	-0,803	-1,028	-0,955	-0,604
0,30	0,189	-0,378	-0,832	-1,036	-0,928	-0,542
0,31	0,165	-0,411	-0,859	-1,041	-0,899	-0,479
0,32	0,142	-0,442	-0,884	-1,043	-0,867	-0,414
0,33	0,119	-0,472	-0,907	-1,042	-0,833	-0,349
0,34	0,095	-0,502	-0,928	-1,039	-0,796	-0,283
0,35	0,072	-0,530	-0,948	-1,033	-0,757	-0,217
0,36	0,049	-0,559	-0,866	-1,025	-0,716	-0,148
0,37	0,027	-0,586	-0,882	-1,015	-0,673	-0,081
0,38	+0,005	-0,613	-0,897	-1,003	-0,627	-0,013
0,39	-0,018	-0,638	-0,911	-0,989	-0,581	+0,053
0,40	-0,040	-0,664	-0,922	-0,972	-0,533	0,120
0,41	-0,062	-0,688	-0,933	-0,954	-0,485	0,183
0,42	-0,084	-0,711	-0,941	-0,933	-0,434	0,248
0,43	-0,105	-0,735	-0,949	-0,912	-0,383	0,310
0,44	-0,127	-0,758	-0,955	-0,888	-0,331	0,373
0,45	-0,148	-0,779	-0,959	-0,863	-0,278	0,432
0,46	-0,169	-0,799	-0,963	-0,837	+0,226	0,489
0,47	-0,190	-0,819	-0,965	-0,809	0,173	0,543
0,48	-0,210	-0,839	-0,965	-0,781	0,122	0,596
0,49	-0,230	-0,857	-0,964	-0,751	0,069	0,646
0,50	-0,250	-0,875	-0,963	-0,720	-0,016	0,695
0,51	-0,270	-0,892	-0,960	-0,687	+0,036	0,740
0,52	-0,289	-0,909	-0,955	-0,653	0,089	0,785
0,53	-0,309	-0,924	-0,950	-0,618	0,141	0,825
0,54	-0,328	-0,939	-0,943	-0,584	0,191	0,862
0,55	-0,348	-0,954	-0,936	-0,548	+0,240	+0,897



## Шестицилиндровый двигатель



Тип двигателя	Четырехтактный									
Чередование вспышек	1, 2, 4, 6, 5, 3, 1					1, 5, 3, 6, 2, 4, 1				
№ векторной диаграммы	0,5 и 2,5*		1 и 2*		1,5	0,5 и 2,5*		1 и 2*		1,5
$\Delta$	$\bar{m}_1^3 = -\bar{m}_6^3$		$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$		$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$	$\bar{m}_1^3 = -\bar{m}_6^3$		$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$		$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$
	a	b	a	b	$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$	a	b	a	b	$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$
0,000	+1,40	+0,34	0,00	0,00	+0,20	+0,60	-0,34	0,00	0,00	+1,80
0,000	+1,40	+0,34	-0,01	0,00	+0,20	+0,60	-0,34	-0,01	0,00	+1,80
0,010	+1,40	+0,35	-0,01	+0,01	+0,20	+0,60	-0,34	-0,01	-0,01	+1,80
0,015	+1,40	+0,35	-0,02	+0,01	+0,20	+0,60	-0,34	-0,02	-0,02	+1,80
0,020	+1,40	+0,35	-0,03	+0,02	+0,20	+0,60	-0,35	-0,03	-0,02	+1,80
0,025	+1,40	+0,35	-0,04	+0,02	+0,19	+0,60	-0,35	-0,04	-0,02	+1,80

Продолжение

Двухтактный									
Любое	1, 5, 3, 4, 2, 6, 1								
3 6	1 и 5*				2 и 4*				
$\bar{m}_1^3 = \bar{m}_6^3$	$\bar{m}_1^3$		$\bar{m}_6^3$		$\bar{m}_1^3$		$\bar{m}_6^3$		$\Delta$
	a	b	a	b	a	b	a	b	
+3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,60	+0,34	-0,60	-0,35	0,000
+3,02	-0,01	0,00	-0,01	+0,01	+0,60	+0,34	-0,60	-0,35	0,005
+3,05	-0,01	+0,01	-0,02	+0,02	+0,60	+0,34	-0,60	-0,35	0,010
+3,08	-0,02	+0,01	-0,03	+0,02	+0,60	+0,35	-0,60	-0,35	0,015
+3,10	-0,03	+0,02	-0,04	+0,03	+0,60	+0,35	-0,60	-0,35	0,020
+3,13	-0,05	+0,02	-0,06	+0,04	+0,59	+0,35	-0,60	-0,34	0,025

\* Для этих векторных диаграмм знак у мнимой части (b) противоположный указанному в таблице.



Тип двигателя	Четырехтактный									
Чередование вспышек	1, 2, 4, 6, 5, 3, 1					1, 5, 3, 4, 2, 4, 1				
№ векторной диаграммы	0,5 и 2,5*		1 и 2*		1,5	0,5 и 2,5*		1 и 2*		1,5
$\Delta$	$\overline{m}_1^3 = -\overline{m}_6^3$		$\overline{m}_1^3 = \overline{m}_6^3$		$\overline{m}_1^3 = \overline{m}_6^3$	$\overline{m}_1^3 = -\overline{m}_6^3$		$\overline{m}_1^3 = \overline{m}_6^3$		$\overline{m}_1^3 = -\overline{m}_6^3$
	$a$	$b$	$a$	$b$	$\overline{m}_1^3 = \overline{m}_6^3$	$a$	$b$	$a$	$b$	$\overline{m}_1^3 = -\overline{m}_6^3$
0,030	+1,40	+0,35	-0,05	+0,03	+0,19	+0,60	-0,35	-0,05	-0,03	+1,84
0,035	+1,41	+0,35	-0,07	+0,03	+0,19	+0,59	-0,35	-0,07	-0,03	+1,84
0,040	+1,41	+0,35	-0,09	+0,04	+0,19	+0,59	-0,35	-0,09	-0,04	+1,84
0,045	+1,41	+0,35	-0,11	+0,04	+0,18	+0,59	-0,35	-0,11	-0,04	+1,84
0,050	+1,41	+0,35	-0,12	+0,05	+0,18	+0,59	-0,35	-0,12	-0,05	+1,84
0,055	+1,41	+0,35	-0,14	+0,06	+0,18	+0,59	-0,35	-0,14	-0,06	+1,84
0,060	+1,41	+0,35	-0,16	+0,07	+0,17	+0,59	-0,35	-0,16	-0,07	+1,84
0,065	+1,41	+0,35	-0,18	+0,07	+0,17	+0,58	-0,35	-0,18	-0,07	+1,84
0,070	+1,42	+0,35	-0,21	+0,08	+0,17	+0,58	-0,35	-0,21	-0,08	+1,84
0,075	+1,42	+0,35	-0,23	+0,09	+0,16	+0,58	-0,35	-0,23	-0,09	+1,84
0,080	+1,42	+0,35	-0,25	+0,10	+0,16	+0,58	-0,35	-0,25	-0,10	+1,84
0,085	+1,42	+0,35	-0,27	+0,11	+0,15	+0,58	-0,36	-0,27	-0,11	+1,84
0,090	+1,42	+0,36	-0,30	+0,12	+0,15	+0,57	-0,36	-0,30	-0,12	+1,85
0,095	+1,43	+0,36	-0,32	+0,12	+0,14	+0,57	-0,36	-0,32	-0,12	+1,85
0,100	+1,43	+0,36	-0,35	+0,13	+0,14	+0,57	-0,36	-0,35	-0,13	+1,85
0,105	+1,43	+0,36	-0,38	+0,14	+0,14	+0,57	-0,36	-0,38	-0,14	+1,86
0,110	+1,43	+0,36	-0,40	+0,15	+0,13	+0,57	-0,36	-0,40	-0,15	+1,86
0,115	+1,43	+0,36	-0,43	+0,16	+0,13	+0,56	-0,36	-0,43	-0,16	+1,87
0,120	+1,44	+0,37	-0,45	+0,17	+0,12	+0,56	-0,37	-0,45	-0,17	+1,87
0,125	+1,44	+0,37	-0,48	+0,18	+0,12	+0,56	-0,37	-0,48	-0,18	+1,88
0,130	+1,44	+0,37	-0,51	+0,19	+0,11	+0,56	-0,37	-0,51	-0,19	+1,88
0,135	+1,44	+0,37	-0,54	+0,20	+0,11	+0,56	-0,37	-0,54	-0,20	+1,89
0,140	+1,45	+0,37	-0,57	+0,21	+0,10	+0,55	-0,37	-0,57	-0,21	+1,89
0,145	+1,45	+0,38	-0,60	+0,22	+0,10	+0,55	-0,37	-0,60	-0,22	+1,90
0,150	+1,45	+0,38	-0,63	+0,23	+0,10	+0,55	-0,38	-0,63	-0,23	+1,90

\* Для этих векторных диаграмм знак у мнимой части ( $b$ ) противоположный указанному в таблице.

В таблице приведены численные значения вещественной  $a$  и мнимой  $b$  составляющих диаграмм возмущающих моментов. В ней указаны только номера диаграмм, соответствующие диаграммы представлены на графиках, служащих для определения  $m_{\alpha\alpha}$  в случаях, когда численные значения некоторых из составляющих  $\overline{m}_1^3$  и  $\overline{m}_6^3$  отличаются друг от друга:  $a_1 = a$ ,  $a_6 = -a$ ,  $b_1 = b$  и  $b_6 = -b$ . Для двигателей с иным числом цилиндров и

Двухтактный									
Любое	1, 5, 3, 4, 2, 6, 1								
3 6	1 и 5*				2 и 4*				
$\overline{m}_1^3 = \overline{m}_6^3$	$\overline{m}_1^3$		$\overline{m}_6^3$		$\overline{m}_1^3$		$\overline{m}_6^3$		$\Delta$
	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$	
+3,16	-0,06	+0,03	-0,07	+0,05	+0,59	+0,35	-0,60	-0,34	0,030
+3,19	-0,08	+0,03	-0,08	+0,06	+0,59	+0,35	-0,60	-0,34	0,035
+3,22	-0,09	+0,04	-0,09	+0,07	+0,59	+0,35	-0,60	-0,34	0,040
+3,25	-0,10	+0,04	-0,11	+0,08	+0,59	+0,35	-0,60	-0,33	0,045
+3,28	-0,12	+0,05	-0,12	+0,09	+0,58	+0,36	-0,60	-0,33	0,050
+3,32	-0,14	+0,06	-0,13	+0,10	+0,58	+0,36	-0,60	-0,32	0,055
+3,35	-0,16	+0,06	-0,15	+0,11	+0,58	+0,36	-0,60	-0,32	0,060
+3,39	-0,18	+0,07	-0,16	+0,13	+0,57	+0,37	-0,60	-0,32	0,065
+3,43	-0,20	+0,08	-0,18	+0,14	+0,57	+0,37	-0,61	-0,31	0,070
+3,47	-0,22	+0,09	-0,19	+0,15	+0,57	+0,37	-0,61	-0,31	0,075
+3,51	-0,24	+0,10	-0,21	+0,16	+0,57	+0,37	-0,61	-0,30	0,080
+3,55	-0,26	+0,11	-0,23	+0,18	+0,56	+0,37	-0,61	-0,30	0,085
+3,59	-0,28	+0,12	-0,25	+0,19	+0,56	+0,38	-0,61	-0,29	0,090
+3,63	-0,30	+0,13	-0,27	+0,20	+0,56	+0,38	-0,61	-0,29	0,095
+3,68	-0,33	+0,14	-0,29	+0,22	+0,55	+0,38	-0,61	-0,28	0,100
+3,72	-0,35	+0,15	-0,31	+0,23	+0,55	+0,39	-0,61	-0,28	0,105
+3,77	-0,37	+0,16	-0,33	+0,24	+0,55	+0,39	-0,61	-0,27	0,110
+3,82	-0,40	+0,17	-0,36	+0,26	+0,54	+0,39	-0,61	-0,27	0,115
+3,87	-0,43	+0,18	-0,38	+0,27	+0,54	+0,40	-0,62	-0,27	0,120
+3,92	-0,45	+0,20	-0,40	+0,29	+0,53	+0,40	-0,62	-0,26	0,125
+3,98	-0,48	+0,21	-0,43	+0,31	+0,53	+0,41	-0,62	-0,25	0,130
+4,04	-0,51	+0,23	-0,46	+0,33	+0,53	+0,41	-0,62	-0,25	0,135
+4,10	-0,54	+0,24	-0,48	+0,34	+0,52	+0,42	-0,62	-0,24	0,140
+4,17	-0,56	+0,26	-0,51	+0,36	+0,52	+0,42	-0,63	-0,24	0,145
+4,23	-0,59	+0,28	-0,54	+0,38	+0,52	+0,43	-0,63	-0,23	0,150

ному в таблице.

каждой из амплитуд  $\overline{m}_1^3$  и  $\overline{m}_6^3$  эквивалентных возбудителей для некоторых векторных диаграмм отдельных гармоник для шестицилиндровых двигателей, а сами двигатели находятся в начале системы. Для шестицилиндровых 4-тактных двигателей только знаками, а потому, на основании табличных данных, находятся следующим образом:  $a_1 = a$ ,  $a_6 = -a$ ,  $b_1 = b$  и  $b_6 = -b$ . Для двигателей с иным числом цилиндров и другой последовательностью вспышек подобные материалы имеются в [57, Приложение].



Механические характеристики углеродистых сталей при переменной нагрузке  $\text{кг/мм}^2$  [57]

Таблица VI

Марка стали	$\delta_B$	$\delta_T$	$\tau_T$	$\delta_{-1\text{ и}}$	$\delta_{-1\text{ вс}}$	$\tau_{-1}$	$\delta_{\text{ти}}$	$\delta_5$
10	32	18	11	16	14	8	22	31
15	35	21	12	17	14,5	8,5	24	27
20	40	24	13	18	16	10	26	25
25	43	26	14	19	14	11	29	22
30	48	28	15,5	20	16,5	12	31	20
35	52	30	17	21,5	17,5	13	34	18
40	57	32	18	23	18,5	14,0	36	17
45	60	34	19	25	21,5	16,0	38	15
50	63	35	20	27	24,5	17,5	41	13
55	64	36	—	30				12
60	65	37		38				10
65	66	38						10
60Г	70	34	20	30	25	15	40	9
45Г2	80	40	24	34	28	18	48	11

$\delta_B$ —Предел прочности при растяжении;  
 $\delta_{\text{ти}}$ —Предел прочности при изгибе для чугуна;  
 $\delta_T$ —Предел прочности при растяжении;  
 $\tau_T$ —Предел текучести при кручении;  
 $\delta_5$ —относительное удлинение при разрыве при пятикратном отношении длины образца к его диаметру;  
 $\delta_{\text{вс}}$ —Предел прочности при сжатии;  
 $\delta_{\text{ти}}$ —Предел текучести при изгибе;  
 $\delta_{-1\text{ и}}$ —Предел выносливости при изгибе;  
 $\tau_{-1}$ —Предел выносливости при кручении.

Таблица VII  
Механические характеристики легированных сталей при переменной нагрузке  $\text{кг/мм}^2$  [57]

Марка стали	Закалка	Отпуск	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\sigma_{\text{ти}}$	$\tau_T$	$\sigma_{-1\text{ и}}$	$\sigma_{-1\text{ pc}}$	$\tau_{-1}$	$\delta_5$
1X13	1000 1050	700 790	60	42	—	—	54	52	—	20
20X	860	200	80	60	61	33	35	27	21	10
20XH	840	500	80	60	67	36	33	25	20	10
35Г	900	590	85	65	—	—	40,5	—	—	15
30XMA	880	560	95	75	84	45	47	31	25	12
20XH3A	820	500	95	75	78	42	43	30	24,5	11
12XH3A	860 и 780	150	95	70	67	40	39	27	22	11
40XH	820	500	100	80	83	39	53	—	—	10
40X	850	500	100	80	83	39	40	29	24	9
35XMIOA	950	650	100	85	—	—	46,0	—	—	15
40XCA	950	600	103	85,8	—	—	45,0	—	27	12
25XHBA	850	560	110	95	105	60	46	31	28	11
12X2H4A	880	180	110	85	—	—	50	—	—	10
18XHBA	950 и 850	160	115	85	88	48	54	36	33	12
30XГCA	890	450	115	85	—	—	52	53,5	24,5	10
18XMГA	870	200	119	105	—	—	44	63	27	10

Обозначения указаны в табл. VI.



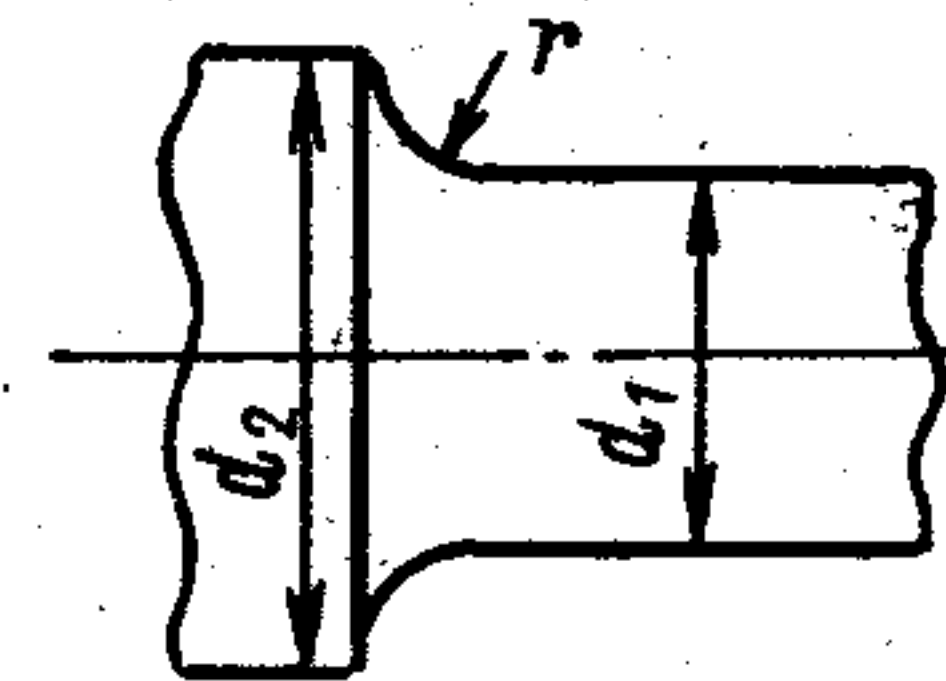
Таблица VI/II

Механические характеристики чугунов при переменной нагрузке [57]

Марка	Структура	$\sigma_B$	$\sigma_{BC}$	$\phi_{BH}$	$\tau_B$	$\sigma_{-1pc}$	$\sigma_{-1H}$	$\tau_{-1}$
СЧ 12—28		12	51	28		9	14	10,5
СЧ 15—32		15	57	32		10	16	12
СЧ 18—36		18	64,5	36		12	18	13,5
СЧ 21—40		21	75	40		14	21	15
СЧ 24—44		24	79,5	44		15	22	16
СЧ 28—48		28	87	48		16	24	18
СЧ 32—52		32	93	52		18	26	20
ВЧ 40—10	Ферритный	55	—	—	55	45	20	20
ВЧ 50—1,5	Перл. ферр.	55—60	195—220	65—90	50	—	—	35—45
—	Перлитный	55—80	185—215	75—105	65—75	18—23	19—24	21
ВЧ 60—2	Перл. ферр.	65—80	195—220	90—120	70	24—28	25	22
								49

Таблица IX

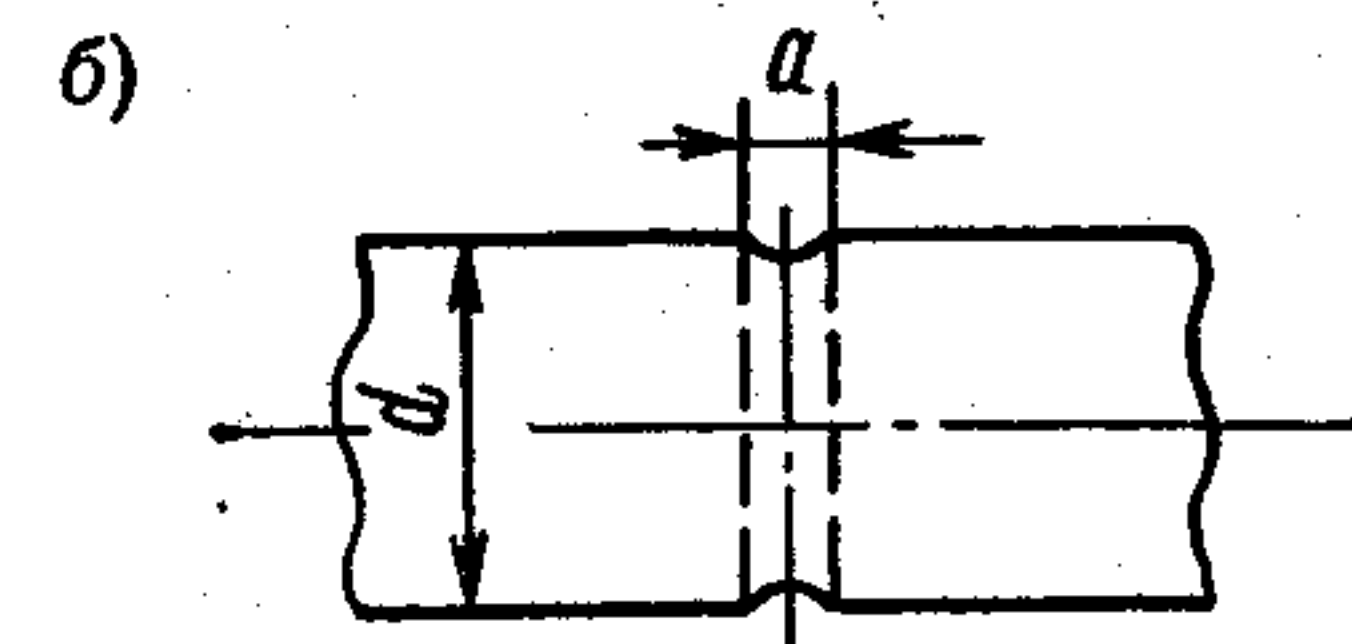
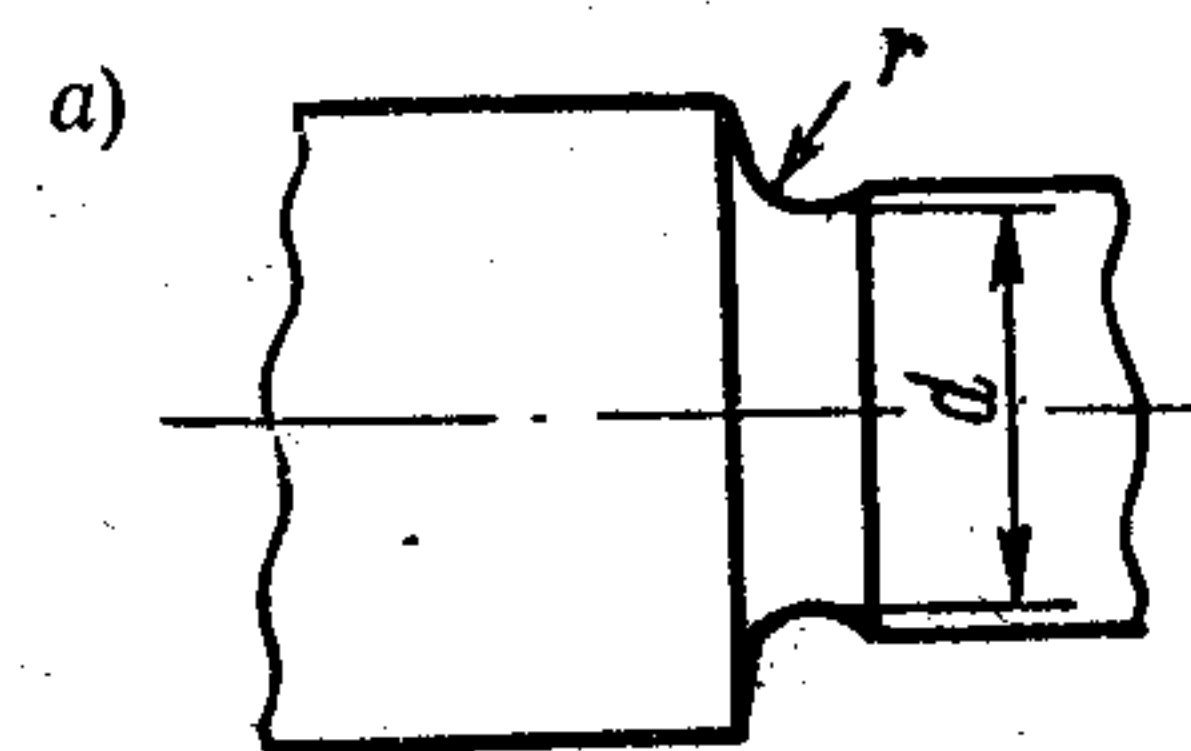
Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при кручении, обусловленные галтелями и отверстиями в стальных валах [54]



$$k_\tau = 1 + a \cdot b$$

$\kappa_{\tau} = 1 + a \cdot b$

$d_1/d_2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$r/d_1$												
$a =$	0,00	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0	0,0
	0,01	5,0	4,5	4,0	3,5	3,1	2,6	2,1	1,6	1,1	0,6	0,0
	0,02	3,3	3,0	2,7	2,4	2,1	1,8	1,4	1,1	0,8	0,4	0,0
	0,04	2,0	1,8	1,6	1,5	1,3	1,1	0,9	0,8	0,6	0,3	0,0
	0,06	1,4	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,3	0,0
	0,08	1,1	1,0	0,9	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,2	0,0
	0,10	0,9	0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,0
	0,20	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,3	0,2	0,1	0,0
	0,30	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,0
	0,40	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,0
	0,50	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0
	1,00	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0
	2,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	$\sigma_B =$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	$\text{кг/мм}^2$
$b =$	0,9	0,95	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	—	

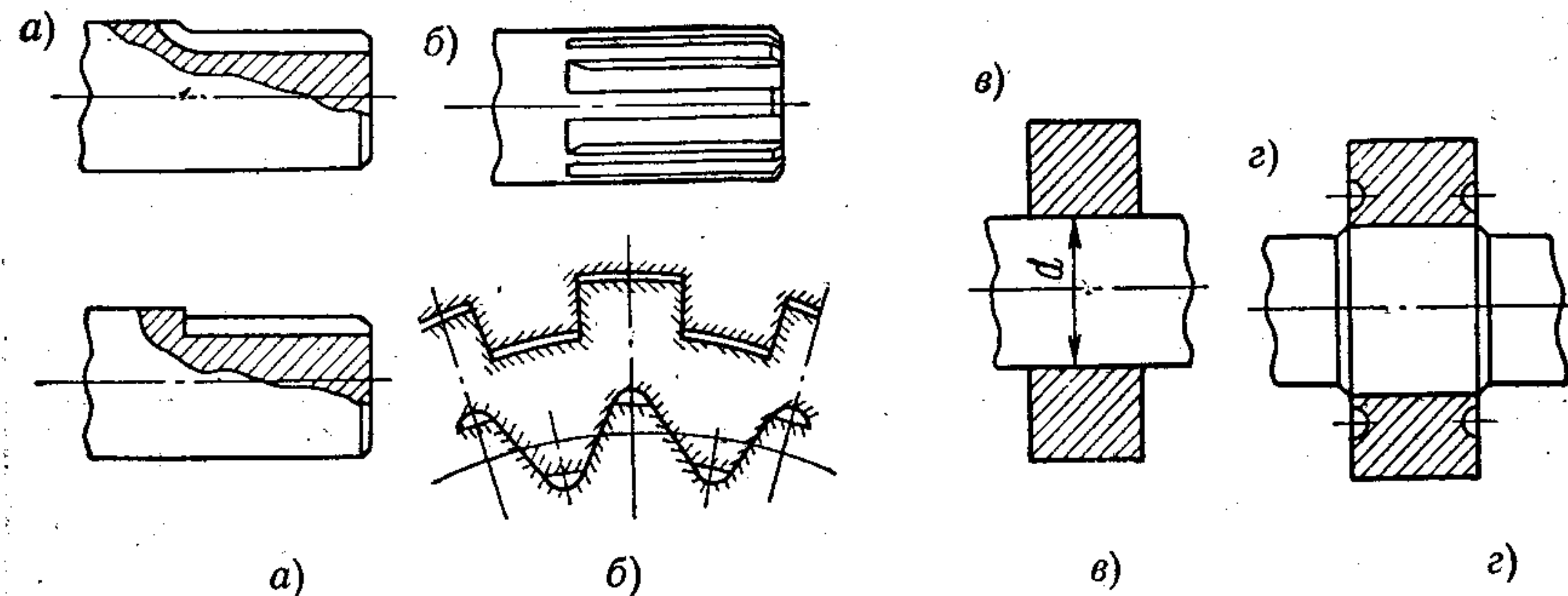


$r/d$	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	$\frac{a}{d} = 0,05 \div 0,25$
40	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,7
50	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,75
60	1,8	1,7	1,6	1,5	1,2	1,8
70	1,9	1,8	1,7	1,5	1,3	1,8
80	2,0	1,9	1,8	1,6	1,3	1,85
90	2,1	1,9	1,8	1,6	1,3	1,9
100	2,2	2,0	1,9	1,7	1,3	1,9
120	2,4	2,2	2,0	1,8	1,4	2,0



Таблица X

Коэффициенты концентрации напряжений при кручении, обусловленные шпоночными и шлицевыми пазами и посадками втулок, и коэффициенты упрочнения стальных валов от поверхностной обработки



$\sigma_B$ , кг/мм <sup>2</sup>	$k_\tau$	$k_\tau$	$k_\tau$	$k_\tau$ при посадках			$k_\tau$
				С	Н	Пр	
40	1,2	2,1	1,4	1,2	1,3	1,6	1—1,6
50	1,4	2,2	1,4	1,25	1,5	1,8	
60	1,5	2,4	1,5	1,3	1,6	2,0	
70	1,7	2,4	1,5	1,4	1,7	2,1	
80	1,9	2,5	1,5	1,5	1,8	2,2	
90	2,0	2,6	1,6	1,6	1,9	2,4	
100	2,2	2,7	1,6	1,7	2,0	2,6	
120	2,4	2,8	1,6	1,9	2,2	2,8	

Вид поверхностей обработки	Предел прочности сердцевины $\sigma_B$ , кг/мм <sup>2</sup>	Гладкие валы $k_\tau = 1$	Валы с малой концентрацией напряжений $k_\tau \leq 1,5$	Валы с большой концентрацией напряжений $k_\tau = 1,8 \div 2,0$
		Коэффициент упрочнения $\beta$		
Закалка с нагревом	60—80	1,5—1,7	1,6—1,7	2,4—2,8
Закалка т. в. ч. <sup>1</sup>	80—110	1,3—1,5	—	—
Азотирование <sup>2</sup>	90—120	1,1—1,2	1,5—1,7	1,7—2,1
Цементация	40—60	1,8—2,0	3	—
	70—80	1,4—1,5	—	—
	100—120	1,2—1,3	2	—
Дробеструйный наклеп <sup>3</sup>	60—150	1,1—1,2	1,5—1,6	1,7—2,1
Накатка роликом <sup>4</sup>		1,1—1,3	1,3—1,5	1,6—2,9

<sup>1</sup> Данные получены на лабораторных образцах диаметром 10—20 мм при глубине закаленного слоя (0,05—0,20)  $d$ . Для валов больших размеров упрочнение несколько меньше.

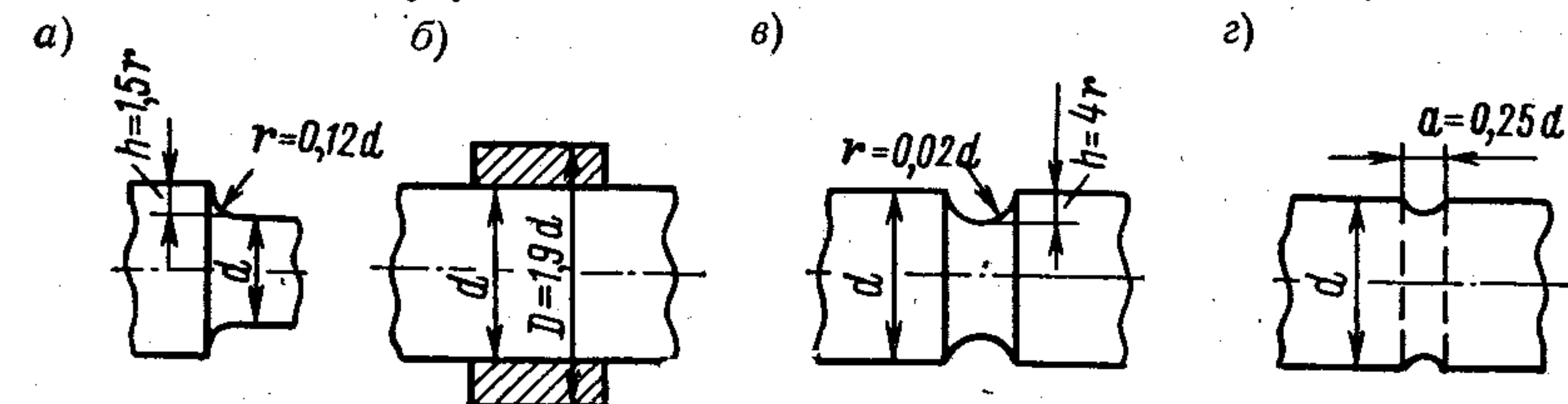
<sup>2</sup> Меньшие значения при глубине азотированного слоя 0,01  $d$ , большие значения при глубине азотированного слоя (0,03—0,04)  $d$ .

<sup>3</sup> Данные получены на образцах диаметром 8—10 мм, меньшие значения — при меньших скоростях обдува, большие — при больших.

<sup>4</sup> Данные получены на образцах диаметром 17—130 мм.

Таблица XI

Эффективные коэффициенты концентрации (а), коэффициенты влияния абсолютных размеров (б) и коэффициенты упрочнения обработкой (в) для чугунных валов с шаровидным графитом (60)



а)	Марка чугуна	б)		в)		г)	
		$k_\sigma$	$k_\sigma$	$k_\tau$	$k_\sigma$	$k_\tau$	$k_\sigma$
	СЧ 21—40	1,2	≈ 1,1	≈ 1,1	1,1	1,1	1,9
	ВЧ 40—10	1,6	1,2	—	1,1	1,2	2,6
	ВЧ 50—1,5	1,2*	1,1*	≈ 1,2	1,2*	0,9*	1,9**
	ВЧ 60—2	1,2*	1,2*	—	1,1* 1,4**	—	1,5*
* литой чугун ** нормализованный чугун							

б)	$d =$	1	2	3	4	5	см
		1	0,92	0,85	0,8	0,75	$0,3 \frac{9 + \sqrt{d}}{2 + \sqrt{d}}$
	с надрезом	1	—	—	—	0,9	—

в)	Вид поверхностной обработки	Марка чугуна	Коэффициент упрочнения $\beta$	
			Гладкие валы	Валы с над-резом
	Накатка роликом	ВЧ 50—1,5 (ферритн.) . . . .	1,2	2,1÷2,9* 2,0**
		ВЧ 60—2 (перлитн.) . . . . .	1,0	1,2—2,4 1,2**
	Дробеструйный наклеп	ВЧ 50—1,5 (ферр.) . . . . .	1,2	1,5
		ВЧ 60—2 (перл.) . . . . .	1,1	1,1
	Т. в. ч.	ВЧ 50—1,5 (ферр.) . . . . .	1,2÷1,3	2
	Т. в. ч. + обкатка	ВЧ 50—1,5 (ферр.) . . . . .	1,3	—
* большие числа относятся к случаю обкатки по дну надреза. ** для чугуна с пластичным графитом.				



### Крутильные колебания валопроводов

4.3.1. Расчеты крутильных колебаний должны представляться для установок с поршневыми двигателями мощностью 75 л. с. и более, а также в необходимых случаях, по требованию Регистра, для установок с турбинами и гребными электродвигателями.

4.3.2. Кроме основного варианта в расчете должны быть подвергнуты анализу также и другие варианты работы установки, а именно:

- вариант с запасным винтом, если последний отличается от основного;
- режим максимального отбора мощности и холостого хода в установках с ВРШ и крыльчатыми двигателями;
- режим с выключенным дополнительным приемником мощности, если момент инерции последнего соизмерим с моментом инерции рабочего цилиндра;

4.3.3. Расчет должен содержать:

- подробные данные основных элементов системы;
- таблицы подсчета частот свободных колебаний всех форм, имеющих существенные резонансы в диапазоне от 20 до 120% номинального числа оборотов, где под номинальным числом оборотов следует понимать число оборотов, соответствующее при расчетной мощности, или мощности меньшей расчетной, принятой для длительной эксплуатации;

- порядок вспышек цилиндров двигателя, фазовые диаграммы и значения геометрических сумм относительных амплитуд колебаний кривошипов рабочих цилиндров для всех рассматриваемых порядков и форм;

- данные о расчетных напряжениях в наиболее слабых сечениях коленчатого, упорного, промежуточного и гребного валов от наиболее значительных резонансных и околорезонансных колебаний; при этом в диапазоне от 85 до 105% номинального числа оборотов должны быть указаны напряжения от всех имеющихся резонансов, вне зависимости от их величины, а также напряжения от вынужденных колебаний главного порядка, когда резонанс последнего расположен вблизи этого диапазона;

- при наличии упругой муфты — определение амплитуд упругих элементов и напряжений в ее элементах и сопоставление их с допускаемыми значениями;

- при наличии редуктора — проверку условий возникновения перекачки зазоров в зубьях шестерен;

- при наличии демфера или антивибратора — соответствующие расчеты и конструктивные чертежи.

4.3.4. Допускаемые напряжения  $\tau_{\text{доп}}$  от резонансных, околорезонансных и вынужденных колебаний при длительной работе не должны превышать величин, подсчитанных по следующим формулам.

Коленчатые и гребные валы

$$\tau_{\text{доп}} = \pm \left( 460 - 12 \sqrt{d} - 130 \frac{n}{n_{\text{ном}}} \right) \text{ кгсм}^{-2}. \quad (10)$$

Промежуточные и упорные валы, а также валы генераторов

$$\tau_{\text{доп}} = \pm \left( 700 - 20 \sqrt{d} - 200 \frac{n}{n_{\text{ном}}} \right) \text{ кгсм}^{-2}, \quad (11)$$

где  $d$  — диаметр вала, см;

$n$  — исследуемое число оборотов;

$n_{\text{ном}}$  — номинальное число оборотов.

Для судов, длительно эксплуатирующихся на неполной мощности (буксиров, рыболовных траулеров и т. п.), во всех случаях следует принимать

$n = n_{\text{ном}}$ .

В главных и вспомогательных установках следует избегать наличия резонансов в зонах оборотов, где установка работает наибольшее время, а в случае, если резонансы имеют место в этих зонах, то напряжения от них не должны превышать половины от допускаемых напряжений, определенных по формулам (10) и (11).

4.3.5. Допускаемые напряжения  $\tau'_{\text{доп}}$  для зон оборотов, запретных для длительной работы, но через которые допускается быстрое прохождение, не должны превышать величин, подсчитанных по следующим формулам.

Коленчатые и гребные валы

$$\tau'_{\text{доп}} = 2\tau_{\text{доп}}. \quad (12)^*$$

Промежуточные и упорные валы, а также валы генераторов

$$\tau'_{\text{доп}} = 1,7\tau_{\text{доп}}. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) не действительны для диапазона 85—105% номинального числа оборотов, в котором наличие запретных зон не допускается.

4.3.6. Допускаемые напряжения только от крутильных колебаний даны применительно к сталям с пределом выносливости на кручение не менее 11—13 кг мм<sup>-2</sup> и пределом прочности при растяжении 44—52 кг мм<sup>-2</sup>.

Применение сталей с характеристиками, превышающими указанные значения, не может служить основанием для увеличения норм допускаемых напряжений.

В отдельных случаях для коленчатых и промежуточных валов, изготовленных из высокопрочных сталей, с одобрения Регистра, при наличии обоснованных данных, могут быть приняты более высокие значения допускаемых напряжений.

4.3.7. Результаты расчета на крутильные колебания должны быть подтверждены торсиографированием. Торсиографирование производится под наблюдением Регистра и должно охватывать наиболее характерные режимы работы установки, в том числе режимы максимально возможной мощности и оборотов. Замеренные частоты свободных колебаний не должны отличаться от расчетных более чем на 5%, а в случае несоблюдения этого расчет должен быть подвергнут соответствующей корректировке. Подсчет напряжений по данным торсиографирования должен производиться по наибольшим амплитудам колебаний соответствующей части торсиограммы, а при оценке вынужденных колебаний необходимо производить гармонический анализ торсиограммы.

4.3.8. В случае, если действующие напряжения превышают допускаемые напряжения, для длительной работы назначается запретная зона оборотов.

Границы запретной зоны должны определяться с учетом погрешности тахометра. Поэтому интервал, определенный равенством действующих и допускаемых напряжений, должен быть расширен в обе стороны на величину 3% номинального числа оборотов. В этом случае контроль за числом оборотов должен осуществляться тахометром с механическим приводом от двигателя с точностью измерения  $\pm 2\%$ .

На постах управления должны быть установлены таблички с надписью, указывающей границы запретных зон. На тахометрах запретные зоны оборотов отмечаются ограничительными красными полосами.



## Литература

1. Алексеев В. В., Терских В. П. Теория и метод расчета нелинейного силиконового демпфера крутильных колебаний с упругим креплением его ступицы к валу. Изв. вузов СССР, М.-Л., Машиностроение, 1966, № 3.
2. Андронов А. А., Хайкин С. Э., Витт А. А. Теория колебаний, М., Физматгиз, 1955.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний, М., изд. Наука, ГРФ-МЛ, 1965.
4. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдерович Р. М. Расчеты на прочность деталей машин, М.-Л., Машгиз, 1966.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы нелинейной механики, изд. АН УССР, 1955.
6. Булгаков Б. В. Колебания, ГИТТЛ, 1954.
7. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний, Л., Судпромгиз, 1962.
8. Бухарина Г. И. Демпфирование в поршневых двигателях при резонансных крутильных колебаниях, Труды ЛПИ, № 249, М.-Л., Машиностроение, 1965.
9. Бухарина Г. И. Демпфирование резонансных крутильных колебаний в масляном слое подшипников скольжения, Труды ЛПИ, № 264, М.-Л., Машиностроение, 1966.
10. Ваншейдт В. А. Судовые двигатели внутреннего сгорания, Л., Судпромгиз, 1958.
11. Вихерт М. М., Доброгаев М. И. и др. Конструкция и расчет автотракторных двигателей, М., ГИТИМЛ, 1967.
12. Геров В. Константинов М. Динамика на многоцилиндровых бутални машины, изд. Техника БНР, 1963.
13. Гопп Ю. А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов двигателей, ГОНТИ, 1938.
14. Григорьев Н. В. Нелинейные колебания элементов машин и сооружений М.-Л., Машиностроение, 1961.
15. Ден Гартог Д. П. Механические колебания. М.-Л. ГИФМЛ, 1960.
16. Дизели, Справочное пособие конструктора п/р В. А. Ваншейдта, М.-Л., 1964.
17. Житомирский В. К. Крутильные колебания валов авиационных поршневых двигателей. М.-Л., Оборонгиз, 1952.
18. Зиманенко С. С. Новые исследования крутильной жесткости коленчатых валов. Вестник инженеров и техников, 1964, № 2.
19. Иориш Ю. И. Виброметрия. Измерение вибрации и ударов, М., ГИТТЛ, 1963.
20. Истомин П. А. Динамика судовых двигателей внутреннего сгорания. Л. Судостроение, 1964.
21. Истомин П. А. Кинематика и динамика поршневых двигателей внутреннего сгорания с комбинированными схемами. Л. Судпромгиз, 1961.
22. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, т. 3, вып. 2, 1947.
23. Кер Вильсон У. Вибрационная техника. М. ГИ — ТИМЛ, 1963.
24. Кин Н. Тонг. Теория механических колебаний, НТИ, 1963.

25. Кортин Г. Д. О погрешности приближенного способа расчета резонансных крутильных колебаний систем с трением. Сб. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. изд. АН УССР, 1963.
26. Кортин Г. Д., Лурье И. А., Пахомов К. Н. Об учете большого трения в расчетах резонансных крутильных колебаний валопроводов. Сб. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. изд. АН УССР, 1966.
27. Крылов Н. М., Боголюбов М. Н. Введение в нелинейную механику. изд. АН УССР, 1937.
28. Лурье И. А. и Лойцянский Л. Г. Теоретическая механика, М. Гостехиздат, 1950.
29. Лурье И. А. Крутильные колебания в дизельных установках, М. Военмориздат, 1940.
30. Львов Е. Д. Динамика поршневых двигателей, ОНТИ-НКТП, 1963.
31. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, М., Гостехиздат, 1952.
32. Митропольский Ю. А. Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс, Инженерный сборник, т. 15, 1963.
33. Мэнли Р. Анализ и обработка записи колебаний, ГИТИМЛ, 1948.
34. Найдено О. К. и Петров П. П. Амортизация судовых двигателей и механизмов, Л. Судпромгиз, 1962.
35. Натанзон В. А. Крутильные колебания валов с муфтами, обладающими нелинейными характеристиками, изд. Новая техника, НКАП, 1943.
36. Нейман И. Ш. Динамика авиационных двигателей, М., Оборонгиз, 1943.
37. Нейман И. Ш. Крутильные колебания многомассовой нелинейной системы, М., Оборонгиз, 1947.
38. Нечаев В. К. и Болгов А. Т. К определению гистерезисных потерь энергии в валах, Изд. ТПИ им. С. М. Кирова, т. 85, 1957.
39. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.-Л., Машгиз, 1957.
40. Пановко Я. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний. АН СССР, Инженерный сборник, т. 13, 1953.
41. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем, М., «Наука» ГРФМЛ, 1967.
42. Покорный Б. М. Расчет коленчатых валов на крутильные колебания, М.-Л., Машгиз, 1947.
43. Попык К. Г. Динамика автомобильных и тракторных двигателей, М., Машиностроение, 1965.
44. Сборник докладов по динамической прочности машин. Изд. АН СССР 1946.
45. Сборник статей «Динамика и прочность коленчатых валов», изд. АН СССР, I — 1948, II — 1950.
46. Серебрянников М. Г. Гармонический анализ, М. Гостехиздат, 1948.
47. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М. Динамическая прочность в машиностроении, М.-Л., Машгиз, 1948.
48. Серенсен С. В., Шнейдерович Р. М. и Громан М. Б. Валы и оси, расчет и конструирование, М.-Л., Машгиз, 1959.
49. Симаков Ф. Ф. Исследование колебаний крутильной системы автомобиля. Известия вузов СССР, М.-Л., Машиностроение, № 3, 1963.
50. Справочник машиностроителя п/р С. В. Серенсена, т. 3, М. ГИ-ТМЛ, 1962.
51. Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических машинах, М., ИИЛ, 1952.



52. Тахиро Хаяси. Вынужденные колебания в нелинейных системах, М., ИИЛ, 1957.
53. Терских В. П. Динамические характеристики реверсивно-редукционных муфт при крутильных колебаниях, Вестник машиностроения, 1959, № 5.
54. Терских В. П. Метод цепных дробей. М.-Л., Машгиз, т. I, 1955.
55. Терских В. П. Метод цепных дробей. М.-Л., Машгиз, т. 2, 1955.
56. Терских В. П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок. Справочное пособие, т. I, М.-Л., Машгиз, 1954.
57. Терских В. П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок. Справочное пособие, т. II, М.-Л., Машгиз, 1954.
58. Терских В. П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок. Справочное пособие, т. III, Л. Судпромгиз, 1954.
59. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., ГИФМЛ, 1959.
60. Туричин А. М. Электрические измерения неэлектрических величин, М.-Л., Машгиз, 1952.
61. Филиппов А. П. Колебания механических систем. Киев, изд. АН УССР, 1965.
62. Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т. Механические колебания, М.-Л., Машиностроение, 1966.
63. Чекомарев А. И. Взаимное влияние гармоник в нелинейных системах. Сборник Динамика и прочность коленчатых валов, ч. II, изд. АН СССР, 1950.
64. Шаталов К. Т. Вынужденные колебания линейных цепных систем при учете всех внутренних и внешних трений, изд. АН СССР, 1949.
65. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов, Москва—Киев, 1961.
66. Яблонский А. А. Курс теоретической механики, ч. 2, М., Высшая школа, 1966.
67. Яблонский А. А., Никифорова М. В. Курс теоретической механики. М., Высшая школа, 1966.
68. ЭСМ, т. I, кн. 2, ГН—ТИМЛ, 1947.
69. Brems G. «Der Einfluß der Flügel eines Schiffspropellers auf die Erregung von Schiffsvibrationen. Schiff and Hafen, Nr. 11, 1954.
70. Dory S. F. «Elastic Hysteresis in Crankschaftsteel», Proc. Inst. Mec. Vol. 123, 1932.
71. Kimmel A. «Der Einfluß der Pleuelanlenkung auf das Drehschwingungsverhalten von V-Motoren» Motortechnische Zeitschrift, Heft 1, 1941.
72. Lewis F. «Torsional Vibration in the Diesel Engine». Trans. Soc. Naval Arch. and Mar. Eng., Vol. 33, 1925.
73. Nestorides E. I. «A Handbook of Torsional Vibration», BICERA, Cambridge, 1958.
74. Porter «The Range and Severity of Torsional Vibration in Diesel Engines. Trans. ASME. 1928, APM — 50 — 8.
75. Rowett, Proc. Royal Soc., Ser. A. Vol. 89, 1913/14.
76. Shock and vibration handbook, vol. 1, 2, 3. N. Y., 1961.
77. Wilder H. «Drehschwingungen in Kolbenmaschineanlagen», Berlin, 1922.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора . . . . .	3
Основные обозначения . . . . .	4
Введение . . . . .	6

### ГЛАВА I

#### Понятие о свободных и вынужденных колебаниях

§ 1. Основные определения . . . . .	9
§ 2. Свободные крутильные колебания системы с одной степенью свободы	10
§ 3. Особенности главных колебаний. Сложение колебаний . . . . .	15
§ 4. Крутильно-колеблющиеся системы . . . . .	17
§ 5. Колебательные движения системы с несколькими степенями свободы	18
§ 6. Понятие о возмущающих моментах. Вынужденные колебания . . .	20
§ 7. Резонансные колебания. Кривые резонанса. Запретные зоны . . .	21
§ 8. Цель и последовательность расчета крутильных колебаний . . . .	24
Пример . . . . .	25

### ГЛАВА II

#### Замена действительной системы эквивалентной дискретной схемой

§ 9. Общие сведения . . . . .	26
§ 10. Определение моментов инерции масс . . . . .	—
§ 11. Определение упругих свойств соединений . . . . .	32
Примеры . . . . .	43

### ГЛАВА III

#### Расчет свободных колебаний дискретных систем без сопротивлений

§ 12. Свободные крутильные колебания многомассовой системы . . . .	46
§ 13. Переход к безразмерной системе . . . . .	53
§ 14. Составление частотного уравнения свободных колебаний . . . .	60
§ 15. Частотное уравнение в форме Терских . . . . .	61
§ 16. Стойкости и податливости частей системы . . . . .	63
§ 17. Виды частотного уравнения . . . . .	68
§ 18. Вычисление безразмерных амплитуд колебаний масс и эластических моментов . . . . .	72
§ 19. Определение местонахождения узлов . . . . .	—
§ 20. Расчет свободных колебаний в таблицах Терских без «надлома»	74
§ 21. Упрощение расчета свободных колебаний, когда группа равных масс находится в начале системы . . . . .	77



§ 22. Погрешность расчета частот свободных колебаний . . . . .	78
§ 23. Расчет свободных колебаний в таблицах Терских с «надломом»	79
§ 24. Приближенное определение частот свободных колебаний . . . . .	82
§ 25. Частоты свободных колебаний, подлежащие исследованию . . . . .	86
§ 26. Упрощение расчета свободных колебаний в случаях, когда группа равных масс находится в середине системы . . . . .	87
§ 27. Особенности расчета свободных колебаний разветвленных систем	88
§ 28. Особенности расчета свободных колебаний симметричных развет- вленных систем . . . . .	91
§ 29. Особенности расчета систем с редукторами . . . . .	96
§ 30. Определение наиболее напряженного участка . . . . .	97
§ 31. Расчет свободных колебаний по способу Толле . . . . .	99
§ 32. Упрощение расчета свободных колебаний по способу Толле, когда группа равных масс находится в начале системы . . . . .	102
Примеры . . . . .	—

#### ГЛАВА 4

##### Вынужденные колебания простейших систем

§ 33. Уравнение вынужденных колебаний . . . . .	113
§ 34. Фазы вынужденных колебаний . . . . .	116
§ 35. Амплитуды вынужденных колебаний . . . . .	118
§ 36. Особенности вынужденных колебаний одномассовой системы . . . . .	—

#### ГЛАВА 5

##### Возмущающие моменты и их работа

§ 37. Общие соображения . . . . .	122
§ 38. Моменты от сил тяжести . . . . .	123
§ 39. Моменты от сил инерции . . . . .	125
§ 40. Моменты от силы газов . . . . .	—
§ 41. Моменты от некоторых приемников энергии и передач к ним . . . . .	130
§ 42. Суммарные моменты, действующие на каждый кривошип . . . . .	131
§ 43. Моменты от гребного винта . . . . .	132
§ 44. Безразмерные возмущающие моменты . . . . .	133
§ 45. Работа, передаваемая системе одним гармоническим возмущающим моментом . . . . .	—
§ 46. Векторные диаграммы возмущающих моментов . . . . .	134
§ 47. Работа, передаваемая системе группой возмущающих моментов одного порядка при резонансе . . . . .	137
§ 48. Комплексные амплитуды возмущающих моментов . . . . .	140
§ 49. Учет работы возмущающих моментов двигателя, расположенного в начале системы, по способу Терских . . . . .	141
§ 50. Учет работы возмущающих моментов двигателя, расположенного в середине системы, по способу Терских . . . . .	144
Пример . . . . .	147

#### ГЛАВА 6

##### Демпфирующие моменты и их работа

§ 51. Виды демпфирующих сопротивлений . . . . .	148
§ 52. Работа демпфирующих сопротивлений . . . . .	149
§ 53. Удельное трение . . . . .	150
§ 54. Кривошипно-шатунные механизмы . . . . .	152
§ 55. Ротор генератора . . . . .	155
§ 56. Гребной винт . . . . .	156
§ 57. Роторы центробежных насосов, вентиляторов и гидромурт . . . . .	157
§ 58. Подшипники скольжения . . . . .	158
§ 59. Упругий гистерезис . . . . .	—
Пример . . . . .	160

#### ГЛАВА 7

##### Расчет вынужденных колебаний

§ 60. Резонансные колебания . . . . .	162
§ 61. Расчет резонансных колебаний . . . . .	165
§ 62. Приближенный расчет вынужденных нерезонансных колебаний линейных систем с малым трением . . . . .	168
§ 63. Расчет околорезонансных колебаний . . . . .	171
§ 64. Колебания при переходе через резонанс . . . . .	173
§ 65. Определение запретных зон чисел оборотов и оценка результатов расчета . . . . .	177
§ 66. Понятие о расчете вынужденных нерезонансных колебаний ли- нейных систем без трения по способу Терских . . . . .	181
§ 67. Понятие о расчете вынужденных колебаний систем с трением по способу Терских . . . . .	185

#### ГЛАВА 8

##### Расчет нелинейных колебаний

§ 68. Общие положения . . . . .	189
§ 69. Свободные колебания нелинейной системы с одной степенью сво- боды . . . . .	190
§ 70. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы . . . . .	192
§ 71. Расчет свободных и вынужденных колебаний одномассовой системы	193
§ 72. Особенности нелинейных вынужденных колебаний . . . . .	197
§ 73. Уравнения свободных и вынужденных колебаний многомассовых систем . . . . .	199
§ 74. Расчет свободных и вынужденных колебаний многомассовых систем	203
§ 75. Понятие о вынужденных дополнительных колебаниях . . . . .	205
Примеры . . . . .	207



Устранение запретных зон

§ 76. Общие положения . . . . .	214
§ 77. Принцип варьирования элементами системы . . . . .	—
§ 78. Варьирование элементами системы на базе таблиц Терских . . . . .	216
§ 79. Варьирование элементами системы на базе таблицы Толле . . . . .	218
§ 80. Мероприятия по варьированию элементами системы . . . . .	221
§ 81. Варьирование последовательностью вспышек . . . . .	222
§ 82. Успокоители колебаний и их конструкция . . . . .	223
§ 83. Теория и расчет линейного антивибратора . . . . .	229
§ 84. Понятия о расчете нелинейного антивибратора . . . . .	232
§ 85. Эквивалентные параметры маятникового антивибратора . . . . .	234
§ 86. Теоретическое исследование и расчет маятникового антивибратора . . . . .	236
§ 87. Теоретическое исследование силиконового демпфера . . . . .	240
§ 88. Расчет силиконового демпфера . . . . .	245
§ 89. Выбор силиконовой жидкости . . . . .	247
§ 90. Выбор типа успокоителя и способы его включения в систему . . . . .	250
Примеры . . . . .	252

ГЛАВА 10

Измерительная аппаратура, применяемая для исследования крутильных колебаний валопроводов

§ 91. Способы измерения колебаний и напряжений . . . . .	266
§ 92. Тензометрирование . . . . .	267
§ 93. Электрические и механические торсиографы и торсиометр . . . . .	271
§ 94. Торсиографирование судового валопровода . . . . .	275
Приложения . . . . .	280
Литература . . . . .	298

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
30	15 снизу	$\left\{ \sum_{i=1}^z P_{ni} + \dots \right.$	$\left\{ \sum_{i=1}^z G_{ni} + \dots \right.$
78	2—3 сверху	с минуса на плюс	с плюса на минус
159	16 снизу	$\partial W_r = k_r \tau_{\max}^x,$	$\partial W_r = 10^{-12} k_r \tau_{\max}^x,$
159	14 »	$k_r = 8,3 \cdot 10^4 (3,04 C^2 + \dots$	$k_r = 7,85 \cdot 10^4 (41,85 C^2 + \dots$
160	11 сверху	3720	1350
160	12 »	410	183
169	7 снизу	$= \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y$	$= \sum_{y=1}^z \bar{\alpha}_y \sin(\tau \sqrt{\Delta} + \gamma_1)$
169	4 »	То же	То же
238	рис. 77	$H_1^{II}$ (вторая ордината)	$H_1^I$
243	формула (9.35)	$\dots (\bar{A}_d^n) (A_d^n)_{\Delta} = \Delta_{II} \text{ инв}$	$\dots (\bar{A}_d^n)_{\Delta} = \Delta_{II} \text{ инв}$
253	2 сверху	$A_2$	$A_2^n$
288	3 снизу	$m_6 \alpha_6$	$m_6^{(1)} \alpha_6$

П. А. Истомина. Крутильные колебания в судовых ДВС.